Marcin Chrzanowski, zadania z gwiazdką, seria 3

1.

Twierdzenie: Każda jednotaśmowa maszyna Turinga rozponająca język palindromów PAL działa, w pesymistycznym przypadku, w czasie $\Omega(n^2)$.

Definicja: Dla ustalonej maszyny Turinga M, niech **funkcja ciągów przejść** $C : \mathbb{N} \times \Gamma^* \to Q^*$ będzie zdefiniowana tak, że $C(i, w)$ to ciąg kolejnych stanów, w których maszyna M jest w momencie przejścia przez granicę między komórką i-tą a $i + 1$-szą pracując na słowie w.

Lemat 1: Jeśli $w, v \in PAL$ oraz $C(i, w) = C(j, v)$, to $w'v' \in PAL$, gdzie w' to pierwsze i liter słowa w, a v' to słowo v bez pierwszych j liter.

Dowód: Podzielmy bieg maszyny po słowie $w'v'$ na bloki $B_0B_1 \dots B_m$ w momentach gdy głowica przechodzi między komórką i-tą a $i + 1$-szą. $m = |C(i, w)| = |C(j, v)|$. Podobnie zróbmy z biegami po słowach w i v - niech $W_0W_1 \dots W_m$ będzie podziałem biegu po w w momentach przejścia między komórką i-tą a $i + 1$-szą, a $V_0V_1 \dots V_m$ podziałem biegu po v w momentach przejścia między komórką j-tą a $j + 1$-szą.

Zauważmy, że dla k parzystych, $B_k = W_k$, a dla nieparzystych, $B_k = V_k$. Zarówno W_m jak i V_m kończą się akceptacją, zatem również i B_m kończy się akceptacją, czyli $w'v' \in PAL$. $\square$

W dalszej części dowodu będziemy rozważać języki L_n zdefiniowane następująco:

$$L_n := \{wc^{2n}w^R | w \in \{a, b\}^n\}$$

Lemat 2: Jeśli $n + 1 \leq i, j \leq 3n$ oraz $w, v \in L_n$, $w \neq v$, to $C(i, w) \neq C(j, v)$.

Dowód: Weźmy takie w i v. Skonstruujmy słowo $w'v'$ jak w lemacie 1, przypuśćmy, że $C(i, w) = C(j, v)$. Ale słowo $w'v'$ to pierwsze n liter słowa w, następnie co najmniej jedno c, a na końcu ostatnie n liter słowa v. Skoro jednak $w \neq v$ to $w'v' \notin PAL$ - sprzeczność z lematem 1. $\square$

Dowód twierdzenia: Weźmy dowolną maszynę Turinga M rozponającą język PAL. Oznaczmy przez $T(n)$ maksymalną liczbę kroków M potrzebuje by rozpoznać palindrom długości n.

Zauważmy, że dla każdego n, dla każdego $w \in L_n$, musi istnieć i ($n+1 \leq i \leq 3n$) takie, że $|C(i, w)| \leq \frac{T(4n)}{2n}$. Przypuśćmy, że tak nie jest. Wówczas długość całego biegu to co najmniej $\frac{T(4n)}{2n} \cdot 2n$ (bo każdy stan w każdym z ciągów w obrazie przedziału od $n + 1$ do $3n$ funkcji ciągów przejść odpowiada pewnemu innemu krokowi w biegu M po w), co jest większe niż $T(4n)$, sprzeczność.

Ciągów przejść długości co najwyżej $l := \frac{T(4n)}{2n}$ jest $|Q|^{l+1}$, a każde z 2^n słów w L_n musi "dostać" co najmniej jeden unikalny taki ciąg (z lematu 2).

$$
\begin{aligned}
|Q|^{l+1} &\geq 2^n \\
l + 1 &\geq n \log_{|Q|} 2 \\
\frac{T(4n)}{2n} &\geq n \log_{|Q|} 2 - 1 \\
T(4n) &\geq (2 \log_{|Q|} 2) \cdot n^2 - 1 \\
T(n) &= \Omega(n^2)
\end{aligned}
$$

$\square$