Procesy Stochastyczne 2

Radosław Adamczak, Witold Bendorz

19 stycznia 2006

Rozdział 1

Wstęp

Niech $W(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$ będzie procesem Wienera, $X(t)$- procesem stochastycznym. Zasadniczym celem teorii jest zdefiniowanie całki stochastycznej $\int_0^t X(s)dW(s)$. Problem polega na tym, że trajektorie procesu Wienera nie mają ograniczonego wahania, a zatem nie można całki definiować dla każdej trajektorii z osobna (na ćwiczenia).

Niech $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ będzie przestrzenią probabilistyczną, zupełną. Niech $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$, $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$, będzie (zupełną) filtracją. Dla uproszczenia określamy $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\bigcup_t \mathcal{F}_t)$. Niech $0 < T \leqslant \infty$.

Definicja 1 *Przestrzeń $\mathcal{M}_T^{2,c}$ będą stanowiły ciągłe martyngały, adaptowalne względem filtracji $(\mathcal{F}_t)$ takie, że $\sup_{t\leqslant T} \mathbf{E}M^2(t) < \infty$.*

Zauważmy, że

1. jeśli $T < \infty$ $\sup_{t\leqslant T} \mathbf{E}M^2(t) = \mathbf{E}M^2(t)$.

2. jeśli $T = \infty$, to $\mathcal{M}_\infty^{2,c}$ tworzą martyngały ciągłe takie, że $\sup_{t<\infty} \mathbf{E}M^2(t) < \infty$. Z nierówności Dooba wynika, że

   $$\mathbf{E}\sup_{t<\infty} M^2(t) \leqslant 4 \sup_{t<\infty} \mathbf{E}M^2(t) < \infty.$$

   Twierdzenia o zbieżności martyngałów implikują, że $M(t) \to M(\infty)$ p.n. i w $L^2(\Omega)$. Ponadto zachodzi wzór $M(t) = \mathbf{E}(M(s)|\mathcal{F}_t) \to \mathbf{E}(M(\infty)|\mathcal{F}_t)$, gdy $s \to \infty$, $s > t$. Zatem $M(t)$, $0 \leqslant t \leqslant \infty$ tworzą martyngał ciągły taki, że $\sup_{t\leqslant\infty} \mathbf{E}M^2(t) < \infty$.

Uwaga 1 *Przez $\mathcal{M}^{2,c}$, będziemy oznaczać ogólnie martyngały ciągłe takie, że $\mathbf{E}M^2(t) < \infty$ dla każdego $t < \infty$.*

Definicja 2 *Powiemy, że dwa procesy $X(t)$ i $Y(t)$, $t \in [0,T]$ są nieodróżnialne, jeśli*

$$\mathbf{P}(X(t) = Y(t) \ \ \textit{dla}\ t \in [0,T]) = 1.$$

Uwaga 2 *W przestrzeni $\mathcal{M}_T^{2,c}$ identyfikujemy procesy nieodróżnialne.*

Stwierdzenie 1 *Przestrzeń $\mathcal{M}_T^{2,c}$ jest przestrzenią Hilberta z iloczynem skalarnym*

$$(M, N) = (M, N)_T = \mathbf{E}M(T)N(T).$$

Dowód. Zauważmy, że

1. Przestrzeń $\mathcal{M}_T^{2,c}$ jest liniowa.

2. (M, N) jest iloczynem skalarnym, który istotnie definiuje metrykę na $\mathcal{M}_T^{2,c}$. Wystarczy sprawdzić, że $(M, M) = 0$ daje $M = 0$. Tak jest gdyż $0 = (M, M) = \mathbf{E}M^2(T)$. Z nierówności Dooba dostajemy $\mathbf{E}\sup_{t\leqslant T} M^2(t) = 0$, a to znaczy, że proces M jest nieodróżnialny od 0.

3. Rzecz jasna $\|M\|^2 = (M, M)$ wprowadza metrykę $\|\cdot\|$ na przestrzeni $\mathcal{M}_T^{2,c}$. Udowodnimy zupełność $\mathcal{M}_T^{2,c}$ w tej metryce. Niech M_n będzie ciągiem martyngałów spełniających warunek Cauchy'ego (zachodzi $M_n(t) = \mathbf{E}(M(T)|\mathcal{F}_t)$). Ponieważ

$$\|M_n - M_m\| = \mathbf{E}(M_n(T) - M_m(T))^2 \to 0, \ \text{ gdy } m, n \to \infty,$$

więc z zupełności $L^2(\Omega)$ wynika, że istnieje $M(T)$ takie, że $M_n(T) \to M(T)$ w $L^2(\Omega)$. Ponadto z nierówności Dooba

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}\sup_{t\leqslant T}(M_n(t) - M_m(t))^2 \leqslant 4\sup_{t\leqslant T}\mathbf{E}(M_n(t) - M_m(t))^2 = \\ &= 4\mathbf{E}(M_n(T) - M_m(T))^2 \to 0, \ \text{ gdy } m, n \to \infty.\end{aligned}$$

Czyli przechodząc do podciągu (n_k) (żeby mieć zbieżność p.n.) dostajemy

$$\mathbf{P}(\sup_{t\leqslant T}(M_{n_k}(t) - M_{n_l}(t))^2 \to 0, \ l, k \to \infty) = 1.$$

Zatem M_{n_k} jest z $\mathbf{P} = 1$ zbieżny jednostajnie na odcinku $[0, T]$ $(k \to \infty)$. Konsekwentnie M_{n_k} jest zbieżny do pewnego procesu ciągłego M. Ponieważ

$$M(t) \leftarrow M_{n_k}(t) = \mathbf{E}(M_{n_k}(T)|\mathcal{F}_t) \to \mathbf{E}(M_T|\mathcal{F}_t),$$

gdzie zbieżność po lewej stronie jest p.n., a po prawej w $L^2(\Omega)$. Stąd dostajemy, że $M_n \to M$ w $\mathcal{M}_T^{2,c}$

■

Wniosek 1 *Przestrzeń $\mathcal{M}_T^{2,c}$ jest izometryczna z domkniętą podprzestrzenią $L^2(\Omega)$.*

Definicja 3 *Przez $\mathcal{E}$ oznaczamy klasę procesów elementarnych, to znaczy procesów postaci*

$$X(t) = \xi_0 1_0 + \sum_{j=1}^{m-1} \xi_j 1_{(t_j, t_{j+1}]},$$

gdzie $0 = t_0 \leqslant t_1 < t_2 < ... < t_m$, ξ_j *jest* $\mathcal{F}_{t_j}$ *mierzalne.*

Zauważmy, że $\mathcal{E}$ jest przestrzenią liniową.

Niech W będzie procesem Wienera względem filtracji $(\mathcal{F}_t)$ (filtracji zupełnej, wyznaczonej przez proces). Zauważmy, że $W(t) - W(s)$ jest niezależnym procesem od $\mathcal{F}_s$.

Definicja 4 *Dla* $X \in \mathcal{E}$ *definiujemy proces*

$$I(X) = I(X)(t) = \int_0^t X dW := \sum_{j=1}^{m-1} \xi_j (W(t_{j+1} \wedge t) - W(t_j \wedge t)).$$

Zauważmy, że $I(X)$ nie zależy od reprezentacji X.

Rozdział 2

Całka stochastyczna Ito

2.1 Całka Ito jako izometria liniowa

W tym rozdziale zdefiniujemy całkę stochastyczną Ito.

Twierdzenie 1 *Dla każdego $X \in \mathcal{E}$, proces $I(X) \in \mathcal{M}_T^{2,c}$, $I(X)(0) = 0$, a ponadto*

$$\|I(X)\|_T^2 = \mathbf{E}(\int_0^T X(s)dW(s))^2 = \mathbf{E}\int_0^T X^2(s)ds.$$

Dowód. Ponieważ $X \in \mathcal{E}$, więc dla pewnego ciągu $0 = t_0 \leqslant t_1 < t_2 < ... < t_m$

$$X(t) = \xi_0 1_{\{0\}} + \sum_{j=1}^{m-1} \xi_j 1_{(t_j, t_{j+1}]},$$

gdzie, ξ_j są $\mathcal{F}_{t_j}$ mierzalne. Z definicji

$$I(X)(t) = \sum_{j=1}^{m-1} \xi_j (W(t_{j+1} \wedge t) - W(t_j \wedge t)).$$

Jest jasne, że $I(X)(0) = 0$. Po drugie jest oczywiste (z definicji), że $I(X)(t) \in L^2(\Omega)$. Po trzecie trajektorie procesu $I(X)$ są ciągłe. Istotnie wystarczy zauważyć, że funkcje

$$t \to (W(t_{j+1} \wedge t) - W(t_j \wedge t)), \;\; t \in (t_j, t_{j+1}]$$

są ciągłe, co wynika z ciągłości trajektorii procesu Wienera.

