Witalis Domitrz 393711

1/2

1. Odpowiedź: Nie.

Rozważmy funkcję $f: \{0,1\} \to \{0,1\}^3$, że

$f(1) = 100$, $f(0) = 010$.

Teraz $f^*: \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$

To taka funkcja $f^*(w_1 w_2 \dots w_n) = f(w_1) f(w_2) \dots f(w_n)$

będę pomijał $*$ w f^* utożsamiając f^* i f.

Teraz rozważmy:

$a = \lim_{n\to\infty} f^n(1)$, $b = \lim_{n\to\infty} f^n(0)$, $a, b \in \Sigma^\omega$

$(\Sigma = \{0,1\})$

~~a = 100 010 010 010 100 010 010~~

obydwie te granice istnieją (analogicznie do wspomnianych w zadaniu słów Thuego-Morse'a), że obydwa słowa a i b są "boundedly repeating", ale

$a \times b$ już nie. $u < w$ niech oznacza, że u jest prefiksem

Dow.

$a = \lim_{n\to\infty} f^n(1)$ i $b = \lim_{n\to\infty} f^n(0)$ istnieją, oraz $\forall_i\ f^i(1) < f^{i+1}(1)$ i $f^i(0) < f^{i+1}(0)$.

oczywiście jeśli a i b istnieją, to należą do Σ^ω, bo są nieskończone.

$\forall_{c\in\{0,1\}} f^i(c) < f^{i+1}(c)$ wystarczy sprawdzić dla $i=0$, a to zachodzi, bo $1 < 100$, $0 < 010$,

a reszta wynika z trywialnej indukcji ($\forall_{c\in\{0,1\}} f^n(c) < f^{n+1}(c) \Rightarrow \forall_{c\in\{0,1\}} f^{n+1}(c) < f^{n+2}(c)$,

bo całe $f^{n+1}(c)$ zostanie wygenerowane z $f^n(c)$ będącego prefiksem $f^{n+1}(c)$).

Witalij Dowirtu 393711 (2/2)

1. a i b są "boundedly repeating", bo

1 i 0 występują w a i b po max 4 pozycje.

oraz jeśli jakieś słowo v występuje w ~~a~~, $d \in \{a, b\}$ nieskoń. wiele razy,

to istnieje też takie i, j, że $v = d_i d_{i+1} \ldots d_{i+n-1}$ oraz

$3^{j+2} < i < 3^{j+4}$ i ~~teraz~~ to znaczy, że

powstanie ono ze słowa ~~długości nie większej niż~~

z pozycji $[3^j, \ldots, 3^{j+2}]$, więc ~~który można dowieść~~

~~indukc~~ indukcyjnie dostajemy, że ~~jeś~~ ponieważ słowo, z

którego powstaje v będzie występowało nierzadziej

niż B, to v będzie występowało nierzadziej niż 3B.

a×b nie jest "boundedly repeating", bo ponieważ

~~f(a), f(a)~~ $f(1) \times f(0) = (1,0), (0,1), (0,0)$, to

a×b będzie zawierało dowolnie długie słowa złożone ze znaków $(0,0)$ i $(1,1)$

(bo $(0,0)$ da $(0,0)(1,1), (0,0)$ itd.) więc mimo, że litera $(0,1)$ występuje

nieskończenie wiele razy to między jej wystąpieniami będą

dowolnie długie odstępy (złożone z $(0,0)$ i $(1,1)$),

więc a×b nie jest "boundedly repeating".