Algorytmiczne Aspekty Teorii Gier

Ćwiczenia 9

20 kwietnia 2009

1. Moc zbioru funkcji. Ktoś pokazuje rozwiązanie zadania domowego **Moc zbioru funkcji**. Wynikiem jest $2^{\mathfrak{C}}$. Najpierw dzielimy zbiór $\{0,1\}^\infty$ na klasy abstrakcji $\sim$, gdzie $\sim$ utożsamia elementy różniące się na skończenie wielu bitach. Później patrzymy na ilu klasach abstrakcji możemy niezależnie zadać wartość (0 lub 1). Wychodzi, że na $\mathfrak{C}$ klasach, czyli ilość dobrych funkcji xor jest równa $2^{\mathfrak{C}}$.

Postaram się tutaj wrzucić link do dobrego rozwiązania.

2. Gry parzystości o skończonej liczbie ranków. Ktoś pokazuje rozwiązania zadania domowego **Gry parzystości o skończonej liczbie ranków**. Znalezienie szukanego algorytmu jest dalece niebanalne. Rozwiązania bazują zwykle na wykorzystywaniu atraktorów, eliminowaniu kolejno największych ranków i rozważaniu mniejszych gier.

Postaram się również tutaj wrzucić link do dobrego rozwiązania.

3. Gra o sumie zerowej. Przy okazji zadania z ćwiczeń nr 8 wyszedł następujący problem.

Rozstrzygnąć, czy dla gier dwóch gracz o sumie zerowej istnieje dokładnie jedna równowaga Nasha.

Dla każdej pary strategii naturalnie definiuje się wartość gry przy tej parze strategii (oczekiwany zysk dla powiedzmy gracza pierwszego). Gdy pierwsze zostanie rozstrzygnięte dodajemy pytanie: czy może się zdarzyć, że istnieją dwie równowagi Nasha, które dają różne wartości gry.

Pewnym nawiązaniem do tego zadania jest zadanie domowe nr 7, który analizuje trochę podobną sytuację dla ogólnych gier dwóch graczy (nie tylko o sumie zerowej).

Wskazówki

- Nie, to nieprawda, chociażby w grze, w której gracz pierwszy zawsze wygrywa stałą wartość $C \in \mathbb{R}$ dowolny wybór strategii jest równowagą Nasha.
- Dodajemy pytanie drugie - czy mogą być dwie równowagi, które dają różne wartości gry.
- Spróbujmy najpierw rozwiązać to pytanie w wersji uproszczonej, czy może się zdarzyć, że istnieją dwie równowagi Nasha w strategiach czystych o tej własności.
- Nie, nie może się zdarzyć. Przypuśćmy, że są to równowagi (a_1, b_1) oraz (a_2, b_2), gdzie a_1, a_2 to strategie gracza A, analogicznie b_1, b_2 strategie gracza B. Przez $f(a, b)$ oznaczmy wartość gry dla strategii a oraz b. Niech A chce zmaksymalizować wypłatę, B zminimalizować (tak jakby B płacił A tę kwotę). Aby punkty (a_1, b_1) i (a_2, b_2) były równowagami Nasha muszą być spełnione odpowiednio nierówności: $f(a_1, b_2) \geqslant f(a_1, b_1) \geqslant f(a_2, b_1)$ oraz $f(a_2, b_1) \geqslant f(a_2, b_2) \geqslant f(a_1, b_2)$. Zauważmy, że po połączeniu te cztery nierówności układają się w kółko, więc muszą być równościami, z czego otrzymujemy $f(a_1, b_1) = f(a_2, b_2)$.
- Teraz pytanie jak to uogólnić na strategie mieszane.
- Dokładnie to samo piszemy dla strategii mieszanych, zamieńmy tylko powiedzmy strategie gracza A na σ_1, σ_2, a strategie gracza B na τ_1, τ_2, by wyglądało bardziej na strategie mieszane.

- Pokazanie, że wszystkie równowagi Nasha w grze o sumie zerowej dają tę samą wartość gry usprawiedliwia trochę to, co zrobiliśmy w zadaniu z Barmanem - wzięliśmy pewną równowagę Nasha i na niej prowadziliśmy obliczenia.