Pozostaje pokazać, że proces $I(X)$ jest martyngałem. Zauważmy zatem, że $I(X)(t)$ $t \in [0, T]$ jest adaptowalny do filtracji $(\mathcal{F}_t)$. Pokażemy, że

$$\mathbf{E}(I(X)(t)|\mathcal{F}_s) = I(X)(s), \;\; \text{dla } t_k \leqslant s < t \leqslant t_{k+1}, \;\; k \in \{0, 1, ..., m-1\}. \tag{2.1}$$

Powyższa równość łatwo wynika z definicji

$$\mathbf{E}(I(X)(t) - I(X)(s)|\mathcal{F}_s) = \mathbf{E}(\xi_k(W(t) - W(s))|\mathcal{F}_s) = \xi_k\mathbf{E}(W(t) - W(s)|\mathcal{F}_s) = 0.$$

W istocie to wystarcza do udowodnienia, że

$$\mathbf{E}(I(X)(t)|\mathcal{F}_s) = I(X)(s), \quad \text{dla} 0 \leqslant s < t \leqslant T.$$

Przypuśćmy, że $s \in (t_l, t_{l+1}]$, $t \in (t_k, t_{k+1}]$, $l < k$, to

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}(I(X)(t)|\mathcal{F}_s) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(I(X)(t)|\mathcal{F}_{t_k})|\mathcal{F}_s) = \mathbf{E}(I(X)(t_k)|\mathcal{F}_s) = \\
&= \mathbf{E}(\mathbf{E}(I(X)(t_k)|F_{t_{k-1}})|\mathcal{F}_s) = \mathbf{E}(I(X)(t_{k-1})|\mathcal{F}_s) = \ldots = \\
&= \mathbf{E}(I(X)(t_{l+1})|\mathcal{F}_s) = I(X)(s).
\end{aligned}$$

Za każdym razem korzystaliśmy wyłącznie z równości (2.1).

Pozostaje jeszcze udowodnić wzór

$$\|I(X)\| = \mathbf{E}I(X)^2(t) = \mathbf{E}\int_0^T X^2(s)ds.$$

Skorzystamy z następującej równości.

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}I(X)^2(T) = \sum_{k=1}^{m-1} \mathbf{E}(\xi_k^2(W(t_{k+1}) - W(t_k))) + \\
&+2\sum_{l<k} \mathbf{E}(\xi_l\xi_k(W(t_{l+1}) - W(t_l))(W(t_{k+1}) - W(t_k))).
\end{aligned}$$

Niech

$$\begin{aligned}
&A := \sum_{k=1}^{m-1} \mathbf{E}(\xi_k^2(W(t_{k+1}) - W(t_k))^2). \\
&B := 2\sum_{l<k} \mathbf{E}(\xi_l\xi_k(W(t_{l+1}) - W(t_l))(W(t_{k+1}) - W(t_k))).
\end{aligned}$$

Zauważmy, że

$$\begin{aligned}
B &= 2\sum_{l<k} \mathbf{E}(\mathbf{E}(\xi_l\xi_k(W(t_{l+1}) - W(t_l))(W(t_{k+1}) - W(t_k))|\mathcal{F}_{t_k})) = \\
&= 2\sum_{l<k} \mathbf{E}(\xi_k\xi_k(W(t_{l+1}) - W(t_l))\mathbf{E}((W(t_{k+1}) - W(t_k))|\mathcal{F}_{t_k})) = 0
\end{aligned}$$

Ostatnia równość wynika z faktu, że $\mathbf{E}((W(t_{k+1}) - W(t_k))|\mathcal{F}_{t_k}) = 0$ (bo W jest martyngałem). Wystarczy obliczyć A. Przypomnijmy, że $W(t)$ i $W^2(t) - t$ są martyngałami, stąd

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}((W(t_{k+1}) - W(t_k))^2|\mathcal{F}_{t_k}) = \mathbf{E}(W^2(t_{k+1})|\mathcal{F}_{t_k}) - 2W(t_k)\mathbf{E}(W(t_{k+1})|\mathcal{F}_{t_k}) + \\
&+W^2(t_k) = \mathbf{E}(W^2(t_{k+1}) - t_{k+1}|\mathcal{F}_{t_k}) + t_{k+1} - W^2(t_k) = t_{k+1} - t_k.
\end{aligned}$$

Zatem

$$A = \sum_{k=1}^{m-1} \mathbf{E}(\xi_k^2 (W(t_{k+1}) - W(t_k))^2) = \sum_{k=1}^{m-1} \mathbf{E}(\mathbf{E}(\xi_k^2 (W(t_{k+1}) - W(t_k))^2 | \mathcal{F}_{t_k})) =$$
$$= \sum_{k=1}^{m-1} \mathbf{E}(\xi_k^2 \mathbf{E}((W(t_{k+1}) - W(t_k))^2 | \mathcal{F}_{t_k})) = \mathbf{E}(\sum_{k=1}^{m-1} \xi_k^2 (t_{k+1} - t_k)) = \mathbf{E} \int_0^T X^2(s) ds.$$

To kończy dowód.

■

Uwaga 3 *Łatwo zauważyć, że I jest przekształceniem liniowym z $\mathcal{E}$ w $\mathcal{M}_T^{2,c}$. Co więcej, jeśli potraktować $\mathcal{E}$ jako liniową podprzestrzeń*

$$L_T^2 := L^2([0,T] \times \Omega, \mathcal{B}([0,T]) \otimes \mathcal{F}, |\cdot| \otimes \mathcal{F}),$$

to I jest liniową izometrią (bo $\|I(X)\| = \|X\|^2_{L^2_T}$).

Ogólnie całkę stochastyczną otrzymamy przechodząc do domknięcia $\mathcal{E}$. Warto zwrócić uwagę, że każda izometria liniowa I z podprzestrzeni L_T^2 w $\mathcal{M}_T^{2,c}$ (przestrzeń Banacha) ma jednoznaczne rozszerzenie na domknięcie $\overline{\mathcal{E}}$ przestrzeni $\mathcal{E}$ w L_T^2.

Definicja 5 *Rozszerzenie I na domknięcie $\overline{\mathcal{E}}$ w L_T^2 nazywamy całką stochastyczną Ito i oznaczamy*

$$I(X)(t) = \int_0^t X(s) dW(s) = \int_0^t X dW.$$

Uwaga 4 *Dla każdego $X \in \overline{\mathcal{E}}$, zachodzi $I(X) \in \mathcal{M}_T^{2,c}$. Ponadto I jest izometrią liniową, to znaczy I jest liniowe i zachodzi wzór*

$$\|I(X)\|^2 = \mathbf{E}(\int_0^T X(s) dW(s))^2 = \mathbf{E} \int_0^T X^2(s) ds.$$

2.2 Opis procesów z klasy $\overline{\mathcal{E}}$.

Definicja 6 *Przez $\mathcal{P}$ będziemy oznaczać σ-ciało zbiorów prognozowalnych, to znaczy σ-ciało podzbiorów $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ generowane przez*

$$\{\{0\} \times A,\ A \in \mathcal{F}_0\} \cup \{(s,t] \times A,\ s < t,\ A \in \mathcal{F}_s\}.$$

Proces X będziemy nazywać prognozowalnym, gdy jest mierzalny względem $\mathcal{P}$ jako funkcja $[0,T] \times \Omega \ni (t,\omega) \to X(t,\omega)$.

