Plan:

- def. wqo
- równoważne def. wqo, dowód równoważności (nieskończone tw. Ramseya)
- Lemat Dicksona
- uniwersalność 1-VASSów (akceptacja przez stan)
  - Ackermann-trudność (wspomnienie)
    „Trace Inclusion for One-Counter Nets Revisited"
    Piotr Hofman, Patrick Totzke
  - rozstrzygalność
    - porządek na słowach
    - drzewo słów
    - Lemat Kőniga
- ewentualnie
  - $L, \overline{L}$ języki VASSów
    $\Downarrow$
    L regularny

Porządek: zwrotny, symetryczny, przechodni

Kwazi-porządek: zwrotny, przechodni

Well quasi-order (WQO) Bardzo przydatne w dowodzeniu rozstrzygalności!

To co innego niż dobry porządek!

Zwykle stosujemy do porządków

$(X, \precsim)$ jest wqo gdy

- nie ma nieskończonego ciągu zstępującego
- nie ma nieskończonego antyłańcucha

Lemat

Nw. s. r.

1) $(X, \precsim)$ jest wqo
2) w każdym ciągu $x_1, x_2, \ldots \in X$ jest dominacja, tzn. istnieją indeksy $i < j$ t., że $x_i \precsim x_j$
3) w każdym ciągu $x_1, x_2, \ldots \in X$ jest nieskończony ciąg dominacji, tzn. istnieją indeksy $i_1, i_2, \ldots$ t., że $x_{i_1} \precsim x_{i_2} \precsim \ldots$

D-d

3) ⇒ 2) Oczywiste

2) ⇒ 1) Gdyby był ∞ antyłańcuch lub ∞ ciąg zstępujący to stanowiłby kontrprzykład dla 2)

1) ⇒ 3) Ładny dowód jest przez tw. Ramseya.

Tw. (Nieskończone tw. Ramseya)

W każdej nieskończonej klice, której krawędzie pokolorowane są na skończenie wiele kolorów istnieje monochromatyczna podklika.

D-d (ćwiczenia)

Dowód implikacji 1) ⇒ 3).

Weźmy ciąg $x_1, x_2, \ldots$

Dla każdego x_i zróbmy wierzchołek.

Krawędź $x_i \to x_j$ dla $i<j$ kolorujemy:

- na czerwono jeśli $x_i \succ x_j$
- na zielono jeśli $x_i \preceq x_j$
- na niebiesko jeśli x_i, x_j są nieporównywalne.

Z 1) nie ma ∞ kliki czerwonej and niebieskiej. Więc z tw. Ramseya jest zielona.

□

Fakt

$(\mathbb{N}, \leq)$ to wqo.

$(\mathbb{Z}, \leq)$ to nie wqo (ciąg zstępujący)

$(\mathbb{N}$, podzielność$)$ to nie wqo (antyłańcuch)

Lemat Dicksona

Jeśli $(X, \preceq_X)$ i $(Y, \preceq_Y)$ to wqo, to $(X, \preceq)$ to też wqo dla $\preceq$ zdef.

$(x,y) \preceq (x',y')$ gdy $x \preceq_X x'$ i $y \preceq_Y y'$.

Wniosek $(\mathbb{N}^d, \preceq)$ to wqo.

Uniwersalność 1-VASSów

Ackermann - trudne

$$F_1(n) = 2n, \quad F_{k+1}(n) = \underbrace{F_k \circ \ldots \circ F_k}_{n \text{ razy}}(1)$$

Czyli $F_2(n) = 2^n$

$$F_3(n) = \left. 2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}} \right\} n$$

$Ack(n) = F_n(n)$

Można spotkać podobne, choć trochę inne def. Ack.

Klasa problemów wychodzi ta sama!

Rozstrzygalność

Dla $w \in \Sigma^*$ im wyżej jesteśmy tym lepiej.

Ustalmy 1-VASS $\mathcal{A}$ o d stanach.

$char(w) \in (\mathbb{N} \cup \{\perp\})^d$ każda współrzędna mówi jak wysoko da się wejść kończąc w stanie $q \in Q$

Def. $u \lesssim v$ gdy $char(u) \lesssim char(v)$, zakładamy, że $\perp$ jest najmniejsze

Lemat

$u \lesssim v$, $uw \in L(\mathcal{A}) \Rightarrow vw \in L(\mathcal{A})$

D-d prosty

Robimy drzewo:

jeśli w wierzchołku uv mamy $u \lesssim uv$ to obcinamy drzewo w tym wierzchołku

Fakt

Jeśli $uvw \notin L(A)$, to $uw \notin L(A)$.

Czyli nigdy nie wytniemy z drzewa najkrótszego słowa spoza $L(A)$.

Cel: Pokazać, że drzewo jest skończone.

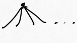
Fakt 1 Każda gałąź jest skończona (w wpo wersja 2).

Po pokazaniu, że drzewo jest skończone wystarczy Lemat Königa, standardowe narzędzie.

Lemat Königa

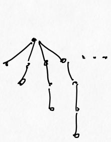
W nieskończonym drzewie o skończonym rozgałęzieniu istnieje nieskończona ścieżka.

Uwaga: Założenie o skończonym rozgałęzieniu jest potrzebne.



Czy założenie o dowolnie długich ścieżkach zamiast skończoności rozgałęzienia by wystarczyło?

Nie:



D-d (lematu Königa)

Tworzymy ścieżkę: korzeń ma ∞ potomków.

Wierzchołek o ∞ potomkach i $< \infty$ dzieciach

ma zawsze dziecko o ∞ potomkach.

Zawsze idziemy w stronę tego dziecka tworząc

∞ ścieżkę. □

Tw.

$L, \bar{L}$ to języki VASSów

$\Downarrow$

L regularny

D-d

Robimy 2 porządki jak wyżej: $\preceq_L, \preceq_{\bar{L}}$.

Niech $\preceq = \preceq_L \times \preceq_{\bar{L}}$, $\preceq$ to wqo.

Fakt $u \preceq v \Rightarrow u \sim_L v$.

D-d

$uw \in L \Rightarrow vw \in L$, bo $u \preceq_L v$

$uw \notin L \Rightarrow vw \notin L$, bo $u \preceq_{\bar{L}} v$. □

Ile klas abstrakcji ma $\sim_L$?

Gdyby miała ∞, to $\preceq$ ma ∞ antyłańcuch, sprz.

Czyli $\sim_L$ ma sk. indeks, czyli L jest regularny.

□

To przechodzi też dla VASSów (na ćwiczeniach).