WYKŁAD

27.04.2015

Algorytmiczna teoria gier

2012

pełna wersja

na tym są skupieni → Elias Koutsoupias, Christos Papadimitriou 2009

→ Tim Roughgarden, Éva Tardos 2002

Noam Nisan, Amir Ronen 2001

Najpierw wstęp do teorii gier, bardzo szybki!

Gry typu dylemat więźnia:

II

I \ II	E	A
E	1 \ 1	n+1 \ 0
A	0 \ n+1	n \ n

E – strategia egoistyczna

A – strategia altruistyczna

E – biorę dla siebie 1 dobro

A – daję drugiej osobie n dobra

Tu jest równowaga Nasha w strategiach czystych (E,E), to jedyna r-ga Nasha.

Ogólnie może być wiele równowag Nasha w str. czystych np. tu:

	1 \ 1	0 \ 0
	0 \ 0	1 \ 1

Albo może też nie być w ogóle

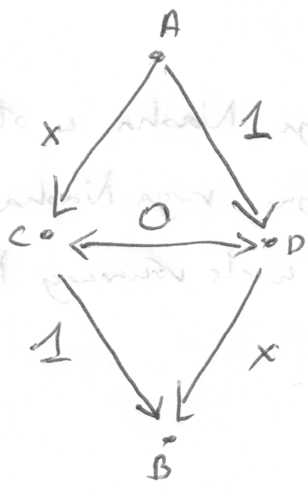
0/1	1/0
1/0	0/1

Ale w str. mieszanych (wprowadzamy) jest r-ga$\left(\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right)$.
Tw. Nasha mówi, że jest zawsze.

Może być też wykładniczo wiele, np. n graczy, każdy ma 2 strategie, wypłaty zawsze 0.

Można zadać pytanie w stylu „price of anarchy", o ile razy gorsza może być r-ga Nasha o optymalnej sytuacji. Mierzymy sytuację poprzez sumę wypłat. W dylemacie więźnia r.N. to (E,E), suma wypłat to 2. Natomiast (A,A) daje 2n, czyli jest n razy lepsza, nie ma ograniczenia.

Prace, o których mówimy skupiły się na szczególnym scenariuszu, specyficznej grze.
Przykład (paradoks Braessa)



z A do B chce przejść 1.

R.N. — cały przepływ leci $A \to C \to D \to B$, koszt 2.

Optimum — $\frac{1}{2}$ leci: $A \to C \to B$, $\frac{1}{2}$ leci: $A \to D \to B$, koszt

$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$.

Czyli może być $\frac{2}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}$ razy gorzej.

Jeszcze dygresja, d-d tw. Nasha (ewentualnie).

Tw. (Nash)

Zawsze istnieje r-ga Nasha w strategiach mieszanych

D-d

Będziemy korzystać z tw. ~~Brouwera~~ Brouwera o punkcie stałym.

Tw. ~~Brouwera~~ Brouwera: każda ciągła funkcja na wypukłym zbiorze zwartym ma punkt stały.

Idea naszego rozwiązania będzie taka, że skonstruujemy mapowanie z przestrzeni tupli strategii mieszanych w siebie takie, że jego punkt stały będzie r-gą Nasha.

Niech N to liczba graczy, $A = A_1 \times \ldots \times A_N$ to prz. str. czystych, $\Delta = \Delta_1 \times \ldots \times \Delta_n$ to przestrzeń str. mieszanych.

Dla $\sigma \in \Delta$, $1 \leq i \leq N$ oraz ~~akcji~~ strategii $a \in A_i$ definiujemy

$$Gain_i(\sigma, a) = \max(0, u_i(a, \sigma_{-i}) - u_i(\sigma_i, \sigma_{-i})),$$

czyli zysk i-tego gracza przy zmianie σ_i na a.

