Automaty jednolicznikowe

konfiguracja = stan + licznik

$q(k)$

Automaty jednolicznikowe: mają zero-testy (one counter automaton OCA)

Sieci jednolicznikowe: bez zero-testów (one counter nets OCN)

jednowymiarowe VASSy

1-VASS

Automat jednolicznikowy składa się z:

- zbioru stanów Q
- zbioru tranzycji $T \subseteq Q \times \Sigma_\varepsilon \times \mathbb{Z} \times Q$ $\qquad \Sigma_\varepsilon = \Sigma \cup \{\varepsilon\}$
- podzbioru tranzycji $Z \subseteq T$, tzw. zero-testów

Jeśli $(p, a, k, q) \in T$

$$p(n) \xrightarrow{a} q(n+k) \quad \text{o ile } n+k \geq 0$$

Dodatkowo jeśli $(p, a, k, q) \in Z$ to musi być $n=0$

Problemy

Nie ważne etykiety

Osiągalność: Dane: $p_1(n_1)$, $p_2(n_2)$

Pytanie: czy istnieje ścieżka z $p_1(n_1)$ do $p_2(n_2)$?

Osiągalność stanu: Dane: $p_1(n_1)$, p_2

Pyt.: czy $p_1(n_1) \rightsquigarrow p_2(?)$?

Pokrywalność: Dane $p_1(n_1)$, $p_2(n_2)$

Pyt.: czy $p_1(n_1) \rightsquigarrow p_2(n_2')$ t.,że $n_2' \geq n_2$?

to samo

$\mathcal{A}$ – automat $\quad L(\mathcal{A})$ – język

Konf. pocz.: $p_0(0)$

Akceptacja: przez konfigurację $q_0(0)$ ← trudne

przez stan q_0 ← łatwiejsze

lub zbiór stanów $F \subseteq Q$

Pustość: czy $L(\mathcal{A}) = \emptyset$?

Uniwersalność: czy $L(\mathcal{A}) = \Sigma^*$?

Rozłączność: czy $L(A) \cap L(B) = \emptyset$?

Reg-separowalność: czy istnieje język regularny S t.że

$$L(A) \subseteq S \ , \ L(B) \cap S$$

Regularność: czy $L(A)$ regularny ?

Podklasy: deterministyczny, jednoznaczne

Osiągalność dla OCNów (One Counter Nets)

Dane: $p_1(n_1)$, $p_2(n_2)$

Pyt.: czy $p_1(n_1) \rightsquigarrow p_2(n_2)$?

Uwaga 1

Można założyć $n_1 = n_2 = 0$.

Dodajemy stany q_1, q_2 oraz tranzycje

$$q_1 \xrightarrow{\varepsilon, n_1} p_1 \leftarrow$$
$$p_2 \xrightarrow{\varepsilon, -n_2} q_2 \leftarrow$$

Wtedy

$$p_1(n_1) \rightsquigarrow p_2(n_2)$$
$$\Updownarrow$$
$$q_1(0) \rightsquigarrow q_2(0)$$

Uwaga 2

Można założyć, że efekty tranzycji $\in \{-1, 0, +1\}$

$$p \xrightarrow{k} q$$

dodajemy $k-1$ stanów: $s_1, s_2, \ldots, s_{k-1}$

$$p \xrightarrow{1} s_1 \quad s_1 \xrightarrow{1} s_2 \quad \ldots \quad s_{k-2} \xrightarrow{1} s_{k-1} \quad s_{k-1} \xrightarrow{1} q$$

Jeśli M to maks. wart. bezwzględna efektu tranzycji.

Kodowanie liczb: binarnie, unarnie

binarnie $\downarrow$ wzrost wykładniczy

unarnie $\downarrow$ wzrost wielomianowy

Problem osiągalności dla unarnych OCNów

Tw.

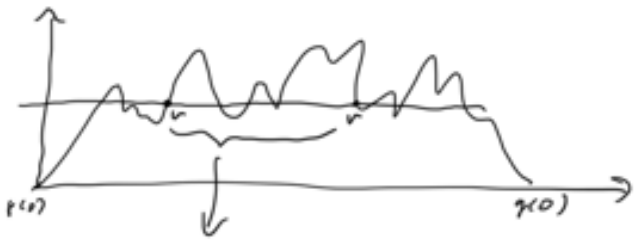
Niech A to OCN o n stanach, efekty tranzycji to $+1, -1, 0$. Wtedy jeśli istnieje bieg z $p(0)$ do $q(0)$, to również istnieje bieg z $p(0)$ do $q(0)$ długości $\leq n^3$.

