Algorytmiczne Aspekty Teorii Gier

Ćwiczenia 5

16 marca 2009

1. Pebbling game. Ktoś pokazuje rozwiązanie zadania domowego **Pebbling game**. W tym roku nikt nie znalazł jak na razie lepszego wyniku niż n kamieni potrzebnych do grafu o $\Theta(\frac{n^2}{2})$ wierzchołkach.

2. Determinacja gier. Najpierw przypomnienie faktu z wykładu o tym, kiedy w ogólności mówimy, że gra jest zdeterminowana. Niech S_A zbiór strategii Adama, S_E zbiór strategii Ewy. Zakładamy, że Adam chce zmaksymalizować wynik gry, Ewa chce zminimalizować. Zawsze prawdziwa jest nierówność

$$\max_{a \in S_A} \min_{e \in S_E} \Phi(e, a) \leqslant \min_{e \in S_E} \max_{a \in S_A} \Phi(e, a).$$

Jeśli odpowiednio spojrzymy na tę nierówność, to wyda się ona oczywista. Zauważmy, że prawa strona jest wartością gry, jaką może sobie zapewnić Adam, wybiera strategię $a \in S_A$ taką, że przy tym wyborze najgorsza (dla Adama) strategia Ewy $e \in S_E$ daje w efekcie największą wartość $\Phi(e, a)$. Czyli Adam może zapewnić, że wynik gry będzie nie mniejszy niż lewa strona nierówności. Analogicznie możemy pokazać, że Ewa może zapewnić, że wynik gry będzie nie większy niż prawa strona nierówności. Zatem mamy $L \leqslant$ wynik gry $\leqslant P$ co dowodzi nierówności. Usprawiedliwia to również rozszerzoną definicję determinacji gry, gdy

$$\max_{a \in S_A} \min_{e \in S_E} \Phi(e, a) = \min_{e \in S_E} \max_{a \in S_A} \Phi(e, a),$$

to mówimy, że gra jest zdeterminowana. Jasne - wtedy po prostu wynik gry ma tylko jedną opcję (gdy gracze grają optymalnie), być równy lewej i prawej stronie.

Rozpatrywaliśmy do tej pory cały czas gry z pełną informacją, takie, gdzie

- wynik gry należał do zbioru $\{0, 1\}$ (gracz wygrał, bądź przegrał)
- ruchy wykonywane były naprzemiennie przez graczy, nigdy naraz

Wówczas przykład gry niezdeterminowanej był bardzo skomplikowany, a gry skończone w oczywisty sposób były zdeterminowane. Czy ustąpienie z któregoś z powyższych założeń pozwoli nam na skonstruowanie prostej (w szczególności może skończonej) gry niezdeterminowanej (w nowym sensie, który jest spójny ze starym zresztą)?

Wskazówki

- Najpierw zrezygnujmy z $\Phi(e, a) \in \{0, 1\}$. Co to da?
- Niestety nic, gdy zbudujemy drzewo gry, to wartość drzewa gry jest równa lewej i prawej stronie nierówności, czyli gra jest zdeterminowana.
- Pozwólmy więc na równoległość. Czy to coś da?

- Tak, można skonstruować proste gry niezdeterminowane korzystając z założenia, że gracze mogą się ruszać równolegle. Jedną z takich gier jest gra papier-nożyce-kamień. Można skonstruować zresztą jeszcze prostszą grę, w której Adam ma dwie strategie $a = 0$ oraz $a = 1$, Ewa ma dwie strategie $e = 0$ i $e = 1$, a wynikiem gry jest $e \oplus a$. Wówczas lewa strona to 0, a prawa 1 i gra jest niezdeterminowana. Widać, że równoległość daje bardzo dużo.

Wracamy jednak do gier z naprzemiennymi ruchami.

3. Przykład gry niezdeterminowanej. W tym zadaniu użyjemy istnienia funkcji będącej „nieskończonym xorem”, której to istnienie jest treścią zadania domowego nr 3. Zakładamy więc, że istnieje funkcja $f : \{0,1\}^\omega \to \{0,1\}$ taka, że samym zerom przyporządkowuje wynik równy 0 oraz, że przy zmianie bitu argumentu zmienia się wynik. Używając tej funkcji skonstruuj grę niezdeterminowaną dla dwóch graczy ruszających się na przemian.

Uwaga

Zazwyczaj naturalną propozycją tutaj jest następująca gra. Adam i Ewa ruszają się na zmianę i ich ruch polega na dopisaniu kolejnego bitu, wygrywa Adam, jeśli wynik funkcji f na stworzonym ciągu bitów jest zero, w przeciwnym przypadku Ewa. Nie jest jednak jasne, że zaproponowana gra jest niezdeterminowana, ja przynajmniej nie umiem dowieść, że niezależnie od funkcji f (o ile ma ona własność bycia nieskończonym xorem) jest to prawdą. Błędem, który łatwo tu popełnić jest próba dowodzenia metodą strategy-stealing i skorzystanie implicite z faktu, że $f(x) = f(0x)$, który wcale niekoniecznie jest prawdą (jest on prawdą dla xora skończonego liczącego ilość jedynek).

Wskazówki

- Gracze muszą jakoś ustalać bity.
- Jeśli pada propozycja z uwagi powyżej to usiłujemy skonstruować dowód, pokazuję jaki jest haczyk.
- Ogólnie warto zastosować metodę strategy-stealing, podobnie jak na wykładzie w przykładzie dla ultrafiltrów.
- Problem jaki napotykamy jest taki, że jeśli powiedzmy Adam zrobił ruch, a po nim Ewa zrobiła ruch i doszła do pozycji p, to Adam nie mógł od razu zrobić ruchu takiego, żeby dojść do pozycji p
- Sposobem w jaki możemy to ominąć jest pozwolenie na wybranie dowolnego skończonego ciągu bitów przez gracza. Taka gra jest niezdeterminowana co łatwo pokazać metodą strategy-stealing.

4. Topologia Na tych ćwiczeniach rozpocząłem wprowadzanie topologii w grach, jednak większa część tego działu odbyła się na szóstych ćwiczeniach, w związku z czym opiszę na w odcinku dotyczącym ćwiczeń szóstych.