Uwaga 5 *Każdy proces prognozowalny jest progresywnie mierzalny.*

Stwierdzenie 2 *Jeśli X jest procesem adaptowalnym, lewostronnie ciągłym, to jest procesem prognozowalnym.*

Dowód. Niech $(t_j^n)_n$ będzie ciągiem podziałów normalnych, to znaczy

$$t < T, \;\; 0 = t_0^n < ... < t_m^n = T, \;\; \max_j (t_j^n - t_{j-1}^n) \to 0 \text{ gdy } n \to \infty.$$

Definiujemy

$$X_n(t) := X(0)1_{\{0\}}(t) + \sum_{k=1}^{m_n - 1} X(t_k^n) 1_{(t_k^n, t_{k+1}^n]}(t).$$

Z lewostronnej ciągłości wynika, że $X_n(t) \to X(t)$ dla każdego t, dla prawie wszystkich $\omega \in \Omega$. Co więcej procesy X_n są prognozowalne bo są skończonymi sumami procesów progonozwalnych. W istocie Wystarczy zauważyć, że prognozowalne są procesy

$$X(0)1_{\{0\}}, \;\; X(t_k^n)1_{(t_k^n, t_{k+1}^n]}.$$

To z kolei wynika z definicji σ-ciała $\mathcal{P}$

$$\begin{aligned}
&\{(t,\omega): \; X(0)1_{\{0\}} \leqslant a\} = \{0\} \times \{X(0) \leqslant a\} \in \mathcal{P} \\
&\{(t,\omega): \; X(t_k^n)1_{(t_k^n, t_{k+1}^n]} \leqslant a\} = (t_k^n, t_{k+1}^n] \times \{X(t_k^n) \leqslant a\} \in \mathcal{P}.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

■

Stwierdzenie 3 *Zachodzi równość $\overline{\mathcal{E}} = L^2([0,T] \times \Omega, \mathcal{P}, |\cdot| \otimes \mathbf{P})$.*

Dowód. Zauważmy, że po pierwsze każdy proces z klasy $\overline{\mathcal{E}}$ jest prognozowalny, bo jest granicą według $|\cdot| \otimes \mathbf{P}$ procesów prognozowalnych (a więc granicą p.n. dla pewnego podciągu). Wynika to z faktu, że zbieżność w L^2 implikuje zbieżność według prawdopodobieństwa (ogólnie miary).

Wystarczy pokazać, że procesy z $\mathcal{E}$ są gęste w klasie $L^2([0,T] \times \Omega, \mathcal{P}, |\cdot| \otimes \mathbf{P})$. Jest jasne, że gęste w tej klasie są sumy postaci

$$X := \sum_{k=1}^{m} a_i 1_{\Gamma_i}, \;\; \text{gdzie } \; a_i \in \mathbb{R}, \; \Gamma_i \in \mathcal{P}.$$

Wystarczy udowodnić, że $1_{\Gamma_i} \in \overline{\mathcal{E}}$. Ten fakt dostajemy z lematu o $\pi - \lambda$ układach. Zwróćmy uwagę, że klasa $\mathcal{A}$ zbiorów Γ dla których $1_\Gamma \in \overline{\mathcal{E}}$ zawiera π-układ $\mathcal{B}$ złożony ze zbiorów

$$\Gamma = \{0\} \times A \;\; A \in \mathcal{F}_0, \;\; \Gamma := (s,t] \times A \;\; A \in \mathcal{F}_s.$$

Z definicji 1_Γ dla takich zbiorów należy do $\mathcal{E} \subset \overline{\mathcal{E}}$. Wystarczy pokazać, że klasa $\mathcal{A}$ jest λ-układem (na ćwiczenia).

$\blacksquare$

Wniosek 2 *Jeśli X jest procesem prognozowalnym takim, że $\mathbf{E}\int_0^T X^2(s)ds < \infty$, to całka Ito $\int XdW$ jest dobrze określona. Klasę takich procesów oznaczamy przez $\mathcal{L}_T^2$.*

Uwaga 6 *Można pokazać, że $\int XdW$ jest dobrze określone dla każdego X progresywnie mierzalnego takiego, że $\mathbf{E}\int_0^T X^2(s)ds < \infty$, a nawet dla procesu nieantycypującego, to znaczy adaptowalnego, mierzalnego i spełniającego warunek $\mathbf{E}\int_0^T X^2(s)ds < \infty$ (patrz książka Karatzas-Shreve).*

Uwaga 7 *Niech $X \in \mathcal{L}_T^2$, wówczas $1_{[0,t]}X \in \mathcal{L}_T^2$, dla $t \leqslant T$. Ponadto*

$$\int_0^T 1_{[0,t]}X(s)dW(s) = \int_0^t X(s)dW(s)$$

oraz $\mathbf{E}(\int_0^t X(s)dW(s))^2 = \mathbf{E}\int_0^t X^2(s)ds$

Dowód. Ustalmy $t < T$. Istnieje ciąg procesów $X_n \in \mathcal{E}$ takich, że $X_n \to X$ w $\mathcal{L}_T^2$. Jest jasne, że $1_{[0,t]}X_n \in \mathcal{E}$. Pokażemy, że

$$1_{[0,t]}X_n \to 1_{[0,t]}X \text{ w } \mathcal{L}_T^2.$$

Istotnie

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\int_0^T (1_{[0,t]}(s)X_n(s) - 1_{[0,t]}(s)X(s))^2 = \mathbf{E}\int_0^t (X_n(s) - X(s))^2 ds \leqslant \\ \leqslant \mathbf{E}\int_0^T (X_n(s) - X(s))^2 ds \to 0 \text{ gdy } n \to \infty. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Pozostała część tezy jest oczywista.

$\blacksquare$

Rozdział 3

Zatrzymywanie całek stochastycznych

Twierdzenie 2 (o zatrzymywaniu całki stochastycznej) *Jeśli* $X \in \mathcal{L}^2_T$*, natomiast* $\tau \leq T$ *jest momentem zatrzymania, to* $\mathbf{1}_{[\mathbf{0},\tau]}X \in \mathcal{L}^2_T$ *oraz dla każdego* $t \in [0,t]$

$$\int_0^t \mathbf{1}_{[\mathbf{0},\tau]}(s)X_s dW_s = \int_0^{t\wedge\tau} X_s dW_s \ p.n. \tag{3.1}$$

Uwaga Ponieważ oba procesy występujące w (3.1) mają ciągłe trajektorie, z ich równości dla każdego t wynika natychmiast nieodróżnialność.

Dowód.

Proces $\mathbf{1}_{[\mathbf{0},\tau]}$ jest prognozowalny, bo jest lewostronnie ciągły i adaptowany (łatwe). Zatem $\mathbf{1}_{[\mathbf{0},\tau]}X$ też jest prognozowalny. Ponadto

$$\mathbf{E}\int_0^T (\mathbf{1}_{[\mathbf{0},\tau]}(s)X_s)^2 ds \leq \int_0^T X_s^2 ds < \infty.$$

Stąd $\mathbf{1}_{[\mathbf{0},\tau]}X \in \mathcal{L}^2_T$.

Dalsza część dowodu przebiega standardową metodą, polegającą na udowodnieniu twierdzenia najpierw dla τ przyjmującego tylko skończenie wiele wartości oraz $X \in \mathcal{E}$ ($\mathcal{E}$ – procesy elementarne), a następnie rozszerzeniu tezy na przypadek ogólny poprzez prostą aproksymację.

a) Jeżeli τ przyjmuje tylko skończenie wiele wartości oraz $X \in \mathcal{E}$, możemy bez straty ogólności założyć, że

$$X_t = \xi_0 \mathbf{1}_{\{\mathbf{0}\}}(t) + \sum_{k=1}^{m-1} \xi_k \mathbf{1}_{(\mathbf{t_k},\mathbf{t_{k+1}}]}(t)$$
$$\tau \in \{t_1, \ldots, t_k\},$$

dla pewnych liczb $0 \leq t_1 < \ldots < t_k \leq T$.

Wprowadzając dodatkowe oznaczenie $t_0 = 0$, otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\mathbf{1}_{[\mathbf{0},\tau]}(t) &= \mathbf{1}_{\{\mathbf{0}\}}(t) + \sum_{k=1}^{m} \mathbf{1}_{\{\tau=\mathbf{t_k}\}} \mathbf{1}_{(\mathbf{0},\mathbf{t_k}]}(t) = \mathbf{1}_{\{\mathbf{0}\}}(t) + \sum_{k=1}^{m} \mathbf{1}_{\{\tau=\mathbf{t_k}\}} \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{1}_{(\mathbf{t_j},\mathbf{t_{j+1}}]}(t) \\
&= \mathbf{1}_{\{\mathbf{0}\}}(t) + \sum_{j=0}^{m-1} \mathbf{1}_{(\mathbf{t_j},\mathbf{t_{j+1}}]}(t) \sum_{k=j+1}^{m} \mathbf{1}_{\{\tau=\mathbf{t_k}\}} \\
&= \mathbf{1}_{\{\mathbf{0}\}}(t) + \sum_{j=0}^{m-1} \mathbf{1}_{\{\tau>\mathbf{t_j}\}} \mathbf{1}_{(\mathbf{t_j},\mathbf{t_{j+1}}]}(t).
\end{aligned}$$

Zatem

$$\mathbf{1}_{[\mathbf{0},\tau]}(t) X_t = \xi_0 \mathbf{1}_{\{\mathbf{0}\}}(t) + \sum_{j=1}^{m-1} \xi_j \mathbf{1}_{\{\tau>\mathbf{t_j}\}} \mathbf{1}_{(\mathbf{t_j},\mathbf{t_{j+1}}]}(t). \tag{3.2}$$

