Algorytmiczne Aspekty Teorii Gier

Ćwiczenia 8

6 kwietnia 2009

1. Barman. Można opowiedzieć historię zadania. Marcin Jurdziński bodajże opowiedział ją kiedyś na Gamesach przy okazji zakładając się, obiecał temu, kto zgadnie rozwiązanie 2 drinki. Michał Strojnowski zgadł. Ja zrobiłem podobne zakłady, każdy mógł obstawić jeden wynik, z tych jeszcze nie zajętych.

Barman proponuje klientowi zakład. Barman obstawia jedną z dwóch liczb 1 lub 2. Podobnie klient. Jeśli klient trafi tę samą liczbę k, którą obstawia barman, to barman stawia klientowi k drinków (czyli jeden albo dwa). W przeciwnym razie klient nie dostaje żadnego drinka, ale płaci za x drinków. Pytanie brzmi: dla jakiego x ta gra jest sprawiedliwa.

Wskazówki

- Można zrobić tak, że teraz rozpocząć obstawianie, a w międzyczasie zrobić zadania 2 oraz 3. Dopiero potem rozwiązać to zadanie. Ja tak zrobiłem.
- Trzeba się zastanowić co to znaczy, że gra jest sprawiedliwa.
- Powinno być tak, że średnia wypłata wynosi 0. Pytanie - w jakiej sytuacji. Sensownie jest założyć, że ta sytuacja to równowaga Nasha. Raczej nie ma co wdawać się w dyskusje, czy to jest naprawdę naturalna sytuacja do której zbiegamy i w jakim sensie.
- Każdy z graczy ma dwie strategie, pierwszą - obstawianie 1 oraz drugą - ostawianie 2. Niech Barman obstawia 1 z prawdopodobieństwem p, a klient z prawdopodobieństwem q.
- Zauważmy, że jeśli $((p, 1-p), (q, 1-q))$ to równowaga Nasha (niekoniecznie w strategiach czystych), to każdy z graczy może zmienić swoją strategię na którąś ze strategii czystych występujących z niezerowym prawdopodobieństwem w jego aktualnej strategii mieszanej i wówczas wynik gry będzie taki sam. Oczywiście może nie być to równowaga Nasha i potem może gra pójść w jakimś dziwnym kierunku. Jest to fakcik z wykładu.
- Chcemy więc, żeby wartość gry, gdy klient obstawi pierwszą strategię była równa wartości, gdy klient obstawi drugą. Prowadzi to do równania $1 \cdot p + (-x) \cdot (1-p) = (-x) \cdot p + 2 \cdot (1-p)$.
- Czy mamy jeszcze jakieś równanie?
- Tak, wartość gry ma być równa 0, bo gra jest sprawiedliwa, czyli do powyższych równości dopisujemy $= 0$.
- Wychodzi z tego, że $x = \sqrt{2}$.
- A co byłoby w ogólności, gdy zamiast 1 i 2 wstawimy a i b?
- Wyjdzie podobnie $\sqrt{ab}$, można to nietrudno pokazać, bo musi być

  $$-xp + b(1-p) = ap - x(1-p) = 0 \qquad (1)$$

  z czego wynika $0 = ap - x(1-p) \stackrel{(1)}{=} (ap - x(1-p)) \cdot \frac{b}{-x} + p(\frac{ab}{x} - x) = 0 + p(\frac{ab}{x} - x)$, czyli $ab = x^2$, co daje $x = \sqrt{ab}$.

2. Gra trzech graczy. Niech $Pos = Pos_0 \cup Pos_1 \cup Pos_2$, gdzie Pos_i są rozłączne. Rozważamy grę trzech graczy, którzy nazywają się 0, 1 i 2. Pos_i to pozycje gracza i dla $i = 0, 1, 2$. Z każdego wierzchołka istnieje przynajmniej jeden ruch, czyli każda rozgrywka jest nieskończona. Gracz i wygrywa rozgrywkę $\pi = (p_0, p_1, p_2, \ldots)$, gdy $\limsup_{n\to\infty} rank(p_n) = i \pmod 3$, czyli gdy największy rank występujący nieskończenie często daje resztę i modulo 3. Rozstrzygnąć, czy jest prawdą, że dla każdej pozycji jeden z graczy posiada z tej pozycji strategię wygrywającą (czyli, czy gra jest zdeterminowana).

Wskazówki

- Trzeba sprawdzić, czy gracz może wygrać jeśli pozostali dwaj sprzymierzą się przeciwko niemu.
- To nie jest gra zdeterminowana, spróbować znaleźć kontrprzykład.
- Może być na przykład taki: 3 wierzchołki, z każdego da się przejść do każdego innego, ale do siebie nie, pierwszy jest gracza nr 0 i ma rank 0, drugi jest gracza nr 1 i ma rank 1, a trzeci jest gracza nr 2 i ma rank 2. Wówczas żaden z graczy nie jest w stanie zatrzymać gry w swoim wierzchołku, a wtedy przegrywa.

3. Algorytm dla gry trzech graczy. Zaprojektować algorytm, który rozstrzyga dla każdego wierzchołka, czy któryś gracz posiada z niego strategię wygrywającą, a jeśli tak, to który. Załóżmy, że możemy używać jako podalgorytmu algorytmu rozwiązywania gry parzystości.

