Algorytmiczne Aspekty Teorii Gier

Ćwiczenia 4

9 marca 2009

1. Gra Ehrenfeuchta-Fraïssè. **Uwaga:** Nie jest pewne, czy warto to robić na ćwiczeniach, wychodzi z tego bardziej wykład niż ćwiczenie, a w dodatku niektórzy ludzie już to znają, jako, że pojawia się czasem na logice na I roku.

W tym ćwiczeniu nie ma jednego konkretnego zadania, będziemy szli po kolei przez zagadnienia dotyczące gier Ehrenfeuchta-Fraïssè. Zobaczymy na tym przykładzie, że gry mogą mieć też istotne zastosowanie w logice.

Ogólny problem jaki rozważamy jest następujący: Czy pewne dwie struktury $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ są rozróżnialne przy pomocy pewnej logiki, czyli, czy istnieje formuła tej logiki, która w jednej z tych struktur jest prawdziwa, a w drugiej fałszywa.
Ponieważ tu chcemy pokazać tylko ideę, to będziemy rozważać logikę pierwszego rzędu z relacją $\leqslant$, czyli $FO(\leqslant)$, a rozważane struktury będą miały postać jedynie $(\langle 1, 2, \ldots, n\rangle, \leqslant)$ dla różnych $n \in \mathbb{N}$, czyli innymi słowy liczby od 1 do n z naturalnym porządkiem liniowym.

Rozważmy przykład, weźmy dwie struktury, $\mathcal{A} = \langle 1, 2, 3\rangle$ oraz $\mathcal{B} = \langle 1, 2, 3, 4\rangle$, implicite zakładamy, że są one z liniowym porządkiem $\leqslant$. Zadajmy pytanie, czy istnieje pewna formuła $FO(\leqslant)$ o randze kwantyfikatorowej (czyli intuicyjnie głębokości najgłębszego kwantyfikatora) równej 3, która rozróżnia podane struktury. Po chwili namysłu dochodzimy do wniosku, że faktycznie, istnieje

$$\exists x\Big(\big(\exists y \exists z\ (x \leqslant y) \wedge (x \leqslant z) \wedge (y \leqslant z)\big) \wedge \big(\exists y\ (y \leqslant x)\big)\Big)$$

A czy istnieje formuła $FO(\leqslant)$ o randze kwantyfikatorowej równej 2 rozróżniająca te struktury? Wydaje się, że nie. Ale jak to pokazać?

Zdefiniujmy grę Ehrenfeuchta-Fraïssè. Zdefiniujemy ją tylko na przykładzie logiki pierwszego rzędu z liniowym porządkiem, ale w bardzo podobny sposób są definiowane analogiczne gry dla innych logik na innych strukturach. Gra dwóch graczy, Duplikator i Spoiler. Jak zwykle, Duplikator ma na celu pokazanie, że coś jest podobne, czyli w naszym przypadku będzie chciał pokazać, że struktury $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ są nierozróżnialne, Spoiler będzie mu przeszkadzał i pokazywał, że jednak da się rozróżnić. Najpierw rusza się Spoiler i kładzie kamień na pewnym elemencie którejś ze struktur (intuicyjnie - mówiąc - a takiego elementu to w tej drugiej strukturze nie znajdziesz Duplikatorze). Potem rusza się Duplikator. Musi położyć kamień w tej strukturze, w której Spoiler nie położył swojego, na pewnym elemencie (intuicyjnie - mówiąc - a właśnie, że nie Spoilerze, ten element jest bardzo podobny do Twojego w tamtej strukturze). Tak Spoiler i Duplikator grają przez n rund. Spoiler co turę może zmieniać strony, nie jest na stałe przywiązany do kładzenie kamieni w konkretnej strukturze. Duplikator kładąc swój kamień musi respektować porządek, czyli jeśli kiedyś Spoiler położył swój kamień na elemencie S_i i Duplikator odpowiedział elementem D_i, a teraz Spoiler położył kamień na S_j, to odpowiedź Duplikatora D_j musi spełniać warunek

$$(S_i \leqslant S_j) \iff (D_i \leqslant D_j),$$

jeśli S_i i S_j są w tej samej strukturze albo

$$(S_i \leqslant D_j) \iff (D_i \leqslant S_j),$$

jeśli S_i i D_j są w tej samej strukturze. Duplikator wygrywa grę, jeśli przetrwa n rund i ciągle będzie miał gdzie położyć kamień w odpowiedzi na ruch Spoilera. Spoiler wygrywa grę, gdy w pewnym momencie Duplikator nie będzie miał odpowiedzi.

Sformułujmy teraz twierdzenie o zdefiniowanej grze.

Twierdzenie Duplikator wygrywa grę Ehrenfeuchta-Fraïssè o n rundach na strukturach $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ wtedy i tylko wtedy, gdy struktury te są nierozróżnialne za pomocą formuł głębokości n w rozważanej logice.

Przeprowadzimy teraz szkic dowodu tego twierdzenia, dla przypadku $FO(\leqslant)$ i porządków liniowych. Dlatego robimy to w tak uproszczonym przypadku, żeby zobaczyć ideę, a nie zamotać się w zbytnich szczegółach technicznych.