Ponieważ $\xi_j \mathbf{1}_{\{\tau>\mathbf{t_j}\}}$ jest $\mathcal{F}_{t_j}$ mierzalną i ograniczoną zmienną losową, powyższa równość pokazuje, że $\mathbf{1}_{[\mathbf{0},\tau]} X \in \mathcal{E}$ oraz pozwala policzyć wprost z definicji całkę stochastyczną tego procesu. Dokładniej

$$\begin{aligned}
\int_0^t \mathbf{1}_{[\mathbf{0},\tau]}(s) X_s dW_s &= \sum_{j=1}^{m-1} \xi_j \mathbf{1}_{\{\tau>\mathbf{t_j}\}} (W_{t_{j+1}\wedge t} - W_{t_j \wedge t}) = \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{k=j+1}^{m} \xi_j \mathbf{1}_{\{\tau=\mathbf{t_k}\}} (W_{t_{j+1}\wedge t} - W_{t_j \wedge t}) \\
&= \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{k-1} \mathbf{1}_{\{\tau=\mathbf{t_k}\}} \xi_j (W_{t_{j+1}\wedge t} - W_{t_j \wedge t}) \\
&= \sum_{k=1}^{m} \mathbf{1}_{\{\tau=\mathbf{t_k}\}} \sum_{j=1}^{k-1} \xi_j (W_{t_{j+1}\wedge t} - W_{t_j \wedge t}) \\
&= \sum_{k=1}^{m} \mathbf{1}_{\{\tau=\mathbf{t_k}\}} \int_0^{t\wedge t_k} X_s dW_s = \int_0^{\tau\wedge t} X_s dW_s,
\end{aligned} \tag{3.3}$$

co kończy dowód w najprostszym przypadku.

Uwaga Powyższe rachunki są dość formalne i sprowadzają się do zmiany kolejności sumowania. Tak naprawdę równość (3.2) można dość łatwo sprawdzić na rysunku, przedstawiając symbolicznie zbiór $[0, T] \times \Omega$, dzieląc oś czasu na przedziały $(t_j, t_{j+1}]$ (na których X jest przy ustalonej ω stały, równy $\xi_j(\omega)$) i patrząc, co się „wyzeruje" po wymnożeniu przez $\mathbf{1}_{[\mathbf{0},\tau]}$. Podobnie równość (3.3) można otrzymać, patrząc które części w sumie definiującej całkę się „wyzerują" dla $\tau = t_k$. Jest to oczywiście w gruncie rzeczy to samo rozumowanie co zapisane powyżej, ale chyba bardziej pokazuje co się dzieje niż formalne napisy.

b) W kolejnym kroku udowodnimy tezę dla τ – dowolnego momentu zatrzymania, ciągle przy założeniu, że $X \in \mathcal{E}$.

W standardowy sposób konstruujemy ciąg τ_n momentów zatrzymania, przyjmujących tylko skończenie wiele wartości, takich że $\tau_n \searrow \tau$. Z ciągłości trajektorii całek stochastycznych, mamy

$$\int_0^{\tau_n \wedge t} X_s dWs \to \int_0^{\tau \wedge t} X_s dW_s \text{ p.n.}$$

Aby uzyskać tezę, wystarczy więc pokazać, że $\int_0^t \mathbf{1}_{[\mathbf{0},\tau_\mathbf{n}]}(s) X_s dW_s \to \int_0^t \mathbf{1}_{[\mathbf{0},\tau]}(s) X_s dW_s$ w $L^2(\Omega)$. Udowodnimy więcej, mianowicie zbieżność $\int \mathbf{1}_{[\mathbf{0},\tau_\mathbf{n}]} X dW \to \int \mathbf{1}_{[\mathbf{0},\tau]} X dW$ w przestrzeni $\mathcal{M}_T^{2,c}$. Ponieważ całka Ito jest izometrią między $\mathcal{L}_T^2$ i $\mathcal{M}_T^{2,c}$, wystarczy pokazać zbieżność $\mathbf{1}_{[\mathbf{0},\tau_\mathbf{n}]} X \to \mathbf{1}_{[\mathbf{0},\tau]} X$ w $\mathcal{L}_T^2$. To jednak jest proste

$$\begin{aligned}\|\mathbf{1}_{[\mathbf{0},\tau_\mathbf{n}]} X - \mathbf{1}_{[\mathbf{0},\tau]} X\|_{\mathcal{L}_T^2}^2 &= \mathbf{E} \int_0^T (\mathbf{1}_{[\mathbf{0},\tau_\mathbf{n}]}(s) X_s - \mathbf{1}_{[\mathbf{0},\tau]}(s) X_s)^2 ds \\ &= \mathbf{E} \int_0^T \mathbf{1}_{(\tau,\tau_\mathbf{n}]}(s) X_s^2 ds \to 0,\end{aligned}$$

z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej.

c) W ostatnim kroku udowodnimy twierdzenie dla dowolnych τ, X. Niech $X_n \in \mathcal{E}$, $X_n \to X$ w $\mathcal{L}_T^2$. Wówczas, jak łatwo sprawdzić, również $\int_{[0,\tau]} X_n \to \mathbf{1}_{[\mathbf{0},\tau]} X$ w $\mathcal{L}_T^2$, skąd dostajemy $\int_0^t \mathbf{1}_{[\mathbf{0},\tau]}(s) X_n(s) dW_s \to \int_0^t \mathbf{1}_{[\mathbf{0},\tau]}(s) X dW_s$ w $L^2(\Omega)$ (argumentujemy jak w punkcie b)). Wystarczy zatem pokazać, że $\int_0^{\tau \wedge t} X_n(s) dW_s \to \int_0^{\tau \wedge t} X_s dW_s$, również w $L^2(\Omega)$. Ale

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\Big(\int_0^{\tau \wedge t} X_n(s) dW_s - \int_0^{\tau \wedge t} X_s dW_s\Big)^2 &\leq \mathbf{E}\Big(\int_0^T X_n(s) dW_s - \int_0^T X_s dW_s\Big)^2 \\ &= \|X - X_n\|_{\mathcal{L}_T^2}^2 \to 0,\end{aligned}$$

gdzie nierówność wynika z Twierdzenia Dooba (zastosowanego do ciągłego podmartyngału $(\int (X - X_n) dW)^2$ oraz ograniczonego momentu stopu $\tau \wedge t$) zaś równość, znów z faktu, że całka Ito jest izometrią, między $\mathcal{L}_T^2$ oraz $\mathcal{M}_T^{2,c}$.

■

Wniosek 3 *Niech $X \in \mathcal{L}_T^2$. Wówczas proces*

$$M(t) = \Big(\int_0^t X(s) dW(s)\Big)^2 - \int_0^t X(s)^2 ds$$

jest martyngałem

Dowód. Wystarczy pokazać, że dla każdego ograniczonego momentu zatrzymania τ, $\mathbf{E}M_\tau = 0$. Ale z Twierdzenia o zatrzymywaniu całki stochastycznej

$$M_\tau = (\int_0^\tau X(s)dW(s))^2 - \int_0^\tau X(s)^2 ds = \big(\int_0^T X(s)\mathbf{1}_{[\mathbf{0},\tau]}(s)dW(s)\big)^2 - \int_0^T X(s)^2\mathbf{1}_{[\mathbf{0},\tau]}(s)ds,$$

zatem rzeczywiście

$$\mathbf{E}M_\tau = \mathbf{E}\big(\int_0^T X(s)\mathbf{1}_{[\mathbf{0},\tau]}(s)dW(s)\big)^2 - \mathbf{E}\int_0^T X(s)^2\mathbf{1}_{[\mathbf{0},\tau]}(s)ds = 0,$$

gdzie ostatnia równość wynika z faktu, że całka stochastyczna jest izometrią między $\mathcal{L}^2_T$ oraz $\mathcal{M}^{2,c}_T$.

■

Twierdzenie o zatrzymywaniu całki stochastycznej pozwoli nam na rozszerzenie definicji całki stochastycznej na szerszą klasę procesów niż $\mathcal{L}^2_T$.

