Zadania przygotowawcze do II kolokwium z MD

Niżej znajdują się wskazówki i rozwiązania. Wskazówki i rozwiązania do każdego z zadań umieściłem na oddzielnych stronach. Gdy nie wiecie jak zacząć polecam spojrzenie na pierwszą (kolejne) wskazówkę i próbę dalszego samodzielnego rozwiązania.

1. Pokaż, że w grafie planarnym, 4-regularnym istnieje co najmniej 8 ścian trójkątnych.

2. Niech G^k będzie grafem, w którym wierzchołki są te same co w grafie G, a krawędzie są zdefiniowane następująco: $(u, v) \in E$ wtedy i tylko wtedy, gdy u i v są końcami ścieżki długości nie większej niż k w G. Wykaż, że jeśli G jest spójny, to G^3 jest hamiltonowski, ale G^2 niekoniecznie.

3. W turnieju o n wierzchołkach dla każdego wierzchołka stopień wejściowy jest równy wyjściowemu. Wyróżniony wierzchołek v_0 ma tę własność, że dla każdego innego wierzchołka v istnieje ścieżka z v_0 do v. Pokaż, że dla każdego v istnieje ścieżka z v do v_0.

4. Udowodnij, że dla liczby pierwszej p jeśli $p \mid a^p - b^p$, to $p^2 \mid a^p - b^p$.

5. Pokaż, że jeśli $7 \mid k^2 + l^2$, to $7 \mid k$ oraz $7 \mid l$.

6. Udowodnij, że liczb pierwszych postaci $4k + 3$ jest nieskończenie wiele.

Rozwiązanie 1

- zastosuj zliczanie krawędzi po wierzchołkach oraz po ścianach
- dodatkowo użyj wzoru Eulera $n - m + f \geqslant 2$
- zliczając krawędzie po wierzchołkach dostajemy $2m = 4n$
- oznaczmy przez k liczbę ścian trójkątnych
- zliczając krawędzie po ścianach otrzymujemy $2m \geqslant 3k + 4(f - k) = 4f - k$, czyli $4f \leqslant 2m + k$
- mamy więc $4n - 4m + 4f \geqslant 8$, czyli $4f - 2m \geqslant 8$
- łączac z ostatnim wynikiem dostajemy $8 \leqslant 4f - 2m \leqslant 2m + k - 2m = k$, czyli to, co chcieliśmy

Rozwiązanie 2

- dla G^2 po prostu podamy kontrprzykład
- przyjrzyjmy się najpierw jak wygląda możliwy cykl Hamiltona w G^2 dla G równego ścieżce o 4 krawędziach
- zmodyfikujmy trochę tę ścieżkę, by dostać graf G, dla którego w G^2 nie ma cyklu Hamiltona
- do środkowego punktu ścieżki doczepmy dodatkową ścieżkę długości 2 (powstaje taka gwiazda o trzech ramionach długości 2), wówczas proste rozważenie przypadków pokazuje, że w G^2 nie ma cyklu Hamiltona
- teraz pokażemy, że w G^3 zawsze jest cykl Hamiltona
- zrobimy to indukcyjnie po rozmiarze grafu (liczbie wierzchołków)
- teza indukcyjna będzie jednak mocniejsza - że dla dowolnej krawędzi $(u, v) \in G$ istnieje cykl Hamiltona w G^3, który zawiera tę krawędź
- wyróżnijmy konkretny wierzchołek v, niech jego sąsiedzi to $v_1, v_2, \ldots, v_k$
- dla każdego wierzchołka $u \in G$ istnieje ścieżka z v do u, pierwszy krok tej ścieżki to krawędź z v do v_i. Niech wierzchołki, dla których pierwszy krok to krawędź z v do v_i tworzą graf G_i. Graf G_i jest spójny.
- bedziemy korzystać z założenia indukcyjnego dla $G_1, G_2, \ldots, G_k$
- tworzymy cykl Hamiltona w G^3, który zawiera wybraną krawędź (v, v_1). Wiemy, że istnieją cykle Hamiltona w G_i^3, z wybraną krawędzią (v_i, v_i'), gdzie v_i' to pewien sąsiad v_i. Jeśli G_i jest równy $\{v_i\}$, to będzie tylko prościej. Cykl Hamiltona w G^3 wygląda następująco: $v - v_1 -$ cykl Hamiltona w $G_1^3 - v_1' - v_2 -$ cykl Hamiltona w $G_2^3 - v_2' - \ldots - v_k -$ cykl Hamiltona w $G_k^3 - v_k' - v$. Zauważmy, że zaczeliśmy od wybranej krawędzi (v, v_1), mogliśmy ją wybrać dowolnie.

