Algorytmiczne Aspekty Teorii Gier

Zadania domowe

Semestr letni 2009

1. Pebbling game (do 16.03.2009) Dla dowolnego n znaleźć taki DAG G o stopniu wejściowym równym 2 i taki wierzchołek v w G, żeby w grze Pebbling game (wersji zdefiniowanej na ćwiczeniach) położenie kamienia na wierzchołku v wymagało użycia przynajmniej rzędu $\sqrt{n}$ kamieni. Można założyć, że trzeba użyć przynajmniej $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$ kamieni.
Uwaga: Należy dowieść, że znaleziony graf posiada opisywaną własność.

Pytania dodatkowe
Czy znaleziony graf jest optymalny, czyli, czy da się znaleźć grafy o większej (asymptotycznie, ale choćby o stałą) złożoności kamiennej? Jakie jest optymalne oszacowanie, jakie grafy je realizują?

2. Rozstrzygalność problemu dla $FO(\leqslant)$ (do 23.03.2009) Wykazać, że istnieje algorytm, który dla formuły φ pierwszego rzędu z relacją $\leqslant$ rozstrzyga, czy ta formuła jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej n w strukturze $(\langle 1, 2, \ldots, n \rangle, \leqslant)$, gdzie porządek w tej strukturze jest naturalnie zdefiniowanym porządkiem liniowym.

3. Nieskończony xor (do 30.03.2009) Wykazać, że istnieje funkcja $f : \{0,1\}^\omega \to \{0,1\}$ przyporządkowująca nieskończonemu ciągowi zero-jedynkowemu 0 lub 1 taka, że dla każdego $x \in \{0,1\}^\omega$ zachodzi $f(x) \neq f(x \oplus e_i)$, gdzie przez e_i oznaczamy ciąg złożony z samych zer oraz jedynki na i-tym miejscu, a przez $\oplus$ xora oraz taka, że samym zerom przyporządkowuje 0.

Wskazówka
Użyć lematu Kuratowskiego-Zorna lub pewnika wyboru.

4. Moc zbioru funkcji (do 20.04.2009) Oblicz moc zbioru funkcji $f : \{0,1\}^\omega \to \{0,1\}$ takich, że spełniają one trzy warunki:

- $f(000\ldots) = 0$
- dla każdego $x \in \{0,1\}^\omega$ zachodzi $f(x) \neq f(x \oplus e_i)$
- dla każdych $x, y \in \{0,1\}^\omega$ zachodzi $f(x \oplus y) = f(x) \oplus f(y)$, gdzie przez pierwszy $\oplus$ rozumiemy xora na nieskończonych ciągach, a przez drugi $\oplus$ zwykły xor bitowy.

5. Gry parzystości o ograniczonym zbiorze ranków (do 20.04.2009) Grę parzystości (przypomnienie) na skończonym grafie gry $G = (V, E)$ definiujemy następująco. Grają gracze Even i Odd. Dodatkowo dana jest funkcja $rank : V \to \mathbb{N}$ przyporządkowująca każdemu wierzchołkowi rank. Zakładamy, że z każdego wierzchołka istnieje ruch wychodzący, czyli każda rozgrywka jest nieskończona. Rozważmy nieskończoną rozgrywkę $v_0 v_1 v_2 \ldots$. Przez $\limsup_{n \to \infty} rank(v_n)$ oznaczymy największy rank, który wystąpił nieskończenie wiele razy na rozgrywce. Gracz Odd wygrywa, gdy liczba ta jest nieparzysta, gracz Even w przeciwnym przypadku.

Zadanie
Dla gier parzystości o liczbie ranków ograniczonej przez $m \in \mathbb{N}$ znajdź algorytm rozwiązujący (czyli dla każdego wierzchołka odpowiadający na pytanie, który z graczy posiada strategię wygrywającą z tego wierzchołka) te gry parzystości w czasie $O(|V|^{f(m)})$, gdzie $f(m)$ jest funkcją liniową (zapewne prawie $f(m) = m$). Zauważmy, że wiemy już, że gry parzystości są zdeterminowane, nie trzeba tego dowodzić.