Definicja 7 *Niech*

$$\Lambda^2_T = \{(X(t))_{t\in[0,T)}\colon X - \text{ prognozowalny }, \forall_{t<T} \int_0^t X_s^2 ds < \infty \text{ p.n.}\}$$

Oczywiście $\mathcal{L}^2_T \subsetneq \Lambda^2_T$. Chcielibyśmy zdefiniować $\int X(s)dW(s)$ dla $X \in \Lambda^2_T$, tak aby „nowa” całka stanowiła rozszerzenie całki Itô. W tym celu dla $X \in |Lambda^2_T$, wprowadźmy ciąg momentów stopu

$$\tau_n = \inf\{t < T\colon \int_0^t X(s)^2 ds \geq n\}, \tag{3.4}$$

gdzie jak zwykle przyjmujemy konwencję $\inf\emptyset = T$. Z definicji Λ^2_T, otrzymujemy natychmiast $\tau_n \nearrow T$ p.n. Ponadto dla dowolnego n, $\mathbf{1}_{[\mathbf{0},\tau_\mathbf{n}]}X \in \mathcal{L}^2_T$, zatem możemy zdefiniować proces

$$M_n(t) = \int_0^t \mathbf{1}_{[\mathbf{0},\tau_\mathbf{n}]}X dW,$$

jako całkę stochastyczną w sensie Itô).

Zachodzi następujący

Lemat 1 *Dla $m \geq n$ oraz $t \leq \tau_n$*

$$M_n(t) = M_m(t),$$

czyli (wobec ciągłości trajektorii) procesy $M_m^{\tau_n}$ oraz M_n są nierozróżnialne.

Dowód. Z twierdzenia o zatrzymywaniu całki stochastycznej oraz nierówności $\tau_n \leq \tau_m$ p.n., mamy

$$M_m(\tau_n \wedge t) = \int_0^{t\wedge\tau_n} \mathbf{1}_{[\mathbf{0},\tau_\mathbf{m}]}(s)X(s)dW(s) = \int_0^t \mathbf{1}_{[\mathbf{0},\tau_\mathbf{n}]}(s)\mathbf{1}_{[\mathbf{0},\tau_\mathbf{m}]}(s)X(s)dW(s)$$
$$= \int_0^t \mathbf{1}_{[\mathbf{0},\tau_\mathbf{n}]}(s)X(s)dW(s) = M_n(t).$$

■

Zatem, dla pewnego zbioru $\tilde{\Omega} \subseteq \Omega$ o prawdopodobieństwie 1, dla ustalonych wartości $\omega \in \tilde{\Omega}, t < T$, ciąg $M_n(\omega, t)$ stabilizuje się, tzn. dla $n, m \geq n_0(w, t)$, $M_m(\omega, t) = M_n(\omega, t)$. Pozwala nam to wprowadzić następującą definicję

Definicja 8 *Jedyny (modulo nieodróżnialność) proces $(M(t))_{t\in[0,T)}$, taki że dla każdego $n \in \mathbb{N}$*

$$\int \mathbf{1}_{[\mathbf{0},\tau_\mathbf{n}]}(s)X(s)dW(s) = M^{\tau_n},$$

gdzie wyrażenie po lewej stronie oznacza całkę Itô, nazywamy całką stochastyczną procesu X i oznaczamy

$$M(t) = \int_0^t X(s)dW(s) = \int_0^t XdW.$$

Własności całki stochastycznej

1. M nie zależy od ciągu definiującego τ_n, tzn. gdybyśmy zamiast ciągu τ_n zdefiniowanego wzorem (3.4), użyli w definicji innego ciągu momentów zatrzymania τ_n', takiego że $\tau_n' \nearrow \tau$ oraz $X\mathbf{1}_{[\mathbf{0},\tau_\mathbf{n}']} \in \mathcal{L}_T^2$ (są to jedyne własności, z których korzystaliśmy, konstruując całkę $\int XdW$), w wyniku dostalibyśmy ten sam proces.

2. $\int_0^0 XdW = 0$, ponadto $\int XdW$ ma ciągłe trajektorie (wynika to bezpośrednio z konstrukcji, gdzie całkę stochastyczną otrzymaliśmy poprzez sklejanie procesów ciągłych).

3. Istnieje ciąg momentów zatrzymania $\tau_n \nearrow \tau$, taki że dla każdego $n \in \mathbb{N}$, $(\int XdW)^{\tau_n} \in \mathcal{M}_T^{2,c}$ (co również wynika bezpośrednio z konstrukcji). Własność ta jest ważna i zostanie wraz z konsekwencjami dokładniej przedyskutowana w dalszej części wykładu (patrz Def. 9)

4. Zachodzi analog Twierdzenia 2, tzn. jeśli $X \in \Lambda_T^2$ oraz $\tau \leq T$ jest momentem stopu, to również $X\mathbf{1}_{[\mathbf{0},\tau]} \in \Lambda_T^2$ oraz

$$\int_0^{t\wedge\tau} XdW = \int \mathbf{1}_{[\mathbf{0},\tau]}XdW.$$

5. Przekształcenie $\Lambda_T^2 \ni X \mapsto \int XdW$ jest liniowe.

6. Zachodzi *nierówność Dooba*, tzn. dla dowolnego momentu zatrzymania $\tau \leq T$

$$\mathbf{E}(\sup_{t<\tau}(\int_0^t X(s)dW(s))^2) \leq 4\mathbf{E}\int_0^\tau X_s^2 ds$$

Przyjrzyjmy się teraz bliżej własności 3), która ukazuje istotną różnicę między całką izometryczną Ito, a jej rozszerzeniem na Λ_T^2. Całka Ito jest z definicji ciągłym martyngałem, własność 3) jest więc dla niej oczywista, momenty zatrzymania τ_n mogą być wręcz deterministyczne. Okazuje się, że dla $X \in \Lambda_T^2$, proces $M = \int XdW$ nie musi być martyngałem (może się wręcz zdarzyć, że $\mathbf{E}|M_t| = \infty$), niemniej może być w pewnym sensie przybliżany przez martyngały. Jest to bardzo użyteczna własność, motywująca wprowadzenie ogólniejszej definicji.

Definicja 9 *Proces adaptowany* $(M_t)_{t\in[0,T)}$ *nazwiemy* martyngałem lokalnym, *jeśli istnieje ciąg momentów stopu* $\tau_n \nearrow T$*, taki że dla każdego n, proces* M^{τ_n} *jest martyngałem. Ciąg* τ_n *nazywamy wówczas ciągiem lokalizującym* M*.*

Łatwo sprawdzić, że proces M jest ciągłym martyngałem lokalnym, wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ciąg momentów zatrzymania jak w Definicji 9, o tej własności, że dla każdego n, proces M^{τ_n} jest ciągłym martyngałem. Co więcej, dla każdego ciągłego martyngału lokalnego istnieje ciąg $\tau_n \nearrow T$, taki że $M^{\tau_n} \in \mathcal{M}^{2,c}$.

Własność 3) oznacza więc, że całka stochastyczna jest martyngałem lokalnym. Przy pewnych dodatkowych założeniach możemy jednak wnioskować, że całka stochastyczna jest martyngałem, o czym mówi następujące

Twierdzenie 3 *Jeśli dla każdego* $t < T$, $\mathbf{E}\int_0^t X(s)^2 ds < \infty$*, to* $M = \int XdW$ *jest martyngałem.*

Dowód. W definicji martyngału rozpatrujemy jedynie pary $M(t_1), M(t_2)$, przy $t_1, t_2 < T$, a nasze założenia mówią, że na odcinkach $[0,t], t < T$, proces M może być zdefiniowany jako całka Ito, więc jest martyngałem.

■

Na zakończenie rozdziału podamy jeszcze kilka własności martyngałów lokalnych, których udowodnienie pozostawimy jako ćwiczenie.

Twierdzenie 4 *Każdy ciągły i ograniczony martyngał lokalny jest martyngałem, zaś każdy ciągły, nieujemny martyngał lokalny jest nadmartyngałem.*

Rozdział 4

Całkowanie przez części

4.1 Proces wariacji kwadratowej

Uwaga 8 *Można powtórzyć całą poprzednią dyskusję (teoria całki), biorąc zamiast W (proces Wienera) dowolny martyngał $M \in \mathcal{M}^{2,c}$ taki, że istnieje proces $\langle M \rangle$ spełniający warunki:*

1. *adaptowalny,*
2. *ciągły, niemalejący, $\langle M \rangle(0) = 0$,*
3. *$M^2 - \langle M \rangle$ jest martyngałem.*

Pokazaliśmy na przykład, że jeśli $M = \int_0^t X dW$, to $\langle M \rangle(t) = \int_0^t X(s)^2 ds$.

