Kartkówka 1

1. Podaj definicję grupy. Czy zbiór liczb rzeczywistych dodatnich z operacją potęgowania $pot(a, b) = a^b$ jest grupą?

2. Przedstaw w postaci $a + bi$ liczbę $(1 + i\sqrt{3})^9$.

3. Rozwiąż z liczbach zespolonych równanie:

$$z^3 - z^2 + 4z - 4 = 0.$$

Szkice rozwiązań

1. Zbiór X z działaniem $\cdot : X \times X \to X$ nazwiemy grupą jeżeli spełnione są następujące warunki:

- (element neutralny) istnieje $e \in X$ taki, że dla każdego $x \in X$ zachodzi $x \cdot e = e \cdot x = x$,
- (element odwrotny) dla każdego $x \in X$ istnieje $y \in X$ taki, że $x \cdot y = y \cdot x = e$,
- (łączność) dla każdych $x, y, z \in X$ zachodzi $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.

Zbiór liczb rzeczywistych dodatnich z działaniem potęgowania nie jest grupą. W szczególności nie jest zachowane prawo łączności, np. $2^{(3^3)} = 2^{27} \neq 2^9 = 2^{3 \cdot 3} = (2^3)^3$.

2. Liczymy moduł oraz argument liczby $z = (1 + i\sqrt{3})^9$. Moduł liczby $(1 + i\sqrt{3})$ wynosi 2, więc $|z| = 2^9$. Argument liczby $(1 + i\sqrt{3})$ wynosi $\frac{\pi}{3}$, więc $arg(z) = 9 \cdot \frac{\pi}{3} = 3\pi = \pi \mod 2\pi$. Zatem $z = -2^9 = -512 + 0i$.

3. Zauważamy, że $z = 1$ spełnia warunki zadania. Zatem $z^3 - z^2 + 4z - 4 = (z - 1)p(z)$ dla pewnego wielomianu p drugiego stopnia. Obliczamy $p(z)$, wychodzi

$$z^3 - z^2 + 4z - 4 = (z - 1)(z^2 + 4).$$

Pierwiastki wielomianu $z^2 + 4$ to $2i$ oraz $-2i$. Zatem odpowiedź to: 1, $2i$ oraz $-2i$.