Wskazówki

- Trzeba się zastanowić kiedy gracz ma strategię przeciwko dwóm pozostałym graczom grającym wspólnie.
- Można połączyć pozostałych graczy w jednego gracza.
- Zredukować do gry parzystości.
- Dla każdego wierzchołka sprawdzamy, czy gracz i może z niego wygrać, gdzie i przebiega zbiór $\{0, 1, 2\}$. Dla gracza i łączymy pozostałych dwóch i modyfikujemy ranki. Konkretnie - wierzchołki gracza i dajemy graczowi Odd, wierzchołki pozostałych graczy dajemy graczowi Even. Ranki zmieniamy następująco $3n+i \mapsto 2n+1$ oraz $3n+j \mapsto 2n+2\cdot\mathbb{1}_{\{j>i\}}$ dla $j \in \{0,1,2\} \setminus \{i\}$, czyli dla pozostałych graczy (gdzie $\mathbb{1}_X$ to funkcja zwracająca 1 na zbiorze X, a 0 wpp.). Wówczas w pierwotnej grze wygrywał gracz i wtedy i tylko wtedy, gdy w drugiej grze, grze parzystości wygrywa gracz Odd.

4. Czyste równowagi Nasha. Rozważmy grę dwóch graczy daną w formie macierzowej, gdzie każdy z graczy posiada n strategii czystych. Załóżmy, że wypłaty dla każdego gracza w każdej z n^2 pól macierzy są wybrane niezależnie z rozkładem jednostajnym na $[0, 1]$. Oszacować od dołu prawdopodobieństwo, że ta losowa gra będzie miała równowagę Nasha w strategiach czystych.

Kontynuacją tego zadania może być zadanie, które zostało zapisane jako zadanie domowe numer 6.

Wskazówki

- Najpierw można postrzelać ile to mniej więcej będzie dla $n = 1000$. Ciekawie będzie później porównać wynik ze strzałami.

- Zastanówmy się co wystarczy, żeby było spełnione, by istniała czysta równowaga Nasha.

- Oznaczmy strategie gracza A przez $a_1, \ldots, a_n$, a gracza B przez $b_1, \ldots, b_n$. Wystarczy żeby istniały dwie strategie a_i oraz b_j, które są wzajemnie dla siebie najlepsze. Czyli $f_A(a_i, b_j) \geqslant f_A(a_k, b_j)$ dla dowolnego k oraz $f_B(a_i, b_j) \geqslant f_B(a_i, b_k)$ dla dowolnego k, gdzie przez f_A i f_B oznaczamy zyski odpowiednio graczy A i B przy ustalonych strategiach.

- Spójrzmy na sytuację z punktu widzenia gracza A (załóżmy, że wybiera on wiersze). Spójrzmy na pierwszy wiersz od góry, czyli strategię a_1. Przy ustalonej strategii a_1 pewna strategia b_{i_1} jest najlepsza dla gracza B. Jeśli jeszcze strategia a_1 jest najlepsza dla gracza A przy ustalonej strategii b_{i_1} gracza B, to mamy czystą równowagę Nasha. Prawdopodobieństwo tego wynosi $\frac{1}{n}$. Zatem prawdopodobieństwo, że nie znaleźliśmy jeszcze równowagi wynosi $1 - \frac{1}{n}$.

- Spójrzmy teraz na drugi wiersz. Przy ustalonej strategii a_2 pewna strategia b_{i_2} jest najlepsza dla gracza B, pytanie, czy a_2 jest najlepsza dla A przy ustalonej b_{i_2}. Policzmy prawdopodobieństwo, że tak jest. Może być tak, że $b_{i_1} \neq b_{i_2}$ i wówczas wynosi ono $\frac{1}{n}$, w przeciwnym wypadku, gdy $b_{i_1} = b_{i_2}$, to wiemy, że a_1 nie jest najlepsza dla A przy ustalonej strategii gracza B $b_{i_1} = b_{i_2}$, czyli prawdopodobieństwo, że b_2 jest najlepsza wynosi $\frac{1}{n-1}$. My jednak nie chcemy dokładnie liczyć tego prawdopodobieństwa, wystarczy, że jest ono nie mniejsze niż $\frac{1}{n}$, czyli po drugim rzędzie zostajemy bez znalezionej równowagi Nasha w strategiach czystych z prawdopodobieństwem nie większym niż $(1 - \frac{1}{n})^2$.

- Podobnie jest dla każdego następnego wiersza, jeśli strategie gracza B powtarzają się, to wiemy, że te rozważane już wcześniej strategie gracza A nie były najlepsze, więc zwiększa się prawdopodobieństwo, że aktualna jest najlepsza. Zatem po rozważeniu wszystkich n wierszy prawdopodobieństwo, że nie mamy równowagi Nasha wynosi nie więcej niż $(1 - \frac{1}{n})^n$. Liczba ta dąży przy n dążącym do nieskończoności do $\frac{1}{e}$. Zatem dla dużych n dolne oszacowanie na znalezienie równowagi w strategiach czystych dąży do $1 - \frac{1}{e}$ (choć być może nie jest to najlepsza stała).