Rozwiązanie 3

- spójrzmy na wyróżniony wierzchołek v_0, oznaczmy zbiór wierzchołków v takich, że krawędź idzie z v do v_0 jako U, a takich, że krawędź idzie z v_0 do v jako W. Przyjrzyjmy się temu podziałowi.
- dla każdego wierzchołka z U teza zadania jest jasna, problemem pozostają wierzchołki z W
- wiemy, że $|U| = |W| = k$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}$
- niech $v \in W$. Gdyby v miał krawędź prowadzącą do jakiegoś wierzchołka z U, to sprawa jest rozwiązana
- załóżmy nie wprost, że nie ma
- wówczas z v mogą wychodzić krawędzie jedynie do pozostałych wierzchołków z W, czyli maksymalnie $k - 1$
- wówczas krawędzi wchodzących do v jest minimum $k + 1$, sprzeczność

Rozwiązanie 4

- skorzystamy z małego twierdzenia Fermata, że $a^p \equiv a \mod p$
- podobnie dla b
- mamy wówczas, że $p \mid a - b$
- niech więc $a = b + kp$ dla $k \in \mathbb{N}$
- wówczas $a^p - b^p = (b + kp)^p - b^p = \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} b^i (kp)^{p-i} - b^p = \sum_{i=0}^{p-1} \binom{p}{i} b^i (kp)^{p-i}$
- w rozważanej sumie każdy ze składników dzieli się przez p^2
- składniki dla $i > 0$ zawieraja czynnik $\binom{p}{i}$ dla $0 < i < p$ oraz $(kp)^{p-i}$ dla $p - i > 0$. Składnik dla $i = 0$ również dzieli się przez p^2, bo zawiera czynnik $(kp)^2$. Zatem zadanie jest udowodnione.

Rozwiązanie 5

- rozważmy możliwe reszty k^2 modulo 7
- możliwe reszty to $0, 1, 4, 2$, bo $k^2 \equiv (7-k)^2 \mod 7$
- osiągnięcie sumy $k^2 + l^2$ równej 0 modulo 7 jest możliwe tylko poprzez zsumowanie dwóch zer
- zatem $7 \mid k$ i $7 \mid l$

Rozwiązanie 6

- udowodnij to podobnie jak pokazuje się, że liczb pierwszych jest nieskończenie wiele (przypomnienie tego dowodu w następnej wskazówce)
- dowód, że liczb pierwszych jest nieskończenie wiele: załóżmy nie wprost, że jest ich skończenie wiele, są to: $p_1, p_2, \ldots, p_k$. Wówczas liczba $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k + 1$ nie dzieli się przez żadną z liczb pierwszych, więc jest pierwsza. Jednak jest większa od wszystkich pozostałych, czyli nie wypisaliśmy wszystkich, sprzeczność.
- teraz dowiedziemy, że liczb pierwszych postaci $4k + 3$ jest nieskończenie wiele
- niech $p_1, p_2, \ldots, p_k$ to wszystkie takie liczby
- oznaczmy $n = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$, n jest nieparzysta
- jeśli $n \equiv 1 \mod 4$, to rozważmy liczbę $n + 2$, ona nie dzieli się przez żadną z p_i, jednak ma resztę 3 z dzielenia przez 4, czyli nie może mieć rozkładu na same liczby pierwsze postaci $4k + 1$. Sprzeczność.
- gdy $n \equiv 3 \mod 4$, to rozważamy analogicznie liczbę $n + 4$, która okazuje się nową liczbą pierwszą postaci $4k + 3$, sprzeczność

Zadania tu omowione nie sa wymyslone przeze mnie, a jedynie wziete ze znanych zrodel.