Uniwersalność deterministycznego VASS-a

Witalis Domitrz

Spostrzeżenie

Można się ograniczyć do stanów osiągalnych

Można ograniczyć zbiór stanów do stanów osiągalnych ze stanu początkowego w grafie, w którym wierzchołki stanowią stany VASS-u, a krawędzie (skierowane) to tranzycje (ale pozbawione informacji o literce i wektorze).

Przez stany będę od teraz rozumiał tylko stany osiągalne.

Jak to obliczyć?

Na opisanym powyżej grafie używamy algorytmu DFS i znajdujemy wszystkie stany osiągalne.

Warunki konieczne i wystarczające

Wszystkie stany muszą być akceptujące

Jeśli język ma być uniwersalny, to wszystkie stany muszą być akceptujące.

Jeśli q nie byłby akceptujący to, z założenia o determinizmie danego VASS-a, słowo powstałe z literek na tranzycjach będących na ścieżce z p do q (ignorując wektory) nie było by w języku L.

Jak to sprawdzić?

Iterujemy się po wszystkich stanach i sprawdzamy, czy dany stan jest akceptujący.

Wszystkie stany muszą mieć tranzycje ze wszystkimi literkami

Jeśli język ma być uniwersalny, to dla każdego stanu q i każdej literki a musi istnieć tranzycja wychodząca z q z literką a.

Załóżmy, że istnieje stan q i literka a, że nie ma tranzycji wychodzącej z q z literką a. Oznaczmy przez w słowo powstałe z literek na tranzycjach będących na ścieżce z p do q. Teraz z determinizmu VASS-a wynika, że słowo wa nie może należeć do L.

Jak to sprawdzić?

Iterujemy się po wszystkich stanach i po wszystkich literkach i sprawdzamy, czy jest tranzycja wychodząca z danego stanu z taką literką.

Wszystkie tranzycje zawsze muszą być aktywne (nie patrząc na literki)

Jeśli język ma być uniwersalny, to patrząc na dany VASS, ignorując literki na tranzycjach, nie powinno się dać osiągnąć stanu (q, v'), że istnieje tranzycja wychodząca z q nie będąca aktywną (której nie możemy aktywować) z wektorem v'.

Jeśli zbiór tranzycji takich, jak opisane powyżej jest niepusty, to weźmy dowolną z tych, które występują najbliżej stanu początkowego w jakimś biegu. To znaczy - weźmy taką tranzycję $t = q \xrightarrow[u]{a} q'$, że istniej bieg z (p, v) do (q, v') w danym VASS-ie (nie patrząc na literki), a t nie jest aktywna w konfiguracji (q, v'). Oznaczmy przez w słowo powstałe z literek na tranzycjach biegu z (p, v) do (q, v'). Teraz z determinizmu VASS-a wynika, że słowo wa nie może należeć do L.

Jak to sprawdzić?

Dla każdego wymiaru i z d wymiarów z VASS-a tworzymy graf taki, że stany to wierzchołki, a tranzycje to krawędzie i mają wagi takie jak i-ta pozycja wektora z tej tranzycji. To znaczy tranzycja $t = q \xrightarrow[u]{a} q'$ daje krawędź $q \xrightarrow{u_i} q'$. Na takim grafie używamy algorytmu Bellmana-Forda zaczynając z wierzchołka p i sprawdzamy, czy istnieje wierzchołek, który możemy osiągnąć z wagą mniejszą niż $-v_i$, albo czy istnieje ujemny cykl, co też sprawdzamy tym algorytmem. Jeśli istnieje taki wierzchołek, albo ujemy cykl, to odpowiadamy, że istnieje tranzycja, która może być nieaktywna.

Jeśli dla każdego i z d wymiarów nie ma wierzchołka osiągalnego z wagą mniejszą niż $-v_i$ ani ujemnego cyklu, to odpowiadamy, że wszystkie tranzycje będą zawsze aktywne.

Dlaczego jest równoważność

Jeśli istnieje wymiar i i wierzchołek q, że istnieje ścieżka z p do q o sumie wag mniejszej od $-v_i$, to po przejściu którąś tranzycją z tej ścieżki zejdziemy poniżej 0 na i tej pozycji idąc w VASS-ie, więc ta tranzycja nie może być aktywna.

Jeśli istnieje i, że istnieje ujemy cykl, to istnieje wierzchołek, który możemy osiągnąć z dowolnie małą wartością na i tej pozycji, więc argument z poprzedniego akapitu również działa.

Jeśli istnieje tranzycja, która może być nieaktywna, to weźmy taką ścieżkę z (p, v) do (q, v'), że $t = q \xrightarrow[u]{a} q'$ nie jest aktywna z powodu wartości na współrzędnej i. Teraz w grafie dla współrzędnej i możemy osiągnąć q' z wagą mniejszą niż $-v_i$, bo z wagą $v'_i - u_i - v_i$ (a $v'_i - u_i < 0$), co zostanie wykryte jako ścieżka do q' o sumie wag mniejszej niż $-v_i$, lub ujemy cykl przez algorytm Bellmana-Forda.

Jeśli wszystkie powyższe warunki będą spełnione, to VASS jest uniwersalny

Załóżmy, że wszystkie powyższe warunki są spełnione. Teraz z indukcji po długości słowa dostajemy uniwersalność L.

Jeśli $w = \varepsilon$ należy do L, bo wszystkie stany, w tym stan początkowy p mają być akceptujące.

Jeśli weźmy $w = w'a$. Weźmy bieg po słowie w' w danym VASS-ie, który kończy się w konfiguracji (q, v'). Teraz wiemy, że z q wychodzi tranzycja z literką a. Niech będzie to $t = q \xrightarrow[u]{a} q'$. Wiemy też, że q' jest akceptujący oraz, że t jest aktywne, więc istnieje bieg akceptujący po $w = w'a$ i jest to bieg z (p, v) do (q, v'), a potem tranzycją t do stanu q'.

Algorytm

Wystarczy sprawdzić wszystkie opisane warunki tak, jak jest to opisane powyżej.

Złożoność

Sprawdzenie każdego z powyższych warunków jest wielomianowe, więc cały algorytm też jest wielomianowy.