Algorytmiczne Aspekty Teorii Gier

Ćwiczenia 6

23 marca 2009

1. Rozstrzygalność problemu dla $FO(\leqslant)$. Ktoś pokazuje rozwiązanie zadania domowego **Rozstrzygalność problemu dla $FO(\leqslant)$**. W skrócie chodzi o to, że dla konkretnego k aby sprawdzić czy formuła φ jest spełniona w $(\langle 1, 2, \ldots, k \rangle, \leqslant)$ wystarczy brutalnie przeszukać całą przestrzeń możliwości. Drugie spostrzeżenie to fakt, że dla formuły φ o randze kwantyfikatorowej m wystarczy sprawdzić modele dla k od 1 do około 2^m, dalej już jest tak samo.

2. Topologia, teoria. Najpierw wstęp. Gry mają dużo wspólnego z topologią, w szczególności używając topologii możemy pokazywać, że pewne gry są z pewnością zdeterminowane. Z doświadczenia wiemy, że gry (dla ruchów naprzemiennych) niezdeterminowane są zwykle jakieś skomplikowane, a proste gry są zwykle zdeterminowane. By sformalizować tę intuicję sięgniemy do topologii.

Najpierw trzeba zdefiniować przestrzeń. Rozważmy grę nieskończoną na arenie X (arena to zbiór możliwych pozycji). Zauważmy, że każdą grę skończoną możemy przeformułować do równoważnej gry nieskończonej po prostu dodając dwa zapętlone stany: przegrana Ewy i przegrana Adama i ze stanów, z których nie ma już wyjścia dodać przejścia do odpowiedniego z tych stanów. Możemy więc zakładać, że wszystkie rozgrywki są nieskończone, czyli są nieskończonymi ciągami pozycji z X, czyli innymi słowy należą do zbioru X^ω. Tak, jak to w grach nieskończonych, aby powiedzieć kiedy który gracz wygrywa musimy określić zbiór W rozgrywek wygrywających dla (powiedzmy) Ewy. Określamy zatem $W \subseteq X^\omega$. Zauważmy, że w tej sytuacji zbiór W mówi wszystko o warunku wygrywającym. Będziemy mówić, że gra jest skomplikowana, jeśli zbiór W jest skomplikowany i przeciwnie. W tym celu jednak, aby powiedzieć kiedy zbiór W jest skomplikowany musimy zdefiniować topologię (czyli powiedzieć które zbiory uważamy za otwarte w X^ω), a wcześniej w tym celu zdefiniować odległość na rozgrywkach, czyli elementach X^ω. Zauważmy, że to, co my teraz robimy to tak naprawdę są rozważania dotyczące języków słów nieskończonych nad alfabetem X, właściwie lepiej byłoby nawet tymi pojęciami operować.

Niech $s, t \in X^\omega$. Wówczas definiujemy odległość między s i t jako $\delta(s,t) = \frac{1}{2^k}$, gdzie k to indeks pierwszej różnicy w ciągach s i t. Czyli na przykład $\delta(0100\ldots, 0101\ldots) = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$. Gdy już mamy odległość (metrykę), to możemy zdefiniować co uważamy za zbiory otwarte i domknięte. Zbiór G jest *otwarty*, gdy dla dowolnego $x \in G$ istnieje takie $r > 0$, że kula o środku w x i promieniu r jest zawarta w G (innymi słowy jeśli jakiś punkt leży w zbiorze otwartym, to leży tam również pewne jego otoczenie, jest to zgodne z naszą intuicją z prostej rzeczywistej). Zbiór F jest *domknięty*, gdy dla dowolnego ciągu zbieżnego $x_1, x_2, \ldots$ jeśli dla każdego i punkt x_i leży w F, to również granica tego ciągu leży w F. Zbiory domknięte są dopełnieniami zbiorów otwartych. Zbiory otwarte i domknięte to w pewnym sensie przyzwoite zbiory.

Pytanie pomocnicze: czym w rozważanej metryce będzie kula o środku w $x_0 x_1 x_2 \ldots$ i promieniu równym $\frac{1}{2^n}$. Odpowiedź: będzie ona zawierała wszystkie ciągi o prefiksie $x_0 x_1 \ldots x_n$.