Pokażemy równoważność:
istnieje formuła rozróżniająca głębokości n $\iff$ Spoiler wygrywa w n rundach.

Najpierw pokażemy implikację $\Rightarrow$. Pokażemy ją przez indukcję fakt, że jeśli mamy grę z być może już jakimiś kamykami położonymi, to powyższy fakt jest prawdziwy.

Dla głębokości równej 1 łatwo, formuła musi być czymś postaci $\exists x$ i ewidentnie jeśli jest prawdziwa w jednej strukturze, a w drugiej nie, to Spoiler wskaże ten element, który istnieje, a w drugiej strukturze nie istnieje żaden.

Przypuśćmy, że dla n mamy dowiedzioną tezę indukcji. Wiemy teraz, że istnieje formuła rozróżniająca struktury głębokości $n+1$. Można ją rozbić na boolowską kombinację formuł głębokości $n+1$, które zaczynają się od kwantyfikatora, jeśli boolowska kombinacja takich formuł rozróżnia struktury $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$, to któraś z formuł zaczynających się od kwantyfikatora też musi je rozróżniać. Jeśli formuła ta zaczyna się od $\exists x$, to Spoiler stawia kamyk w ten strukturze, w której istnieje taki x na tym właśnie x, Duplikator siłą rzeczy postawi w drugiej strukturze kamyk na elemencie, który nie spełnia tej własności (bo taki tam nie istnieje). Analogicznie, gdy mamy formułę zaczynającą się od $\forall x$, to Spoiler stawia kamyk tam, gdzie nie każdy x to spełnia, na takim, który nie spełnia. Korzystając z założenia indukcyjnego dostajemy tezę (bo warunek na x był głębokości n).

Teraz pokażmy przeciwną implikację $\Leftarrow$. Baza indukcji analogicznie jest prosta. Przypuśćmy, że z n rundowej strategii Spoilera umiemy stworzyć formułę głębokości n. Jeśli Spoiler stawia kamyk na jakimś elemencie, to zaczynamy formułę - $\exists x$. Zauważmy, że teraz obie struktury podzielone są na 2 kawałki, po lewej stronie od położonego kamyka i po prawej stronie. Spoilerowi nie opłaca się grać w obu, gdyż są one niezależne, możemy więc założyć, że dalsza gra będzie się odbywać tylko w jednej z nich. Ponieważ Spoiler jest w stanie wygrać w n rundach w którejś z części, to istnieje formuła φ głębokości n rozróżniająca te części. Zatem nasza ogólna formuła ma (w zależności od tego gdzie φ jest prawdziwa, a gdzie fałszywa) postać

$$\exists x\ \varphi \wedge (x \leqslant y_1) \wedge \ldots \wedge (x \leqslant y_n),$$

lub

$$\exists x\ \neg(\varphi \wedge (x \leqslant y_1) \wedge \ldots \wedge (x \leqslant y_n)),$$

gdzie $y_1, \ldots, y_n$ to zmienne występujące w φ (zakładamy dla ułatwienia, że gra toczyła się w lewej połówce). W ten sposób dowiedliśmy twierdzenia (choć nie do końca formalnie może).
Uwaga: Blisko związane z tym ćwiczeniem jest zadanie domowe nr 2.

2. Gra Banacha-Mazura. Najpierw historia. Banach i Mazur należeli do bardzo aktywnego środowiska przedwojennych matematyków działających we Lwowie. Mieli oni zwyczaj spotykać się wieczorami w kawiarni i w atmosferze imprezy rozwiązywać zadania. Zapisywali je sobie w tak zwanej Księdze Szkockiej, nierzadko z zakładami typu - na tego, kto rozwiąże podane zadanie czeka nagroda w postaci żywej gęsi - bądź inne podobne. Wiele problemów podanych w Księdze Szkockiej i rozwiązanych przez tamtych ludzi okazało się bardzo ważne dla matematyki. W księdze tej między innymi pojawiła się (podobno pierwsza rozważana) gra nieskończona, tzn. gra Banacha-Mazura, sformułował ją Mazur, rozwiązał Banach.

Gra toczy się pomiędzy dwoma graczami, ruszają się oni naprzemiennie, nazwijmy ich, dla ułatwienia, Banach i Mazur (choć w oryginale oczywiście tak nie było). Gra odbywa się na odcinku $[0,1]$. Dany jest pewien wyróżniony zbiór $F \subset [0,1]$. Pierwszy rusza się Mazur i wybiera pewien odcinek otwarty $I_1 \subset [0,1]$. Następnie rusza się Banach i wybiera pewien odcinek otwarty I_2 zawarty w I_1. Dalej gra toczy się analogicznie, gracze wybierają ciąg odcinków $I_1, I_2, \ldots$, taki, że dla każdego k zachodzi $I_{k+1} \subset I_k$ oraz żaden odcinek nie może być pusty. Banach wygrywa, gdy przecięcie wszystkich odcinków i zbioru F jest niepuste, czyli $\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n\right) \cap F \neq \emptyset$. Pytanie brzmi, jaki warunek musi spełniać zbiór F, by Banach posiadał strategię wygrywającą?