Twierdzenie 5 *(Tw. Dooba-Meyera) Dla każdego $M \in \mathcal{M}^{2,c}$ istnieje proces $\langle M \rangle$ spełniający warunki 1.-4. (patrz np. książka Karatzas-Shreve).*

Definiujemy przestrzenie $\mathcal{L}_T^2(M)$ jako klasę procesów prognozowalnych, takich, że

$$\mathbf{E} \int_0^T X(s)^2 d\langle M \rangle < \infty.$$

Dla ułatwienia $\mathcal{L}_T^2 = \mathcal{L}_T^2(W)$. Podobnie $\Lambda_T^2(M)$ oznacza przestrzeń procesów prognozowalnych takich, że

$$\int_0^t X(s)^2 d\langle M \rangle < \infty, \ \ p.n., \ \ \text{dla } t < T.$$

Uwaga 9 *Proces $\langle M \rangle$ jest wyznaczony jednoznacznie.*

Twierdzenie 6 *Niech $M \in \mathcal{M}^{2,c}$, $t < T$, a $(t_j^n)_n$ będzie ciągiem podziałów normalnych odcinka $[0,t]$. To znaczy*

$$0 = t_0^n < t_1^n < ... < t_{m_n}^n = t$$

oraz $\max_j(t_{j+1}^n - t_j^n) \to 0$ *jeśli* $n \to \infty$. *Definiujemy*

$$V_n(M,t) = \sum_{j=0}^{m_n-1} (M(t_{j+1}^n) - M(t_j^n))^2.$$

Wówczas $\lim_{n\to\infty} V_n(M,t) = \langle M\rangle(t)$ *w* $L^1(\Omega)$.

Dowód. Potrzebujemy dwóch prostych faktów (na ćwiczenia).

Lemat 2 *Niech ξ_n $n = 1,2,...$ będzie ciągiem zmiennych losowych określonych na przestrzeni $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Niech zbiory $A_k \in \mathcal{F}$, $k = 1,2,...$, będą takie, że $A_k \nearrow \Omega$, a ciąg $(1_{A_k}\xi_n)_n$ zbiega według $\mathbf{P}$. Wówczas $(\xi_n)_n$ zbiega według $\mathbf{P}$.*

Lemat 3 *Jeśli $\xi_n \geqslant 0$, $\xi_n \xrightarrow{\mathbf{P}} \xi$ oraz $\mathbf{E}\xi_n = \mathbf{E}\xi < \infty$, to $\xi_n \to \xi$ w $L^1(\Omega)$.*

Można założyć, że $M(0) = 0$ zastępując M procesem $M - M(0)$. W istocie wystarczy pokazać, że $\langle M \rightarrow= \langle M - M(0)\rangle$ oraz $V_n(M,t) = V_n(M - M(0), t)$. Mamy

$$(M - M(0))^2 - \langle M\rangle = M^2 - \langle M\rangle + 2M(0)M + M^2(0).$$

Każdy z trzech składników jest martyngałem (sprawdzić!). Suma martyngałów jest martyngałem, a zatem z jednoznaczności procesu wariacji kwadratowej wynika, że $\langle M\rangle = \langle M - M(0)\rangle$. Oczywiście $V_n(M,t) = V_n(M - M(0), t)$.

(1) Załóżmy, że M jest ograniczony, $M(t,\omega) \leqslant C$, dla t,ω. Przypomnijmy, że

$$M(t)^2 = V_n(M,t) + 2\sum_{j=0}^{m_n-1} M(t_j^n)(M(t_{j+1}^n) - M(t_j)). \tag{4.1}$$

Niech $N_n(t) := \sum_{j=0}^{m_n-1} M(t_j^n)(M(t_{j+1}^n) - M(t_j^n))$. Ponadto niech

$$X_n(s) := \sum_{j=0}^{m_n-1} M(t_j^n)1_{(t_j^n, t_{j+1}^n]}(s).$$

Oczywiście $X_n \in \mathcal{E}$. Zauważmy, że $N_n(t) = \int_0^t X_n dM$. Ponieważ $X_n \to M$ p.n. oraz w $\mathcal{L}_t^2(M)$, więc dobrze zdefiniowany jest proces $N = \int MdM$ w $\mathcal{M}_t^{2,c}$. Zauważmy, że

$$V_n(M,t) = M(t)^2 - 2N_n(t) \to M(t)^2 - 2N(t) \text{ w } L^2(\Omega).$$

Z definicji $M(t)^2 - 2N(t)$ nie zależy od wyboru ciągu podziałów. Niech $s < t$, możemy brać podziały normalne $[0, t]$ zawierające punkt s. Dla takich podziałów $V_n(M, s) \leqslant V_n(M, t)$. Stąd

$$M(s)^2 - 2N(s) \leqslant M(t)^2 - 2N(t).$$

Z ciągłości M, N wynika ciągłość $M^2 - 2N$. Zatem $M^2 - 2N$ jest ciągły , rosnący, 0 w 0. Ponieważ N jest martyngałem, więc $M^2 - (M^2 - 2N)$ jest martyngałem. Stąd $M^2 - 2N = \langle M \rangle$.

(2) Niech $M \in \mathcal{M}^{2,c}$, $\tau_n \nearrow T$ takie, że M^{τ_k} jest ograniczonym martyngałem. Na przykład $\tau_k := \inf\{t : \ |M(t)| \geqslant n\}$. Z punktu (1) wiemy

$$V_n(M^{\tau_k}, t) \to \langle M^{\tau_k} \rangle(t), \ \text{ w } L^2(\Omega).$$

Potrzebujemy następującej obserwacji (na ćwiczenia).

Lemat 4 *Zachodzi równość* $\langle M^{\tau_k} \rangle = \langle M \rangle^{\tau_k}$

Zauważmy, że dla $k \in \mathbb{N}$

$$1_{\{t \leqslant \tau_k\}} V_n(M, t) = 1_{\{t \leqslant \tau_k\}} V_n(M^{\tau_k}, t) \to 1_{\{t \leqslant \tau_k\}} \langle M^{\tau_k} \rangle(t) = 1_{\{t \leqslant \tau_k\}} \langle M \rangle(t),$$

gdzie zbieżność jest w sensie $L^2(\Omega)$, a więc i względem $\mathbf{P}$. Ponieważ, $\{t \leqslant \tau_k\} \nearrow \Omega$, więc na mocy Lematu 2 dostajemy, że $V_n(M, t) \to \langle M \rangle(t)$ względem $\mathbf{P}$.

(3) Żeby pokazać, zbieżność w $L^1(\Omega)$ potrzebujemy następującego oszacowania (na ćwiczenia).

Lemat 5 *Niech* $M, M' \in \mathcal{M}^{2,c}$, $M(0) = M'(0) = 0$. *Zachodzi nierówność*

$$\mathbf{E}|V_n(M, t) - V_n(M', t)| \leqslant \|M - M'\|^2 + 2\|M'\|\|M - M'\|.$$

Niech teraz τ_k będzie jak w (2). Z twierdzenia Dooba wynika

$$\mathbf{E} \sup_k M^2(\tau_k \wedge t) \leqslant 4\mathbf{E} M^2(t),$$

co implikuje, że $M(\tau_k \wedge t) \to M(t)$ w $L^2(\Omega)$. Zatem z Lematu 5 wynika zbieżność $V_n(M^{\tau_k}, t) \to \langle M \rangle$(t) względem $\mathbf{P}$. Ponadto

$$\mathbf{E} V_n(M, t) \leftarrow \mathbf{E} V_n(M^{\tau_k}, t) = \mathbf{E}(M^{\tau_k})^2(t) \to \mathbf{E}\langle M \rangle(t).$$

To znaczy $\mathbf{E} V_n(M, t) = \mathbf{E}\langle M \rangle(t)$. Z Lematu 3 wynika zbieżność $V_n(M, t) \to \langle M \rangle(t)$ w $L^1(\Omega)$.

■

Wniosek 4 *Wariacja kwadratowa całki stochastycznej. Niech* $(t_j^n)_n$ *będzie ciągiem podziałów normalnych,* $M = \int XdW$*, wówczas*

1. $X \in \mathcal{L}_T^2 \Rightarrow V_n(M,t) \to \int_0^2 X(s)^2 ds$ *w* $L^1(\Omega)$*;*

2. $X \in \Lambda_T^2 \Rightarrow V_n(M,t) \to \int_0^2 X(s)^2 ds$ *względem* $\mathbf{P}$*.*

Dowód. Punkt (1) wynika z Twierdzenia 6. Punkt (2) dostajemy z Lematu 2.