Przyjrzyjmy się trochę dokładniej strukturze przyzwoitych zbiorów. Suma (dowolna) zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym, podobnie przecięcie zbiorów domkniętych. Przecięcie skończone zbiorów otwartych jest otwarte, jednak już przecięcie przeliczalne zbiorów otwartych może otwarte nie być (przykładem niech będzie rodzina odcinków $(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$, których przecięciem jest

$\{0\}$). Przecięcie przeliczalnej rodziny zbiorów otwartych nazwiemy zbiorem typu G_δ, inaczej Π^0_2, sumę przeliczalnej rodziny zbiorów domkniętych zbiorem typu F_σ, inaczej Σ^0_2. Można iść dalej, przeliczalne przecięcia zbiorów typu Π^0_2 są Π^0_2, ale sumy już nie, są to zbiory Σ^0_3. Idąc dalej po pewnej liczbie kroków (równej pewnej liczbie porządkowej) otrzymamy wszystkie zbiory borelowskie. Powiemy, że klasa zbiorów *borelowskich* to najmniejsza klasa zbiorów zawierająca zbiory otwarte oraz zamknięta na przeliczalne sumy i dopełnienie (z tego już wynika zamkniętość na przeliczalne przecięcia). Właśnie zbiory borelowskie będą naszymi zbiorami przyzwoitymi. Całą tę teorię wprowadzaliśmy, by móc sformułować twierdzenie Martina (udowodnione w roku 1975), mówiące, że

Twierdzenie Martina (1975)
Każda gra borelowska (czyli z borelowskim zbiorem W definiującym warunek wygrywający) jest zdeterminowana.

Dowodzić tego twierdzenia nie będziemy, dowód jest zapewne porządnie skomplikowany, jednak korzystając z niego możemy łatwo pokazywać determinację (będącą bardzo przydatną cechą gier) dla naprawdę wielu gier.

Przejdźmy do zadań.

3. Czy zbiory domknięte są G_δ Rozstrzygnij, czy w rozważanej przestrzeni z rozważaną metryką każdy zbiór domknięty jest typu G_δ.

Wskazówki

- Przypomnijmy sobie przykład z odcinkami, których przecięcie było punktem $\{0\}$
- Czy można podobną konstrukcję zrobić z dowolnym zbiorem domkniętym?
- Tak.
- Oznaczymy $\delta(x, F) = \inf_{y \in F} \delta(x, y)$. Niech $F_\varepsilon = \{x : \delta(x, F) < \varepsilon\}$. Zbiór F_ε jest otwarty dla dowolnego ε. Zauważmy, że $F = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_{\frac{1}{n}}$. Zatem dowolny zbiór domknięty jest przecięciem przeliczalnej rodziny zbiorów otwartych, czyli zbiorem typu G_δ.
- A gdzie tu była wykorzystana domkniętość zbioru F?
- W tym, że $F = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_{\frac{1}{n}}$, bo jeśli pewien punkt jest dowolnie blisko zbioru domkniętego, to jest też w nim.

4. Charakteryzacja zbiorów otwartych. Udowodnić, że następujące warunki są równoważne dla języka $L \subseteq X^\omega$

- L jest otwarty
- istnieje zbiór $M \subseteq X^*$ (gdzie przez X^* rozumiemy zbiór wszystkich słów skończonych nad X) taki, że $L = \bigcup_{v\in M} vX^\omega$, przy czym możemy M wybrać tak, by był antyłańcuchem (antyłańcuchem nazywamy zbiór, w którym żadne dwa elementy nie są porównywalne, tu względem relacji bycia prefiksem). Przez vX^ω rozumiemy wszystkie słowa rozpoczynające się prefiksem v.

Wskazówki

- Najpierw zróbmy implikację w lewo.
- Zauważmy, że każdy zbiór vX^ω jest otwarty (łatwo pokazać wprost, lub argumentując, że jest kulą). Zatem zbiór L jest otwarty jako suma kul.
- Teraz implikacja w prawo, nieco trudniejsza, trzeba jakoś zdefiniować ten zbiór M.
- Zauważmy, że ponieważ zbiór L jest otwarty, to dla każdego słowa u istnieje pewne otoczenie, z którym on razem siedzi w L. Czyli istnieje taki indeks n_u, że $(u|n_u)X^\omega \subseteq L$, gdzie przez $u|n$ oznaczymy obcięcie słowa u do pierwszych n liter.
- Gdy wysumujemy te słowa po wszystkich u, to otrzymamy żądany zbiór M, czyli $M = \{u|n_u : u \in L\}$. Gdy jeszcze weźmiemy minimalne takie n_u dla każdego u, to otrzymamy M będące antyłańcuchem.

5. Gra n-ty stan ustalony. Rozważmy grę między Adamem, a Ewą na grafie gry, rozmiaru co najwyżej przeliczalnego, w której Ewa wygrywa rozgrywkę, gdy rozgrywka w n-tym ruchu będzie w stanie q, gdzie n oraz $q \in X$ są ustalone. Czy rozważana gra jest zdeterminowana? Rozstrzygnąć to opisywanymi wyżej metodami.