Definiujemy

$$g_i(\sigma)(a) = \sigma_i(a) + Gain_i(\sigma, a)$$

Zobaczmy, że

$$\sum_{a \in A_i} g_i(\sigma)(a) = \sum_{a \in A_i} \left(\sigma_i(a) + Gain_i(\sigma, a)\right) =$$

$$= 1 + \sum_{a \in A_i} Gain_i(\sigma, a) > 0$$

Teraz def. $f : \Delta \to \Delta$, tż dookoła i

$$f_i(\sigma)(a) = \frac{g_i(\sigma)(a)}{\sum_{b \in A_i} g_i(\sigma)(a)},$$

istotnie $(f_1, \dots, f_N) \in \Delta$.

Z tw. Brouwera f ma punkt stały, niech to będzie σ^*.

Pokażemy, że σ^* to r.N. Wystarczy pokazać, że

$$\forall_{1 \leq i \leq N} \forall_{a \in A_i} Gain_i(\sigma^*, a) = 0.$$

Przypuśćmy przeciwnie, niech $\exists_{1 \leq i \leq N} \exists_{a \in A_i} Gain_i(\sigma, a) > 0$.

Niech $C = \sum_{a \in A_i} g_i(\sigma^*)(a) = 1 + \sum_{a \in A_i} Gain(\sigma, a) > 1$

Mamy $f(\sigma^*) = \sigma^*$, więc

$$\sigma_i^* = \frac{g_i(\sigma^*)}{\sum_{a \in A_i} g_i(\sigma^*)(a)} \Rightarrow \sigma_i^* = \frac{\sigma_i^* + Gain_i(\sigma^*, \cdot)}{C}$$

$$\Downarrow$$

$$\sigma_i^* = \frac{Gain_i(\sigma^*, \cdot)}{C - 1}$$

Zauważmy, że zachodzi:

$$\sigma_i^*(a)\left[u_i(a_i,\sigma_{-i}^*) - u_i(\sigma_i^*,\sigma_{-i}^*)\right] = \sigma_i^*(a)\,Gain_i(\sigma^*,a)$$

- jeśli $Gain_i(\sigma^*,a) > 0$ to z def.
- jeśli $Gain_i(\sigma^*,a) = 0$, to $\sigma_i^*(a)=0$ i też OK

Mamy więc:

$$0 = u_i(\sigma_i^*,\sigma_{-i}^*) - u_i(\sigma_i^*,\sigma_{-i}^*) =$$

$$= \left(\sum_{a\in A_i} \sigma_i^*(a)\, u_i(a_i,\sigma_{-i}^*)\right) - u_i(\sigma_i^*,\sigma_{-i}^*) =$$

$$= \sum_{a\in A_i} \sigma_i^*(a)\left(u_i(a_i,\sigma_{-i}^*) - u_i(\sigma_i^*,\sigma_{-i}^*)\right) \underset{\text{z powyższego}}{=}$$

$$= \sum_{a\in A_i} \sigma_i^*(a)\,Gain_i(\sigma^*,a) = \sum_{a\in A_i} (C-1)\,\sigma_i^*(a)^2 > 0$$

Sprzeczność.

c.n.d.

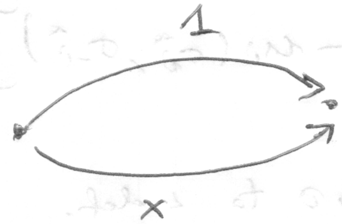
Teraz przechodzimy do rozważań nt. nagrody Gödla.

Koutsoupias i Papadimitriou zasadniczo wprowadzili model i zrobili kilka podstawowych rzeczy:

Kilka słów o modelu. Ile razy RN może być gorsza od sterowania. Gorsza wszystkie najgorszego gracza lub w jakiś inny.

- analizowali model z dwoma wierzchołkami i mpołączeniami
- ~~?~~ analizowali maksymalną stratę jednego gościa
- pokazali, że dla $m=2$ i dwóch identycznych łączy wychodzi $\frac{3}{2}$, co wcale nie jest banalne
- dla $m=2$ i dwóch różnych łączy może być $\phi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$
- dla m oczekiwany ruch dla każdego gracza jest $\leq 2-\frac{1}{m}$ razy gorszy
- maksymalna strata $-\Omega\left(\frac{\log m}{\log\log m}\right)$

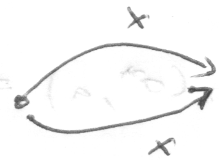
Inny przykład, również ~~[illegible]~~ kosztowny jak w paradoksie Braessa.



