Zadania z gwiazdką - seria II
Algorytmika sieci Petriego

Termin wysyłania rozwiązań: 5 lutego 2021
Emailem na: wczerwin@mimuw.edu.pl

Przez $\vec{k} \in \mathbb{N}^d$ oznaczmy d-wymiarowy wektor o każdej współrzędnej równej k.

1. Permutowanie biegu $\mathbb{Z}$-VASSa
Pokazać, że dla dowolnego wykładniczego ograniczenia M istnieje $\mathbb{Z}$-VASS oraz jego bieg ρ z $p(\vec{0})$ do $p(\vec{0})$ taki, że każde jego przepermutowanie ρ' które jest biegiem z $p(\vec{0})$ do $p(\vec{0})$, odwiedza pewną konfigurację o normie maksimum większej niż M.

2. Zbiory super-semilinowe
Powiemy, że zbiór S jest *super-semiliniowy* jeśli da się zdefiniować w logice Presburgera z dodatkowym kwantyfikatorem $\exists^\infty$ działającym w ten sposób, że $\exists^\infty_{x_d} \phi(x_1, \ldots, x_d)$ jest prawdziwe dla tych wektorów $(x_1, \ldots, x_{d-1}) \in \mathbb{N}^{d-1}$, dla których istnieje nieskończenie wiele wartości $x_d \in \mathbb{N}$ takich, że $\phi(x_1, \ldots, x_{d-1}, x_d)$. Rozstrzygnąć, czy każdy zbiór super-semiliniowy jest również semiliniowy.
Uwaga: można korzystać z tego, że logika Presburgera definiuje dokładnie zbiory semiliniowe.

3. Modularna separowalność
Powiemy, że dwa zbiory $S, T \subseteq \mathbb{N}^d$ są *modularnie separowalne* jeśli istnieje taka liczba $N \in \mathbb{N}$, że dla dowolnego $s \in S$ oraz $t \in T$ istnieje pewna współrzędna $i \in \{1, \ldots, d\}$ taka, że $s[i] \not\equiv t[i] \mod N$. Dowolny d-VASS, jego konfiguracja początkowa $p(0^d)$ oraz stan q opisuje zbiór wektorów $\{v \in \mathbb{N}^d \mid p(\vec{0}) \to q(v)\}$. Pokazać, że dla danych dwóch zbiorów $S, T \subseteq \mathbb{N}^2$ opisanych przez 2-VASSy jest rozstrzygalne w czasie elementarnym, czy są one modularnie separowalne.