D-d

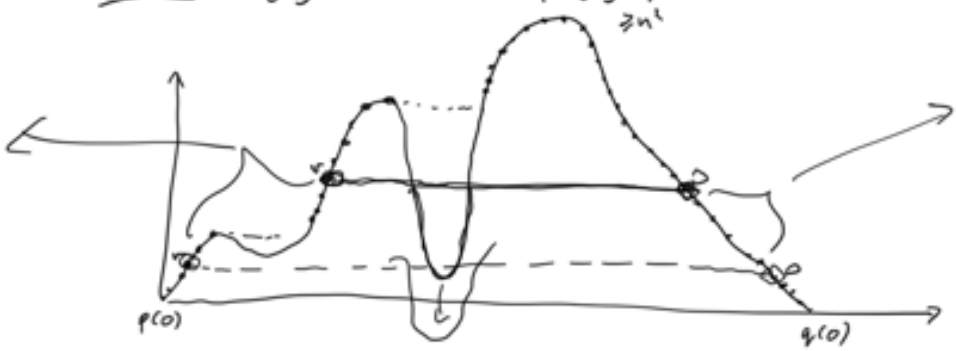
Rozważmy [illegible]

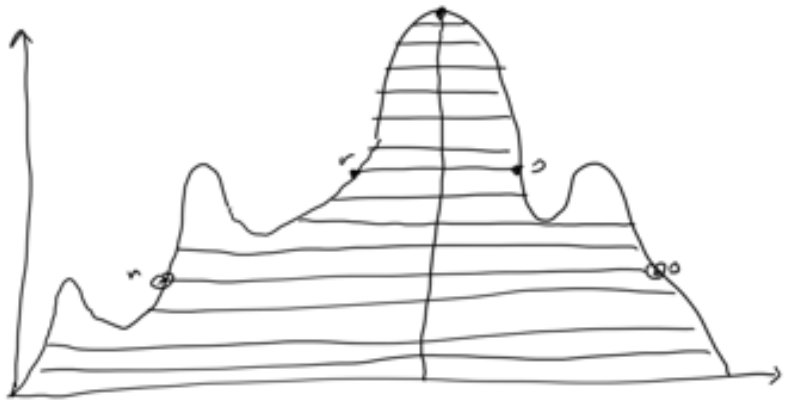
Rozważmy wykresy drogi ρ z $p(0)$ do $q(0)$. Zauważmy, że długość ρ jest $\leq n^3$.

<u>Obs. I</u> Na każdym poziomie kawałek ρ ma co najwyżej n konfiguracji.



<u>Obs. II</u> Droga ρ nie wchodzi powyżej poziomu n^2.





$\square$

<u>Wniosek:</u>

Problem osiągalności dla uniwersalnych OCNów jest NL-zupełny.

<u>Tw.</u>

—||— binarnych OCNów jest NP-zupełny.

NP-trudność	ćwiczenie
NP	Haase, Kreutzer, Quaknine, Worrell '09

<u>Uniwersalność</u>

OCNu z akceptacją przez stan.

zwrotność + przechodniość

Def.

Quasi-porządek $(X, \preccurlyeq)$ jest wqo (well quasi-order) jeśli:

1) nie ma nieskończonego ciągu zstępującego w $\preccurlyeq$

$\cancel{x_1 \succ x_2 \succ x_3 \succ x_4 \ldots}$ oraz

2) nie ma nieskończonego antyłańcucha w $\preccurlyeq$

Przykłady

$(\mathbb{N}, \leq)$ wqo

$(\mathbb{Z}, \leq)$ nie wqo, nie spełnia 1)

(zb. skończony $\preccurlyeq$ dowolny) wqo

$(\mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N}), \subseteq)$ $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \ldots$

nie wqo, nie spełnia 2)

Lemat 1

Dla dowolnego porządku $(X, \preccurlyeq)$ następujące warunki są równoważne:

1) $(X, \preccurlyeq)$ jest wqo (nie ma ∞ ciągu zstępującego ani ∞ antyłańcucha)

2) w dowolnym ciągu $x_1, x_2, x_3 \ldots \in X$ jest dominacja, tj. istnieją $i < j$ takie, że $x_i \preccurlyeq x_j$

3) w dowolnym ciągu $x_1, x_2, x_3 \ldots \in X$ jest nieskończony ciąg dominacji, tj. istnieją indeksy $i_1 < i_2 < i_3 < \ldots$ takie, że

$x_{i_1} \preccurlyeq x_{i_2} \preccurlyeq x_{i_3} \preccurlyeq \ldots$

D-d

3) $\Rightarrow$ 2) Oczywiste

2) $\Rightarrow$ 1) Nieok. ciąg zstępujący nie zawiera dominacji

Nieok. antyłańcuch też nie zawiera dominacji.

A zatem nie ma ich w $(X, \preccurlyeq)$.

1) $\Rightarrow$ 3)