Zadania przygotowawcze do I kolokwium z MD

Nizej znajduja sie wskazowki i rozwiazania. Wskazowki i rozwiazania do kazdego z zadan umiescilem na oddzielnych stronach. Gdy nie wiecie jak zaczac polecam spojrzenie na pierwsza (kolejne) wskazowke i probe dalszego samodzielnego rozwiazania.

1. Niech $|X| = n$. Oblicz $\sum_{A,B\subseteq X} |A \cup B|$.

2. Oblicz $\sum\limits_{0\leq k,l\leq n} \binom{n}{k}\binom{k}{l} l(k-l)(n-k)$ dla ustalonego n.

3. Oblicz ile wynosi srednia liczbe cykli w n-permutacji.

4. Mamy n par butow. Oblicz na ile sposobow mozna je ustawic w rzedzie zeby buty z zadnej pary nie staly obok siebie.

5. Rozwiaz rekurencje

$$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} - 2^n + 2 \qquad \text{dla } n \geq 2$$

dla warunkow poczatkowych $a_0 = 1$, $a_1 = 5$.

6. Rozstrzygnij dla jakiego k prawdziwe jest stwierdzenie: liczba podzialow n na m roznych skladnikow jest rowna liczbie podzialow $n - \binom{k}{2}$ na m skladnikow.

7. Pokaz, ze $\left\{ {n+1 \atop k+1} \right\} = \sum\limits_{m=0}^{n} \binom{n}{m} \left\{ {m \atop k} \right\}$.

Rozwiazanie 1

- przesumuj po mozliwych wyborach $A \cup B$
- wybierz najpierw $A \cup B$, a dla kazdego elementu $x \in A \cup B$ wybierz, czy nalezy do $A \cap B$, do $A \setminus B$, czy do $B \setminus A$
- sumujemy po $A \cup B$ wielkosci k, mozemy taki zbior wybrac na $\binom{n}{k}$ sposobow, w jego obrebie dla kazdego z k elementow wybieramy, czy nalezy do $A \cap B$, $A \setminus B$, czy do $B \setminus A$ na 3^k sposobow
- szukana suma to $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}3^k$, gdzie pierwszy czynnik odpowiada za wielkosc zbioru, drugi za ilosc wyborow $A \cup B$, a trzeci za przyporzadkowanie elementow zbioru $A \cup B$ do odpowiednich podzbiorow
- sprowadz ja do prostej postaci
- $$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}3^k = \sum_{k=1}^{n} k \cdot \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}3^k = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1}3^k = 3n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}3^{k-1}$$
  $$= 3n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}3^k = 3n \cdot (3+1)^{n-1} = 3n \cdot 4^{n-1}$$

Rozwiazanie 2

- sprobuj przez interpretacje kombinatoryczna (sa tez inne metody)
- sposrod grupy n osob wybierz k informatykow, a sposrod nich l profesorow informatyki, z reszta skladnikow sprobuj sie uporac
- kazdej z 3 powstalych grup (profesorowie, matematycy bez tytulu profesora, reszta) przydziel szefa
- wybor grup mozna zrobic na $\binom{n}{k}$ razy $\binom{k}{l}$ sposobow, szefow wybieramy na odpowiednio l, $k-l$ oraz $n-k$ sposobow, czyli sumujac po wszystkim otrzymujemy szukana sume
- najpierw wybierz szefow, potem do nich przydziel grupe
- wybieramy trzech szefow na $\binom{n}{3}$ sposobow, przydzielamy im ktorej grupy beda szefem na $3! = 6$ sposobow, a potem pozostalym $n-3$ osobom przydzielamy grupe na 3^{n-3} sposobow
- wynik to $n(n-1)(n-2)3^{n-3}$

Rozwiazanie 3

- zamiast sumowac po wszystkich permutacjach ilosc cykli w nich wysumuj po wszystkich cyklach w ilu permutacjach wystepuja
- oblicz ile jest cykli dlugosci k i w ilu permutacjach taki cykl wystepuje
- cykli dlugosci k jest $\binom{n}{k} \cdot (k-1)!$ - wybieram k elementow do cyklu i potem na $(k-1)!$ je uporzadkowuje
- taki cykl wystepuje w $(n-k)!$ permutacji - po prostu elementu poza cyklem ustawiamy dowolnie
- zatem ilosc cykli we wszystkich permutacjach to $\sum\limits_{k=1}^{n} \binom{n}{k}(k-1)!(n-k)! = \sum\limits_{k=1}^{n} n! \cdot \frac{1}{k} = n! \cdot H_n$
- czyli srednia ilosc cykli w permutacji to H_n