- r-gi Nasha: 1
- sterowanie: $\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$ (średnia)

$$\frac{1}{\frac{3}{4}}=\frac{4}{3}$$

Dla 2 ~~[illegible]~~ identycznych łączy (o przep. ~~[illegible]~~ $d\cdot x$) policzmy stratę maksymalną.



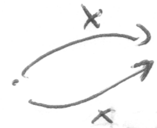
2 graczy, losują łącza, to jest r.N.

~~[illegible]~~ Bez str. og. 1-szy puścił górą.
Jeśli drugi puścił górą $\left(\frac{1}{2}\right)$, to 2, jeśli dołem $\left(\frac{1}{2}\right)$ to 1, czyli w efekcie ma koszt $\frac{3}{2}$.

Sterowanie - pierwszy górą, drugi dołem: 1.

Czyli są przykłady, że wychodzi $\frac{3}{2}$.

Dla m łączy i m graczy sterowanie daje 1.
Jeśli puszczają losowo, to koszt maksymalny, to maksymalna liczność łącza. Jest fakt, że to jest $\Omega\left(\frac{\log m}{\log\log m}\right)$.

Teraz ogr. górne dla 

dla n graczy.

O dziwo to jeden z głównych wyników pracy.

Tw. Mamy n graczy, wysyłają $w_1, \dots, w_n$ towarów po . PoA wynosi $\le \frac{3}{2}$.

Dowód:

Mamy n graczy. Niech q_i to prawd. że gracz i wysyła połączeniem o maksymalnym załadowaniu.

Koszt to $\sum_i q_i w_i$

Niech t_{ik} to prawd. kolizji gracza i oraz k.

Mamy $t_{ik} = \sum_{j=1}^{n} p_i^j \cdot p_k^j$

Zatem $q_i + q_k \le 1 + t_{ik}$ (jeśli i oraz k są w maksymalnym, to i oraz k kolidują)

Koszt agenta i, liczba c_i to

$$c_i = w_i + \sum_{k \ne i} t_{ik} w_k$$ (inna wersja dokładniej z prawd. t_{ik})

Mamy:

$$\sum_{k \ne i} (q_i + q_k) w_k \le \sum_{k \ne i} (1 + t_{ik}) w_k =$$

$$= \sum_{k \ne i} w_k + \sum_{k \ne i} t_{ik} w_k = \sum_{k \ne i} w_k + (c_i - w_i) \overset{\text{Lemat}}{\le}$$

$$\le \sum_{k \ne i} w_k + \frac{\sum_k w_k}{2} + \frac{w_i}{2} - w_i = \frac{3}{2} \sum_{k \ne i} w_k$$

Lemat

C_i – koszt i-tego gracza

m podzbiorów

$$c_i \le \frac{\sum_k w_k}{m} + \frac{m-1}{m} w_i$$

$$c_i^j = w_i + \sum_{k \ne i} p_k^j w_k = M^j + (1-p_i^j) w_i$$

M_j – ocena kubełka j

D-d

$$c_i = \min_j c_i \le \frac{1}{m} \sum_j c_i^j =$$

$$= \frac{1}{m} \sum_j \left(M^j + (1-p_i^j) w_i \right) =$$

$$= \frac{\sum_j M^j}{m} + \frac{m-1}{m} w_i = \frac{\sum_k w_k}{m} - \frac{m-1}{m} w_i$$

c.n.d.