■

4.2 Iloczyn skośny

Definicja 10 *Niech* $M, N \in \mathcal{M}^{2,c}$*. Definiujemy*

$$\langle M, N\rangle := \frac{1}{4}(\langle M+N\rangle - \langle M-N\rangle).$$

Proces ten będziemy nazywać iloczynem skośnym procesów M, N*.*

Stwierdzenie 4 *Tak zdefiniowany proces* $\langle M, N\rangle$ *jest jedynym procesem ciągłym,* 0 *w* 0*, o trajektoriach o wahaniu skończonym ma każdym przedziale ograniczonym takim, że* $MN - \langle M, N\rangle$ *jest martyngałem. Co więcej, dla każdego ciągu podziałów normalnych* $(t_j^n)_n$*, to znaczy spełniającego warunki*

$$t < T,\ \ 0 = t_0^n < \dots < t_m^n = t,\ \ max_j(t_{j+1}^n - t_j^n) \to 0 \ \ gdy\, n \to \infty,$$

zachodzi

$$\sum_{j=0}^{n_m-1}(M(t_{j+1}^n) - M(t_j^n))(N(t_{j+1}^n) - N(t_j^n)) \xrightarrow{L_1} \langle M, N\rangle.$$

Dowód. Warto zwrócić uwagę, że dla $a, b \in \mathbb{R}$

$$ab = \frac{1}{4}((a+b)^2 - (a-b)^2).$$

Ponadto $(M+N)^2 - \langle M+N\rangle$ i $(M-N)^2 - \langle M-N\rangle$ są martyngałami. Zatem z uwagi powyżej i z Twierdzenia 6 wynika teza stwierdzenia.

■

Własności iloczynu skośnego

1. $\langle M, M\rangle = \langle M\rangle$;

2. $\langle M, N\rangle$ jest dwuliniowy;

3. Jeśli $M \in \mathcal{M}^{2,c}$, $X \in \Lambda^2_T(M)$, to

$$(\int XdM)^\tau = \int XdM^\tau = \int 1_{(0,\tau]}XdM.$$

4. Zachodzi równość $\mathcal{M}^c_{loc} = \mathcal{M}^{2,c}_{loc}$. To znaczy każdy martyngał lokalny, ciągły jest w klasie martyngałów lokalnych, ciągłych całkowalnych z kwadratem. Przypomnijmy, że $M \in \mathcal{M}^c_{loc}$ jeśli M jest ciągły, a ponadto istnieje ciąg lokalizujący momentów zatrzymania $(\tau_n)_n$ taki, że $\tau_n \nearrow T$ i M^{τ_n} jest martyngałem.

5. Dla dowolnego $M \in \mathcal{M}^{2,c}_{loc}$ istnieje proces $\langle M\rangle$ rosnący, 0 w 0 i taki, że $M^2 - \langle M\rangle$ jest martyngałem lokalnym. To znaczy $\tau_n \nearrow T$, $M^{\tau_n} \in \mathcal{M}^{2,c}$ oraz $(M^{\tau_n})^2 - \langle M^{\tau_n}\rangle$ jest martyngałem (na ćwiczenia).

   W konsekwencji całka stochastyczna $\int XdM$ jest dobrze zdefiniowana dla procesów z klasy $\Lambda^2_T(M)$, gdzie $M \in \mathcal{M}^{2,c}_{loc}$, oraz

   $$\int_0^t X^2(s)d\langle M\rangle < \infty \text{ p.n.}$$

   Zauważmy, że $\int XdM$ jest, przy takich założeniach, martyngałem lokalnym takim, że

   $$\int_0^{t\wedge\tau_k} XdM := \int_0^t 1_{[0,\tau_k)}XdM^{\tau_k}.$$

   Poprawność tej definicji zostanie wykazana na ćwiczeniach.

6. Definicja $\langle M, N\rangle$ rozszerza się dla dowolnych $M, N \in \mathcal{M}^{2,c}_{loc}$.

7. Z Wniosku 4 wynika, że jeśli $M = \int XdW$, $X \in \Lambda^2_T$, to

   $$V_n(M,t) \xrightarrow{\mathbf{P}} \int X^2 ds \text{ czyli } \langle M\rangle = \int X^2 ds.$$

   Niech teraz $M = \int XdW$, $N = \int YdW$, $X, Y \in \Lambda^2_T$. Wówczas

   $$\langle M, N\rangle = \int XYds.$$

8. To samo co w powyższym punkcie zachodzi gdy zamiast pary (W,t), weźmiemy $(M, \langle M\rangle)$.

Definicja 11 *Proces Y nazywamy lokalnie ograniczonym, jeśli istnieje ciąg momentów zatrzymania τ_n taki, że $Y^{\tau_n} - Y(0)$ jest ograniczony.*

Na przykład jeśli Y ciągły, to jest lokalnie ograniczony. Istotnie wystarczy wziąć $\tau_n = \{t : |Y(t) - Y(0)| \geqslant n\}$. Warto też zwrócić uwagę, że jeśli Y jest lokalnie ograniczony, to $Y \in \Lambda^2_T(M)$ dla dowolnego martyngału $M \in \mathcal{M}^{2,c}_{loc}$ (na ćwiczenia).

Stwierdzenie 5 *Zachodzą następujące fakty*

1. *Niech $X \in \mathcal{L}^2_T$, Y-prognozowalny ograniczony. Definiujemy $M = \int XdW$, wówczas $\int YdM = \int XYdW$.*

2. *Niech $X \in \Lambda^2_T$, Y-prognozowalny, lokalnie ograniczony, to zachodzi ten sam wzór co w punkcie 1., czyli $\int YdM = \int XYdW$.*

Dowód. (Punkt 1.) Niech $X \in \mathcal{E}$, $Y = \eta_0 1_0 + \sum_{j=1}^{m-1} \eta_j 1_{(t_j,t_{j+1}]}$, η_j ograniczone $\mathcal{F}_{t_j}$ mierzalne

$$\int_0^t YdM = \sum_{j=1}^{m-1} \eta_j (M(t_{j+1} \wedge t) - M(t_j \wedge t)) =$$
$$= \sum_{j=1}^{m-1} \eta_j \int_0^{t_{j+1}\wedge t} XdW - \int_0^{t_j \wedge t} XdW = \sum_{j=1}^{m-1} \eta_j \int_{t_j\wedge t}^{t_{j+1}\wedge t} XdW =$$
$$= \sum_{j=1}^{m-1} \int_{t_j\wedge t}^{t_{j+1}\wedge t} \eta_j XdW = \int_0^t YdW.$$

Niech teraz $Y_n \in \mathcal{E}$, $Y_n \to Y$ w $\mathcal{L}^2_T(M)$. To znaczy

$$\mathbf{E} \int_0^t |Y_n(s) - Y(s)|^2 d\langle M \rangle \to 0, \ \text{ gdy } n \to \infty.$$

Zauważmy (Własność 6.), że $\langle M \rangle = \int X^2 ds$. Zatem

$$\mathbf{E} \int_0^t |Y_n(s) - Y(s)|^2 d\langle M \rangle = \mathbf{E} \int_0^t |Y_n(s) - Y(s)|^2 X(s)^2 ds.$$

Stąd

$$\mathbf{E} \int_0^t |Y_n(s)X(s) - Y(s)X(s)|^2 ds \to 0 \ \text{ gdy } n \to \infty,$$

co oznacza, że $Y_n X \to YX$ w $\mathcal{L}^2_T(W)$.

(Punkt 2.) (na ćwiczenia)

■

Uwaga 10 *Teza Stwierdzenia 4 pozostaje prawdziwa, gdy zamiast W, weźmiemy dowolny martyngał $Z \in \mathcal{M}^{2,c}$.*

4.3 Całkowanie przez części

Udowodnimy teraz zasadniczy wzór, jak się okaże niezbędny przy dowodzeniu wzoru Ito.

Twierdzenie 7 *Niech* $X, Y \in \Lambda_T^2$*,* $M = \int XdW$*,* $N = \int YdW$*, wówczas*

$$MN = \int MdN + \int NdM + \int XYds =$$
$$= \int MYdW + \int NXdW + \int XYds.$$

Zauważmy, że druga równość wynika ze Stwierdzenia 4 (dla procesów lokalnie ograniczonych). Pierwsza równość wynika ze znacznie ogólniejszego faktu.