Wskazówki

- Spróbujmy rozstrzygnąć, czy rozważany warunek wygrywający jest borelowski.
- Pokażmy, że jest on otwarty.
- Jest on tak naprawdę sumą kul - dowolny prefiks $n-1$ literowy, na n-tej współrzędnej litera q, a potem wszystko jedno. Jako suma kul jest to zbiór otwarty, czyli gra z twierdzenia Martina jest zdeterminowana.

6. Gra przechodząca przez ustalony stan. Rozważmy grę między Adamem, a Ewą na grafie gry podobnie jak poprzednio. Ewa wygrywa, gdy rozgrywka kiedykolwiek przejdzie przez ustalony stan q. Rozstrzygnąć, czy rozważana gra jest zdeterminowana.

Wskazówki

- Skorzystać z poprzedniego zadania.
- Niech Q_n - zbiór określający, że n-ty stan to q. Wiemy, że Q_n otwarty. My rozważamy zbiór $Q = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Q_n$, mówiący, że nasza rozgrywka w pewnym stanie jest w q, czyli należy do pewnego Q_n. Zatem Q jako suma zbiorów otwartych jest otwarty, czyli gra jest zdeterminowana.

7. Gra przechodząca nieskończenie wiele razy przez ustalony stan. Rozważmy grę między Adamem, a Ewą na grafie gry podobnie jak poprzednio. Ewa wygrywa, gdy rozgrywka przechodzi nieskończenie wiele razy przez pewien ustalony stan q. Rozstrzygnąć, czy rozważana gra jest zdeterminowana.

Wskazówki

- Skorzystać z poprzedniego zadania.
- Zapisać warunek wygrywający w postaci kwantyfikatorów.
- Formuła będzie miała postać $\forall_{k \in \mathbb{N}} \exists_{n>k}$ w n-tym ruchu jesteśmy w q.
- Przerobić formułę na przecięcia i sumy zbiorów.
- Dla każdego przerabiamy na przecięcie, istnieje na sumę, więc otrzymujemy $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{n>k} Q_n$, czyli przeliczalne przecięcie sum zbiorów otwartych, czyli zbiór typu G_δ, w każdym razie borelowski, czyli gra jest zdeterminowana.
- W oczywisty sposób jeśli powiemy, że gra ma przechodzić nie przez ustalony stan q nieskończenie wiele razy, ale przez któryś ze zbioru dobrych stanów F nieskończenie wiele razy, to dostajemy alternatywę rozważanych warunków, czyli sumę zbiorów G_δ, czyli zbiór również borelowski. Tak jest zdefiniowana znana gra Büchiego - jeden z graczy wygrywa, gdy rozgrywka przechodzi nieskończenie wiele razy przez któryś z „dobrych" stanów, mówi się na ten warunek warunek Büchiego (zauważmy, że tu trzeba wykorzystać przeliczalność zbioru stanów, bo inaczej suma mogłaby być nieprzeliczalna).

8. Gra parzystości. Zdefiniujmy grę parzystości. Klasa tych gier jest bardzo znana i bardzo szeroko rozważana, w szczególności wielkim problemem otwartym jest, czy istnieje wielomianowy algorytm rozstrzygający dla danej pozycji w grze parzystości, który gracz posiada strategię wygrywającą.

Gra odbywa się na grafie skierowanym $G = (V, E)$, załóżmy, że $|G| < \infty$, choć nie trzeba aż tak mocnego założenia zawsze. Grają gracze Odd i Even, ruszają się na przemian zgodnie z dozwolonymi przejściami w tym grafie. Dodatkowo dana jest funkcja $rank : V \to \mathbb{N}$ przyporządkowująca każdemu wierzchołkowi pewną liczbę naturalną. Gracz Even wygrywa rozgrywkę, jeśli największy rank powtarzający się nieskończenie wiele razy na tej rozgrywce jest parzysty, w przeciwnym wypadku wygrywa gracz Odd. Czyli innymi słowy patrzymy, czy $\limsup rank(v)$ dla v występujących na rozgrywce jest parzysty, czy nieparzysty. Rozstrzygnąć, czy gra ta jest zdeterminowana.

Wskazówki

- Działamy metodą podobną jak poprzednio. Określmy najpierw zbiór, w którym największym występującym rankiem będzie ustalone j.
- Dzielimy zbiór V na zbiory $V_1, V_2, \ldots, V_n$ dla odpowiednich ranków. Niech formuła M_j mówi, że przechodziliśmy nieskończenie wiele razy przez pewien wierzchołek z V_j, a dla wierzchołków z V_k dla $k > j$ nie przechodziliśmy przez nie nieskończenie wiele razy. Taka formuła przekłada się na zbiór borelowski.
- Następnie wystarczy powiedzieć, że poszukiwany zbiór to suma $\bigcup_{1 \leqslant k \leqslant n, 2|k} M_k$.