~~Skalowalność~~

Zatem $\sum_{k \ne i} q_k w_k \le \left(\frac{3}{2} - q_i \right) \sum_{k \ne i} w_k$

Zatem koszt $= \sum_k q_k w_k \le \left(\frac{3}{2} - q_i \right) \sum_{k \ne i} w_k + q_i w_i$

$$= \left(\frac{3}{2} - q_i \right) \sum_k w_k + \left(2q_i - \frac{3}{2} \right) w_i$$

Mamy $opt \ge \max \left(\frac{1}{2} \sum_k w_k, w_i \right)$, bo $opt \ge w_i$ oraz $opt \ge \frac{\sum_j M_j}{m} = \frac{\sum_i w_i}{m}$

Jeśli $\exists_i q_i \ge \frac{3}{4}$, to $\frac{3}{2} - q_i \ge 0$ i $2q_i - \frac{3}{2} \ge 0$,

więc

koszt $\le \left(\frac{3}{2} - q_i \right) \cdot 2 opt + \left(2q_i - \frac{3}{2} \right) opt = \frac{3}{2} opt$.

Jeśli $\forall_k q_i < \frac{3}{4}$, to koszt $\le \sum_k q_k w_k \le \frac{3}{2} \sum_k w_k \le \frac{3}{2} opt$

c.n.d.

8

Teraz ~~z~~ będziemy patrzeć na pracę Roughgardena i Tardosa. Koszt rozwiązania to będzie suma kosztów graczy. Tu np. paradoks Braessa i $\overset{1}{\underset{x}{\rightrightarrows}}$ dostarczają

Opisać model

ogr. $\frac{4}{3}$. Ich 2 najważniejsze rezultaty to:

- dla liniowych przepustowości $PoA \leq \frac{4}{3}$
- dla dowolnych może być dowolnie duże, ale koszt r.N. nie przekracza kosztu optymalnego sterowania dla 2 razy większego przepływu.

Najpierw skupimy się na pierwszym twierdzeniu.

<u>Fakt</u>

$$\forall_{x,y \geq 0} \quad xy \leq x^2 + \frac{y^2}{4}$$

<u>D-d</u>

$$\left(x - \frac{y}{2}\right)^2 \geq 0$$

<u>Tw.</u>

PoA dla liniowych przepustowości jest $\leq \frac{4}{3}$

<u>D-d</u>

Wystarczy pokazać, że $w(f) \leq \frac{4}{3} \min_{f^*} w(f^*)$, gdzie f to r.N.

Def. $w^f(f^*)$ – puszczamy f^*, przep. są jak w f.

<u>Fakt</u>

$$w(f) = w^f(f) \leq w^f(f^*) \quad \text{gdy } f \text{ – r.N.}$$

D-d

Przypuśćmy, że $w^f(f^*) < w^f(f)$.

Wtedy
$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{p: s_i \to t_i} f_p^* \sum_{e\in p} l_e(f_e) < \sum_{i=1}^{k} \sum_{p: s_i \to t_i} f_p \sum_{e\in q} l_e(f_e)$$

Mamy
$$\forall_i \sum_{p: s_i \to t_i} f_p = \sum_{p: s_i\to t_i} f_p^* = r_i$$

Muszą więc być pewne i, (s_i, t_i) oraz dwie ścieżki p, q z s_i do t_i t., że

$$\sum_{e\in p} l_e(f_e) < \sum_{e\in q} l_e(f_e)$$

$$f_p^* > f_p, \ f_q^* < f_q.$$

Ale to jest sprz. z tym, że f to r.N.

c.n.d. (fakt)

Wystarczy więc pokazać, że

$$~~w^f(f^*) \leq \frac{1}{3} w(f^*) \text{ dla dow } f^*~~$$

$$w^f(f) \leq \text{Mamy } w^f(f^*) = \sum_{e\in E} f_e^* (a_e \cdot f_e + b_e) =$$

$$= \sum_{e\in E} a_e f_e f_e^* + \sum_{e\in E} b_e f_e^* \leq$$

$$\leq \sum_{e\in E} a_e (f_e^*)^2 + \sum_{e\in E} a_e f_e^2 \cdot \frac{1}{4} + \sum_{e\in E} b_e f_e^* \leq w^{f^*}(f_*) + \frac{1}{4} w(f) =$$

$$= w(f_*^*) + \frac{1}{4} w(f).$$

Stąd $\frac{3}{4} w(f) \leq w(f^*)$, czyli

$$w(f) \leq \frac{4}{3} w(f^*)$$

c.n.d.

