Algorytmiczne Aspekty Teorii Gier

Ćwiczenia 1

16 lutego 2009

1. Hex. Plansza gry jest rombem o polach będących sześciokątami, bok rombu wynosi w tradycyjnej wersji $n = 11$, ale można rozważać grę dla dowolnego n. Gra dwóch graczy. Stawiają swoje piony na polach naprzemiennie, jeden powiedzmy białe, drugi czarne. Cel gry każdego z nich polega na połączeniu pary naprzeciwległych boków ścieżką swoich pionów (jeden gracz ma parę boków poziomych, drugi ukośnych).
Strona o grze: `http://pl.wikipedia.org/wiki/Hex_(gra)`
Który gracz ma strategię wygrywającą i czy któryś ma?

Uwagi ogólne

- Ogólna uwaga o tym, kiedy gracz posiada strategię wygrywającą, że pozycja jest wygrywająca, gdy z niej mogę pójść do przegrywającej, a pozycja jest przegrywająca, gdy z niej gdziekolwiek nie pójdę, to są wygrywające (oczywiście to działa tylko dla naprzemiennych ruchów).
- Komentarz do gry, wymyślona w 1942 przez jakiegoś gościa, 5 lat później J. Nash, ten on Pięknego Umysłu ponownie ja wymyślił i spopularyzował.
- Warto powiedzieć, że da się w tę grę grać na kratkowanej kartce, robimy wtedy kwadrat $n \times n$ i mówimy, że z konkretnym polem sąsiadują pola: na lewo, na prawo, do góry, do dołu, na skos lewo-góra oraz na skos prawo-dół. Gracz musi połączyć naprzeciwległe boki kwadratu.

Wskazówki

- Pokazać, że w tej grze nie ma remisów. Robi się to następująco. Bierzemy spójną składową dolnego boku (w wersji z sześciokątami). Jeśli dochodzi ona do górnego boku, to gracz łączący te boki wygrał. W przeciwnym przypadku, idąc granicą tej spójnej składowej, otrzymujemy ścieżkę łączącą drugą parę naprzeciwległych boków.
- Zauważmy, że skoro gra jest skończona (każda rozgrywka skończona i o długości ograniczonej przez pewne M), to na pewno któryś gracz ma strategię wygrywającą, można to łatwo pokazać idąc od dołu po drzewie gry (przy okazji pokażemy drzewo gry).
- Spróbować niekonstruktywnie.
- Nie wprost. Robi się tak. Przypuśćmy, że jestem drugi i mam strategię wygrywającą. Wtedy postawię gdzieś i będę grał tak, jak bym był pierwszy. Jeśli muszę, zgodnie ze strategią pierwszego tam, gdzie stoi mój zapomniany pion, to przypominam sobie o nim, stawiam gdzieś indziej pion i zapominam o nim. W ten sposób mam zawsze jeden zapomniany pion, ale ponieważ żaden mój pion mi nie przeszkadza, więc to przechodzi. Ogólnie taka metoda jest często stosowana i nazywa się *strategy-stealing.*
- Największe n, dla którego znana jest strategia, to $n = 9$.

2. NIM Mamy kilka rzędów, w każdym rzędzie po kilka pionów. Jest dwóch graczy, ruszają się na przemian. W jednym ruchu można wybrać konkretny rząd i zdjąć z niego kilka pionów. Zdejmując ostatni pion wygrywam. Kto ma strategię wygrywającą i jaka ona jest?

Uwagi ogólne

- Gramy sobie w to na tablicy.

Wskazówki

- Spróbować rozwiązać małe szczególne przypadki.
- Jak jest dla 2 rzędów. Wychodzi łatwo, że gdy są równe, to jest to pozycja przegrywająca, w przeciwnym przypadku wygrywająca.
- Jak jest dla 3 rzędów?
- Pokazać, że dla $a, b \in \mathbb{N}$ istnieje takie $f(a, b)$, że przy trzech rzędach, długości a, b oraz $f(a, b)$ przegrywamy, a dla dowolnej innej wielkości tego trzeciego słupka wygrywamy. Znaleźć konkretnie to f.
- Sprawdzić dla małych liczb i próbować zgadnąć co to jest. Sprawdzić dla 0, 1, 2, 3, zrobić sobie tabelkę.
- Można zauważyć, że to jest xor bitowy, tzn. $f(a, b) = a \oplus b$, gdzie xor rozumiemy po współrzędnych. (Zauważmy, że wtedy $f(a, b) \oplus a \oplus b = \mathbf{0}$.) Teraz już chcemy dowodzić, że to działa ogólnie.
- Trzeba wykazać, że z xora wszystkich n rzędów równego 0, czyli pozycji przegrywającej zawsze dochodzimy do pozycji wygrywającej, czyli xora różnego od 0 oraz, że z xora różnego od 0, czyli pozycji wygrywającej zawsze możemy dojść do pozycji przegrywającej, czyli xora równego 0.
- To, że z 0 nie dojdziemy do 0 jest jasne, bo zmieniamy liczbę w pewnej kolumnie i xor nie będzie równy ponownie 0.
- Gorzej, że z nie 0 możemy dojść do 0. Robi to się następująco. Niech $x_1, \ldots, x_n$ to liczby pionów w poszczególnych rzędach. Niech $x = x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n$. Spójrzmy na indeks wiodącej jedynki w x, niech będzie to k-ta pozycja. Z własności xora wynika, że dla pewnego i liczba x_i ma na k-tej pozycji również 1-kę. Wówczas zmniejszamy tę liczbę x_i zmieniając tę jedynkę na zero, a mniejsze liczby odpowiednio, tak, żeby xor wszystkiego wyszedł same zero (możemy te mniejsze cyfry dowolnie dopasować, bo już wiodącą 1-kę zmieniliśmy na 0). Czyli innymi słowy x_i zmieniamy na $x_i \oplus x$ i korzystamy z tego, że $x_i > x_i \oplus x$.