6. Równowaga Nasha w strategiach czystych (do 27.04.2009) Rozważmy grę trzech graczy, w której każdy z graczy ma n strategii. Jest to gra w formie macierzowej, posiada n^3 pól, w każdym polu trzy liczby - wypłaty dla odpowiednich graczy. Wszystkie $3n^3$ liczb losujemy niezależnie z rozkładem jednostajnym z przedziału $[0, 1]$. Oszacować z dołu przez $f(n)$ prawdopodobieństwo tego, że w rozważanej grze istnieje równowaga Nasha w strategiach czystych. Oszacowanie ma być takie, by

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = C,$$

gdzie $C \in \mathbb{R}$ dostatecznie duże (co znaczy dostatecznie duże to już zależy tylko od mojego uznania, ale zdecydowanie ma to być więcej niż 0).

7. Ilość równowag Nasha (do 4.05.2009) Rozważmy grę dwóch graczy, w której każdy z graczy ma dostępnych dokładnie n strategii czystych. Gra ta jest opisana przez macierz wypłat, w każdym z $n \times n$ pól macierzy wpisane są wypłaty dla obu graczy. Zauważmy, że każdej równowadze Nasha (nawet ogólniej, każdej parze strategii) możemy przyporządkować parę liczb (A, B) taką, że A to oczekiwany zysk gracza pierwszego, a B to oczekiwany zysk gracza drugiego przy wyborze właśnie tych strategii. Rozstrzygnąć jak duża może być moc zbioru równowag Nasha w **strategiach czystych** w powyższej grze, by dla każdych dwóch równowag z tego zbioru (nie muszą to być wszystkie równowagi w tej grze) pary liczb im przyporządkowane były różne (choć jedna z liczb była różna).

8. Strategie mieszane dyskretne (do 18.05.2009) Rozważmy grę w aukcję. Gra n graczy, gracze są ponumerowani, licytują oni pewien obiekt. Każdy z graczy przed grą wycenia obiekt, gracz i-ty twierdzi, że dla niego wartość obiektu wynosi v_i, przy czym zachodzą nierówności $v_1 > v_2 > \ldots > v_n$.

Następnie ma miejsce licytacja, każdy z graczy równocześnie podaje kwotę a_i, którą jest w stanie zapłacić. Licytację wygrywa gracz o najmniejszym numerze z tych, którzy podali największą stawkę. Zysk gracza wynosi 0, jeśli nie kupił on obiektu, bądź $v_i - a_i$ jeśli go kupił.

Zdefiniujmy strategię mieszaną dyskretną: gracz wybiera pewną liczbę $M \in \mathbb{N}$, M liczb $c_1, \ldots, c_M$ i pewien rozkład na tych liczbach $\langle p_1, \ldots, p_M \rangle$. W szczególności każda strategia czysta jest strategią mieszaną dyskretną, gdzie $M = 1$.

Rozstrzygnąć, czy w każdej równowadze Nasha w strategiach mieszanych dyskretnych obiekt kupuje gracz numer 1 (z prawdopodobieństwem 1).

9. Gra bisymulacyjna (do 1.06.2009) Niech $\mathcal{G}_1$ i $\mathcal{G}_2$ będą dwiema grami parzystości. Grą bisymulacyjną $\mathcal{G}_1 \otimes \mathcal{G}_2$ nazwiemy grę dwóch graczy, Duplicatora i Spoilera. Gra rozpoczyna się w parze wierzchołków (u_0, v_0), gdzie u_0 jest wierzchołkiem w grze $\mathcal{G}_1$, a v_0 w grze $\mathcal{G}_2$ oraz są one wierzchołkami tego samego gracza (wpp. mówimy, że Spoiler od razu wygrał). Spoiler zaczyna, wybiera grę ($\mathcal{G}_1$ lub $\mathcal{G}_2$) i rusza się w tej grze (idzie po pewnej krawędzie). Następnie Duplicator rusza się w drugiej grze (idzie po krawędzi), tak, by docelowe wierzchołki u_1 i v_1

były wierzchołkami tego samego gracza, jeśli nie ma takiego ruchu, to wygrywa Spoiler. W ten sposób gra toczy się w nieskończoność (Spoiler wybiera grę i rusza się, Duplicator musi odpowiednio odpowiedzieć).

Duplicator wygrywa jeśli rozgrywki $u_0u_1u_2\ldots$ w $\mathcal{G}_1$ oraz $v_0v_1v_2\ldots$ w $\mathcal{G}_2$ są wygrywające dla tego samego gracza, wpp. wygrywa Spoiler.

Udowodnić, że jeśli w grze $\mathcal{G}_1 \otimes \mathcal{G}_2$ z wierzchołka (u, v) wygrywa Duplicator, to w grze $\mathcal{G}_1$ z wierzchołka u wygrywa ten sam gracz (Odd lub Even) co w grze $\mathcal{G}_2$ z wierzchołka v.