Wskazówki

- Czy Banachowi opłaca się, by zbiór F był duży, czy mały? Oczywiście, by był duży.
- Rozważmy najpierw proste przypadki. Czy gdy $F = [0,1]$, to Banach posiada strategię wygrywającą?
- Tak, posiada. Wystarczy, by w każdy ruchu wybierał odcinek, który istotnie obcina oba końce. Wówczas lewe końce I_n będą dążyć do pewnej granicy L, prawe końce do pewnej granicy P, oczywiście $L \leqslant P$ oraz dla każdego n prawdą będzie, że $[L,P] \subset I_n$, czyli innymi słowy $[L,P] \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$.
- Zauważmy przy okazji, że Mazur może zapewnić, że $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ będzie co najwyżej jednopunktowe, zwyczajnie na przykład skracając za każdym swoim ruchem odcinek przynajmniej 2 razy.
- Czy Banach może wygrać, gdy $F = [0,1] \setminus \{q\}$, gdzie q jest pewnym punktem z $[0,1]$? Tak, wystarczy, że stosuje poprzednią zasadę obcinania końców i za pierwszym ruchem ruszy się tak, by dalej rozważany kawałek nie zawierał punktu q.
- A gdy F to $[0,1]$ bez skończonej liczby punktów? Analogicznie skończoną liczbę punktów można wyrzucić za jednym ruchem.
- A gdy F to liczby niewymierne?
- Też Banach może wygrać, ustawiamy liczby wymierne, czyli te, które Banach chce ominąć, w ciąg. Za pierwszym ruchem Banach rusza się tak, by wyrzucić pierwszą liczbę wymierną, za drugim drugą, za trzecim trzecią itd. W przecięciu nie pojawi się żadna liczba wymierna, bo każda liczba wymierna stała na pewnym n-tym miejscu w ciągu, więc od ruchu n-tego w górę już na pewno nie należała od odcinków I_k, czyli nie należy też do nieskończonego przecięcia.

- W ten sposób możemy wyrzucać wszystkie zbiory przeliczane. Ale czy możemy wyrzucać pewne zbiory nieprzeliczalne? Okazuje się, że tak.
- Rozważmy F równy $[0, 1]$ bez zbioru Cantora. Wówczas po pierwszym ruchu Mazura Banach może wybrać sobie taki przedział, który już w całości siedzi w F i wygrał (o ile stosuje swoją stałą zasadę, czyli obcinanie końców). Czyli w jednym ruchu można wyrzucić nawet zbiór nieprzeliczalny!
- **Dalsza część odbywała się już na piątych ćwiczeniach**
- Przyjrzyjmy się jaka własność zbioru Cantora pozwoliła na to, by Banach ominął go w jednym ruchu.
- Tę właściwością jest to, że w każdym przedziale jest taki podprzedział, że w tym podprzedziale w ogóle zbioru Cantora nie ma. Tu warto wprowadzić definicję zbioru gęstego, zbiór nazywamy *gęstym* jeśli w każdym przedziale jest element tego zbioru. Zbiór Cantora ma własność w pewnym sensie przeciwną, nie jest on gęsty, a co więcej w żadnym przedziale nie jest on gęsty. Zbiory o tej własności, czyli takie, że na żadnym przedziale nie są one gęste nazywamy zbiorami *nigdziegęstymi.*
- A zatem Banach w jednym ruchu jest w stanie ominąć zbiór nigdziegęsty. Czyli w ogólności może on ominąć zbiory będące przeliczalną sumą zbiorów nigdziegęstych. Takie zbiory nazywane są zbiorami *I kategorii.*
- Przyjrzyjmy się dla jakich zbiorów F wygrywa Mazur. Co będzie, gdy $F = \mathbb{Q}$?
- Wówczas Mazur będzie mógł zastosować strategię Banacha dla liczb niewymiernych i ominąć po prostu cały zbiór liczby wymiernych - czyli dla $F = \mathbb{Q}$ wygrywa Mazur.
- Czy Mazur wygrywa jeszcze dla jakichś większych zbiorów?
- Tak, gdy F jest zbiorem I kategorii to Mazur może zastosować strategię wyżej opisaną i ominąć cały zbiór F.
- Mamy więc teraz pokazane, że dla $F = [0, 1] \setminus$ zbiór I kategorii wygrywa Banach, dla $F =$ zbiór I kategorii wygrywa Mazur. Jednak nie wszystkie podzbiory $[0, 1]$ są I kategorii lub ich dopełnienie jest I kategorii, co wówczas?
- Okazuje się, że wówczas wygrywa Mazur, czyli Banach wygrywa grę wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór F jest całym odcinkiem $[0, 1]$ z wyrzuconym zbiorem I kategorii. Ale tego ja nie umiem dowieść, może komuś się uda. Choć pytanie to było w księdze Szkockiej, może jednak nie jest to tak trudne do dokończenia.