3. NIM misère. NIM, tylko z drobną modyfikacją, ten, kto zbierze ostatni pion przegrywa.

Wskazówki

- Podobnie jak poprzednio.

- Identycznie jak poprzednio, tylko dla małych przypadków inaczej.
- Tylko dla rzędów długości jeden inaczej.
- Gramy tak, jak dawniej, tylko w momencie, gdy mamy zostawić same rzędy długości jeden zostawiamy nie tak, jak w poprzednim przypadku parzystą ilość rzędów, ale nieparzystą. Prosto pokazać, że to właśnie gracz utrzymujący xor równy 0 po swoim ruchu może dokonać tej decyzji i że faktycznie zawsze może zmienić tę parzystość.

4. Grundy numbers (nimbers). Najpierw wstęp. Czasem mamy do czynienia z (można tak powiedzieć) produktem gier skończonych. Co więcej, gry te muszą mieć taką własność, że dla każdej pozycji każdy z graczy może zrobić te same ruchy (przykładowo NIM jest taką grą, ale szachy już nie, tam jest gracz biały, który rusza białymi i czarny, który rusza czarnymi figurami). Konkretnie, gramy w na przykład dwóch grach i nasz ruch polega na wykonaniu jednego ruchu w dokładnie jednej z tych dwóch gier. Przegrywamy, gdy nie możemy zrobić ruchu w żadnej z gier. Tak na przykład NIM z trzema rzędami długości 3, 4 oraz 6 to produkt trzech gier: $||| \otimes |||| \otimes ||||||$, jeśli przez grę z n znakami $|$ oznaczmy grę w jednym rzędzie o n zapałkach, czy też pionach (skądinąd niespecjalnie ciekawą).

Chcemy umieć rozwiązywać takie gry, to znaczy mówić kto ma strategię i jaka ona jest. Produkt gier A i B oznaczmy przez $A \otimes B$. Chcemy znaleźć taką informację inf o grze, żeby z tej informacji dało się odczytać, czy dana pozycja jest wygrywająca, czy przegrywająca, żeby $inf(A \otimes B)$ dało się nietrudno obliczyć mając $inf(A)$ oraz $inf(B)$. A przy tym chcemy dość prosto umieć obliczyć tę informacje dla gier składowych.

Uwagi ogólne

- To się przydaje w topcoderze, często zadanie za 1000 punktów w DIV 1 jest właśnie na jakieś gry, nie trzeba dużo kodować, tylko takie rzeczy umieć.
- Grundy to nie nazwa, tylko nazwisko (chyba).

Wskazówki

- Opierajmy się na NIM-ie, zobaczmy jak tam to działa.
- Wystarczy jedna liczba.
- To jest xor i podobnie jak w NIM-ie jeśli xor wynosi 0, to jest to pozycja przegrywająca, a jeśli jest różny od 0, to jest to pozycja wygrywająca.
- Pokazujemy jak w dowolnej grze skończonej obliczyć inf dla niej. Rysujemy drzewo gry. W liściach piszemy 0, bo są to pozycje przegrywające. W dowolnym węźle wewnętrznym piszemy najmniejszą liczbę nie występującą wśród synów.
- To jest dobra definicja, udowodnimy, że granie tak, żeby xor na wszystkich grach był 0 po ruchu jest ok. Gramy jak wcześniej. Jeśli ktoś zwiększył liczbę idąc do syna, to my możemy ją zmniejszyć w tej samej grze. W przeciwnym wypadku gramy jak w NIM-ie. Tak że jest ok.

Obserwacje

- Zauważmy, że produkt dwóch identycznych gier jest jak gra pusta $H \otimes H = \emptyset$
- Produkt przegrywającej gry H i dowolnej gry G jest równoważny grze G, $H \otimes G = G$

5. Gra czekolada. Mamy prostokątną czekoladę o rozmiarach $n \times m$. W lewym dolnym rogu na kostce jest trucizna. Jest dwóch graczy, ruszają się na zmianę. Ruch polega na wybraniu punktu kratowego i zjedzeniu wszystkiego na prawo i w górę od tego punktu (zjedzenie musi być niepuste). Przegrywa ten, kto zje truciznę. Pytanie brzmi - który gracza ma strategię wygrywającą.

Za to zadanie jest konkurs, kto pierwszy po zajęciach prześle rozwiązanie wygrywa konkurs i na następnych zajęciach otrzymuje czekoladę. Rozwiązanie też na następnych zajęciach. Umawiamy się, że nie przeszukujemy sieci, jest to do znalezienia na sieci.