Zadania z gwiazdką - seria I

Termin oddania: 26 kwietnia
emailem na: wczerwin@mimuw.edu.pl

1. Rozstrzygnij, czy język

$$L = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid w = uv \text{ oraz } \#_a(u) + \#_b(u) = \#_b(v) + \#_c(v)\}$$

jest regularny.

2. Niech $\mathcal{F}$ to najmniejsza klasa zawierająca wszystkie języki skończone nad wszystkimi skończonymi alfabetami, która jest zamknięta na:

- skończoną sumę, dopełnienie i konkatenację;
- skończoną sumę, dopełnienie, konkatenację i rzutowanie.

W obu przypadkach rozstrzygnij, czy klasa $\mathcal{F}$ jest równa językom regularnym.
Uwaga: Przez rzutowanie języka $L \subseteq \Sigma^*$ na pewien podalfabet $\Gamma \subseteq \Sigma$ rozumiemy zbiór słów, które powstały ze słów z języka L poprzez usunięcie wszystkich liter z $\Sigma \setminus \Gamma$.
Uwaga 2: Przez zamknięcie na dopełnienie rozumiemy fakt, że jeśli $L \subseteq \Sigma^*$ należy do $\mathcal{F}$, to również $\Sigma^* \setminus L$ należy do $\mathcal{F}$. W szczególności dla ustalonego L można stosować tę regułę dla różnych alfabetów Σ takich, że $L \subseteq \Sigma^*$.

3. Dla języka $L \subseteq \Sigma^*$ niech jego *gęstość* to funkcja $g_L : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ taka, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ wartość $g(n)$ to liczba słów długości n należących do L. Rozstrzygnij, czy istnieje język regularny L taki, że jego gęstość g_L jest ponad wielomianowa, ale podwykładnicza, czyli dla każdych $c, k > 1$ zachodzi $f = \Omega(n^k)$, ale $f = o(c^n)$.

4. Niedeterministyczny automat jednolicznikowy A nad alfabetem Σ składa się ze zbioru stanów Q, zbioru stanów początkowych $I \subseteq Q$, końcowych $F \subseteq Q$ oraz zbioru tranzycji $\delta \subseteq Q \times \Sigma \times \{-1, 0, 1\} \times Q$. Konfiguracja automatu A to para ze zbioru $Q \times \mathbb{N}$, czyli innymi słowy automat może przyjmować tylko nieujemne wartości licznika. Bieg automatu po słowie $w = a_1 \cdots a_n$ to ciąg konfiguracji $(q_0, c_0), \ldots, (q_n, c_n)$ takich, że dla każdego $i \in \{1, \ldots, n\}$ mamy $(q_{i-1}, a_i, c_i - c_{i-1}, q_i) \in \delta$ oraz oczywiście $c_i \geqslant 0$. Bieg jest akceptujacy gdy $q_0 \in I$, $c_0 = 0$ oraz $q_n \in F$. Słowo jest akceptowane jeśli istnieje bieg akceptujący po nim, a język automatu $L(A)$ to zbiór wszystkich słów akceptowanych. Zaprojektuj algorytm, który dla danego niedeterministycznego automatu jednolicznikowego A odpowiada na pytanie, czy $L(A) = \Sigma^*$.

5. Pokaż, że jeśli zarówno L jak i $\Sigma^* \setminus L$ są rozpoznawane przez pewne niedeterministyczne automaty jednolicznikowe, to wtedy L jest regularny.