Zadanie 1. Przeróbmy dany automat licznikowy na skierowany graf z wagami na krawędziach (być może krawędziami wielokrotnymi). Zbiór V wierzchołków grafu, to dokładnie zbiór stanów automatu. Zbiór E krawędzi grafu, to dokładnie zbiór tranzycji automatu, gdzie każda krawędź ma taką wagę, ile wynosiła liczba dodana do licznika po wykonaniu odpowiadającej tranzycji. Niech $(u, v, w) \in E$ oznacza krawędź z u do v z wagą w.

Załóżmy, że chcemy zbadać pokrywalność konfiguracji (q, t') startując z konfiguracji (p, t) gdzie p, q to stany automatu, zaś t, t' wartości liczników. Stworzymy algorytm, który dla każdego $v \in V$ obliczy $d(v)$, czyli maksymalną wartość licznika, która może być osiągnięta w stanie v, gdy stanem początkowym jest p z wartością licznika t. Jeśli dany stan v w ogóle nie może być osiągnięty, to $d(v) = -\infty$ oraz jeśli może być osiągnięty z dowolnie dużym licznikiem, to $d(v) = +\infty$. Posłużymy się modyfikacją algorytmu Bellmana-Forda.

Najpierw ustawiamy wartości początkowe:

for $v \in V$:
  $d(v) := -\infty$
$d(p) := t$

Teraz możemy odpalić główną część algorytmu.

def BellmanFord():
  for i in range(1, $|V|$):
    for $(u, v, w) \in E$:
      if $d(v) < d(u) + w$ **and** $d(u) + w \geq 0$:
        $d(v) := d(u) + w$

W tym momencie mamy wyznaczone wszystkie stany, do których można dotrzeć poprawnymi ścieżkami bez użycia cykli (są tam liczby różne od $-\infty$). Istotnie, każda ścieżka bez cyklu wewnątrz, przebiega najwyżej $|V|$ wierzchołków, więc została rozważona przez algorytm. Co więcej, algorytm dba, aby na każdym początkowym odcinku ścieżki, suma wag była nieujemna.

W kolejnym kroku odpalmy raz jeszcze funkcję BellmanFord() i sprawdźmy, gdzie wartości $d(v)$ się zmieniły. Dla każdego $v \in V$ takiego, że $d(v)$ się zwiększyło, możemy teraz wpisać $d(v) = +\infty$. Ostatnim krokiem jest wpisanie $d(v) = +\infty$ dla wszystkich $v \in V$, które są osiągalne z wierzchołków $u \in V$, dla których już wpisaliśmy $d(u) = +\infty$.

Mamy teraz poprawnie obliczoną funkcję d. Istotnie, rozważmy $v \in V$.

- Jeśli istnieje ścieżka z p do v z cyklem o dodatniej sumie wag, to niech u będzie pierwszym wierzchołkiem na niej takim, że u należy do pewnego cyklu o dodatniej sumie wag. Wówczas po drugim odpaleniu funkcji BellmanFord() mieliśmy już $d(u) = +\infty$, gdyż u musiało być osiągalne z p bez kilkukrotnego przechodzenia przez jakiś cykl. W takim razie po zakończeniu całego algorytmu na pewno mamy $d(v) = +\infty$.

- Jeśli zaś v jest osiągalny z p, ale każda ścieżka z p do v nie zwiera cyklu o dodatniej sumie wag, to $d(v)$ było już poprawnie obliczone po pierwszym odpaleniu BellmanFord().

- Wierzchołki v, które nie są osiągalne z p mają bez zmian $d(v) = -\infty$.

Aby rozwiązać problem pokrywalności, wystarczy teraz sprawdzić, czy $d(q) \geq t'$. Łatwo widać, że przedstawiony wyżej algorytm działa w czasie wielomianowym, co kończy dowód.