Rozwiazanie 4

- zasada wlaczen i wylaczen (wystarczy sprowadzenie do postaci sumy)
- ponumerujmy buty liczbami od 1 do $2n$, gdzie $2k-1$ i $2k$ naleza do k-tej pary. Niech zdanienie A_k to: buty o nr-ach $2k-1$ i $2k$ stoja obok siebie
- oblicz $|A_k|$
- sklejamy buty z tej pary (na 2 sposoby, $2k-1$ przed $2k$ albo odwrotnie), teraz ustawiamy $2n-1$ obiektow: $2n-2$ buty i 1 pare na $(2n-1)!$ sposob. Czyli $|A_k| = 2(2n-1)!$
- oblicz $|A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap \ldots \cap A_{k_l}|$
- podobnie jak wyzej, sklejamy rozwazane l par butow w niepodzielne obiekty na 2^l sposobow (w kazdej parze na 2 sposoby) i porzadkujemy $2n-l$ obiektow ($2n-2l$ butow i l par) na $(2n-l)!$ sposobow. Wychodzi $2^l \cdot (2n-l)!$
- z zasady wlaczen i wylaczen otrzymujemy $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (2n-k)! 2^k$

Rozwiazanie 5

- oblicz funkcje tworzaca, sprowadz ja do prostej postaci i odczytaj jawna postac? a_n
- obserwujemy, ze (przypadkiem) to rownanie jest rowniez prawdziwe dla $n < 2$ (zakladajac $a_k = 0$ dla $k < 0$), wiec nie musimy dodawac zadnych nawiasow Iversona, by rownanie bylo prawdziwe dla wszystkich n
- wymnazamy stronami przez x^n i sumujemy po wszytkich mozliwych n, dostajemy wowczas

$$\sum a_n x^n = 5 \cdot \sum a_{n-1} x^n - 6 \sum a_{n-2} x^n - \sum 2^n x^n + 2 \sum x^n,$$

  czyli

$$A(x) = 5xA(x) - 6x^2 A(x) - \frac{1}{1-2x} + \frac{2}{1-x}.$$

- obliczamy, ze

$$A(x) = \frac{\frac{2}{1-x} - \frac{1}{1-2x}}{-1+5x+6x^2} = \frac{W(x)}{(1-2x)(1-x)(1-5x+6x^2)} = \frac{W(x)}{(1-x)(1-2x)(1-2x)(1-3x)}$$

$$= \frac{W(x)}{(1-x)(1-2x)^2(1-3x)}$$

- wiemy (z magicznych twierdzen - patrz np koniec wykladu nr 6 w skrypcie Chlebusa), ze wowczas a_n jest postaci: $a_n = 2^n \cdot (an+b) + 3^n \cdot c + 1^n \cdot d$
- dopasowujemy stale ukladajac 4 rownania dla poczatkowych wartosci
- $1 = a_0 = b + c + d$, $5 = a_1 = 2a + 2b + 3c + d$, $5 = a_2 = 8a + 4b + 9c + d$, $-11 = a_3 = 24a + 8b + 27c + d$, gdzie a_2 i a_3 po prostu wyliczylismy ze wzoru rekurencyjnego
- obliczamy a, b, c i d i to, co wyjdzie wstawiamy do wzoru (ja tu juz nie obliczam)

Rozwiazanie 6

- pokaz, ze $k = m$ jest dobre
- wskaz jednoznaczna odpowiedniosc pomiedzy podzialami n na m roznych skladnikow a podzialami $n - \binom{m}{2}$ na m skladnikow
- odpowiedniosc jest nastepujaca: dla podzialu n na m roznych skladnikow zabieramy z najwiekszej grupy $n - 1$ elementow, z kolejnej $n - 2$ elementow, ..., z przedostatniej 1 elementow, a z najmniejszej 0 elementow. Poniewaz skladniki sa rozne, to maja przynajmniej tyle elementow ile chcemy zabrac. Dostajemy dowolny podzial $n - \binom{m}{2}$ na m skladnikow (juz teraz byc moze roznych).
- analogicznie dziala przeksztalcenie w druga strone, dokladajac po podzialu $n - \binom{m}{2}$ na m skladnikow odpowiednio $n - 1, n - 2, \ldots, 1, 0$ elementow do kolejnych (zaczynajac od najwiekszego) skladnikow otrzymamy podzial n na m roznych skladnikow

Rozwiazanie 7

- interpretacja kombinatoryczna
- rozwazmy jako szczegolny blok zawierajacy 1-ke
- do tego bloku chcemy dobrac (do 1-ki) jest pewne $n-m$ liczb z n (na $\binom{n}{n-m} = \binom{n}{m}$ sposobow)
- zalatwilismy 1 blok, pozostale m liczb dzielimy na pozostale k blokow
- po zsumowaniu wszystkiego po mozliwych m otrzymujemy $\left\{ {n+1 \atop k+1} \right\}$

Zadania tu omowione nie sa wymyslone przeze mnie, a jedynie wziete ze znanych zrodel.