$\boxed{\text{Ćw}}$?

Można pokazać, że dla przepustowości kwadratowych (ax^2+bx+c) można pogorszyć co najwyżej 2 razy.

Trzeba wykorzystać nierówność

$$xy^2 \leq x^3 + \frac{y^3}{2} \qquad y = kx$$

$$\Updownarrow$$

$$k^2 \leq 1 + \frac{k^3}{2}$$

$$\Updownarrow$$

$$2k^2 \leq k^3 + 2$$

$$\frac{\frac{k^3}{2} + \frac{k^3}{2} + 2}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{k^6}{4} \cdot 2} = k^2 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \qquad \text{(średnie)}$$

$$\Downarrow$$

$$k^3 + 2 \geq k^2 \cdot 3\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}} \geq k^2 \cdot 2$$

$$3\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}} \geq 2$$

$$\Updownarrow$$

$$\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}} \geq \frac{2}{3} \quad /()^3$$

$$\frac{1}{2} \geq \frac{8}{27} \quad \checkmark$$

Teraz drugi ciekawszy wynik.

<u>Tw.</u>

Koszt r.N. dla przepływu r jest ≤ niż koszt optymalnego rozwiązania dla przepływu 2r.

<u>D-d</u>

Niech f to r.N., a f^* to optymalne rozwiązanie. Chcemy, by $C(f) \le C(f^*)$.

Wprowadźmy funkcję $\bar{l}$, która przybliża oryginalną przepustowość l.

$$\bar{l}_e(x) = \begin{cases} l_e(f_e) & \text{jeśli } x \le f_e \\ l_e(x) & \text{jeśli } x > f_e \quad (\text{albo } x \ge f_e) \end{cases}$$

Mamy $\sum_{e \in E} \bar{l}_e(f_e^*) f_e^* - C(f^*) =$

$$= \sum_{e \in E} \bar{l}_e(f_e^*) f_e^* - \sum_{e \in E} l_e(f_e^*) f_e^* =$$

$$= \sum_{e \in E} f_e^* \left(\bar{l}_e(f_e^*) - l_e(f_e^*)\right) \le$$

$$\le \sum_{e \in E} l_e(f_e) f_e = C(f)$$

bo $x(\bar{l}_e(x) - l_e(x)) \le f_e \cdot l_e(f_e)$, bo

$\bar{l}_e(x) - l_e(x) = 0$ dla $x \ge f_e$, a poniżej jest $\le l_e(f_e)$

Czyli jak zmieniamy z l_e na $\bar{l}_e$, to dodajemy co najwyżej $C(f)$, niezależnie jak duży jest przepływ.

Jeśli f_0 to przepływ zerowy, to

$$\bar{l}_p(f_0) \geq L_i(f)$$ dla każdej ścieżki z $\mathcal{P}_i$, z def.

suma po krawędziach

Ponieważ $\bar{l}_p$ jest niemalejące, to

$$\bar{l}_p(f^*) \geq L_i(f) \quad \forall_{p \in \mathcal{P}_i}$$

Zatem

$$\sum_p \bar{l}_p(f^*) f_p^* \geq \sum_i \sum_{p \in \mathcal{P}_i} L_i(f) f_p^*$$

$$= \sum_i L_i(f)\, 2r_i = 2C(f)$$

Zatem $$C(f^*) \geq \sum_{e \in E} \bar{l}_e(f_e^*) f_e^* - C(f)$$

$$\geq 2C(f) - C(f) = C(f)$$

c.n.d.

Analogicznie jeśli zwiększymy przepływ $(1+\gamma)$ razy, to

$$C(f^*) \geq \gamma\, C(f).$$