Twierdzenie 8 *Niech* $M, N \in \mathcal{M}_{loc}^{2,c}$*, wówczas*

$$MN = M(0)N(0) + \int MdN + \int NdM + \langle M, N \rangle.$$

Dowód. (1) Po pierwsze zauważmy, że całki $\int MdN, \int NdM$ są dobrze określone, bo M, N są adaptowalne i ciągłe (stąd prognozowalne i lokalnie ograniczone). Zatem $M \in \Lambda_T^2(N)$, $N \in \Lambda_T^2(M)$. Zauważmy, że

$$\langle \int MdN \rangle = \int M^2 d\langle N \rangle, \quad \langle \int NdM \rangle = \int N^2 d\langle M \rangle.$$

(2) Można założyć, że $M(0) = N(0) = 0$. Istotnie z definicji

$$\langle M - M(0), N - N(0) \rangle = \langle M, N \rangle,$$
$$\int Nd(M - M(0)) = \int NdM, \quad \int Md(N - N(0)) = \int MdN$$

oraz $\int M(0)dN = M(0)(N - N(0))$, $\int N(0)dM = N(0)(M - M(0))$. Jeśli zatem pokażemy twierdzenie dla $M - M(0)$, $N - N(0)$, to

$$(M - M(0))(N - N(0)) = \int (M - M(0))d(N - N(0)) +$$
$$+ \int (N - N(0))d(M - M(0)) + \langle (M - M(0)), (N - N(0)) \rangle =$$
$$= \int MdN - M(0)(N - N(0)) + \int NdM - N(0)(N - N(0)) + \langle M, N \rangle.$$

Wystarczy zauważyć, że

$$(M - M(0))(N - N(0)) = MN - M(0)(N - N(0)) - N(0)(N - N(0)) + M(0)N(0).$$

Zatem zachodzi równość $MN = M(0)N(0) + \int MdN + \int NdM + \langle M, N\rangle$.

(3) Wystarczy udowodnić tezę dla $M = N$, to znaczy

$$M^2 = 2\int MdM + \langle M\rangle.$$

Istotnie stosując powyższą równość do $M+N$, $M-N$ dostajemy

$$MN = \frac{1}{4}((M+N)^2 - (M-N)^2) = \frac{1}{4}(2\int (M+N)d(M+N) + \langle M+N\rangle -$$
$$-2\int (M-N)d(M-N) - \langle M-N\rangle) = \int MdN + \int NdM + \langle M, N\rangle,$$

gdzie w ostatniej linijce skorzystaliśmy ze wzoru na $\langle M, N\rangle$ oraz z liniowości całki stochastycznej, to znaczy

$$\int (X+Y)d(Z_1+Z_2) = \int XdZ_1 + \int XdZ_2 + \int YdZ_1 + \int YdZ_2.$$

Dokonane uproszczenia pozwalają nam przystąpić do zasadniczego dowodu.

(4) Niech $\tau_n = \inf\{t : \ |M(t)| \geqslant n\}$. Zatem M^{τ_n} jest martyngałem ograniczonym. Przypomnijmy, że analogicznie jak dla procesu Wienera można pokazać, że

$$(M^{\tau_n})^2 = 2\int M^{\tau_n} dM^{\tau_n} + \langle M^{\tau_n}\rangle. \tag{4.2}$$

Zachodzi równość $\langle M\rangle^{\tau_n} = \langle M^{\tau_n}\rangle$, a ponadto

$$\int_0^t M^{\tau_n} dM^{\tau_n} = \int_0^{t\wedge\tau_n} M^{\tau_n} dM = \int_0^{t\wedge\tau_n} 1_{[0,\tau_n]} M^{\tau_n} dM =$$
$$= \int_0^t 1_{[0,\tau_n]} MdM = \int_0^{t\wedge\tau_n} MdM.$$

Przechodząc z n do ∞ w równości

$$(M^{\tau_n})^2(t) = 2\int_0^{t\wedge\tau_n} MdM + \langle M\rangle^{\tau_n}(t)$$

kończymy dowód twierdzenia.

■

Definicja 12 *Oznaczmy przez $\mathcal{V}^c$ procesy ciągłe adaptowalne o skończonym wahaniu na każdym odcinku $[0,t] \subset [0,T)$.*

Lemat 6 *Niech $M \in \mathcal{M}_{loc}^{2,c}$, $A \in \mathcal{V}^c$, wówczas*

$$MA = M(0)A(0) + \int AdM + \int MdA,$$

gdzie całka $\int AdM$ jest całką stochastyczną, a $\int MdA$ zwykłą całką Stiltjesa (zdefiniowaną dla każdego ω).

Dowód. (1) Można założyć, że $M(0) = A(0) = 0$ oraz, że M, A są ograniczone.

(2) Niech $(t_j^n)_n$ będzie ciągiem podziałów normalnych, to znaczy

$$t < T, \ \ 0 = t_0^n < t_1^n ... < t_m^n = t, \ \ \max_j (t_{j+1}^n - t_j^n) \to 0 \ \text{ gdy } n \to \infty.$$

Wówczas

$$M(t)A(t) = \sum_{j=0}^{m_n-1} (M(t_{j+1}^n) - M(t_j^n))(A(t_{j+1}^n) - A(t_j^n)) +$$

$$+ \sum_{j=0}^{m_n-1} M(t_j^n)(A(t_{j+1}^n) - A(t_j^n)) + \sum_{j=1}^{m_n} A(t_j^n)(M(t_{j+1}^n) - M(t_j^n)).$$

Zauważmy, że

$$\sum_{j=0}^{m_n-1} M(t_j^n)(A(t_{j+1}^n) - A(t_j^n)) \to \int_0^t MdA, \ \ \sum_{j=0}^{m_n-1} A(t_{j-1}^n)(M(t_{j+1}^n) - M(t_j^n)) \to \int_0^t AdM$$

oraz

$$|\sum_{j=0}^{m_n-1} (M(t_{j+1}^n) - M(t_j^n))(A(t_{j+1}^n) - A(t_j^n))| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{(\sum_{j=0}^{m_n-1} (M(t_{j+1}^n) - M(t_j^n))^2)(\sum_{j=0}^{m_n-1} (A(t_{j+1}^n) - A(t_j^n))^2)} \leqslant$$

$$\leqslant \langle M \rangle(t) \max_j |A(t_{j+1}^n) - A(t_j^n)| \|A\|(t) \to 0,$$

gdzie $\|A\|(t)$ oznacza wahanie procesu A w punkcie t.

■

Mamy więc wzory na całkowanie przez części dla $M, N \in \mathcal{M}_{loc}^{2,c}$ jak również w przypadku gdy $A \in \mathcal{V}^c$, $M \in \mathcal{M}_{loc}^{2,c}$. Dla kompletnego zobrazowania zjawiska potrzebujemy następującego lematu.

Lemat 7 *Jeśli $A, B \in \mathcal{V}^c$, to*

$$AB = A(0)B(0) + \int AdB + \int BdA.$$

Dowód lematu przebiega podobnie jak dowód Lematu 6.

Rozdział 5

Wzór Ito

Zaczniemy od następującego faktu (twierdzenia o zbieżności zdominowanej całek stochastycznych).

Stwierdzenie 6 *Niech $M \in \mathcal{M}^{2,c}_{loc}$, X_n prognozowalne takie, że*

$$X_n(t,\omega) \to X(t,\omega).$$

Zakładamy ponadto, że X_n są zdominowane, to znaczy istnieje $Y \in \Lambda^2_T(M)$ takie, że $|X_n(t,\omega)| \leqslant Y(t,\omega)$. Wówczas $X_n, X \in \Lambda^2_T(M)$ oraz

$$\int_0^t X_n dM \xrightarrow{\mathbf{P}} \int_0^t X dM.$$

Dowód. Jest jasne, że $X_n, X \in \Lambda^2_T(M)$ (bo $Y \in \Lambda^2_T(M)$ dominuje te zmienne). Ponadto

$$\int_0^t X_n^2 d\langle M\rangle \leqslant \int_0^t Y^2 \langle M\rangle < \infty.$$

Załóżmy, że τ_k jest ciągiem lokalizującym, czyli $M^{\tau_k} \in \mathcal{M}^{2,c}_T$. Twierdzenie o zatrzymywaniu całki stochastycznej daje nam $1_{(0,\tau_k]}Y \int \mathcal{L}^2_T(M^{\tau_k})$. Zatem z nierówności $1_{(0,\tau_k]}X_n^2 \leqslant 1_{(0,\tau_k]}Y$ wynika, że również $1_{(0,\tau_k]}X_n \in \mathcal{L}^2_T(M^{\tau_k})$. Z klasycznego twierdzenia Lebesgue'a o zmajoryzowanej zbieżności

$$1_{(0,\tau_k]}X_n \to 1_{(0,\tau_k]}X, \ \text{ w } \ \mathcal{L}^2_T(M^{\tau_k}).$$

Czyli

$$\mathbf{E}\int_0^t 1_{(0,\tau_k]}(X_n - X)^2 d\langle M\rangle \to 0, \ \text{ gdy, } \ n \to \infty.$$

Co daje zbieżność w $L^2(\Omega)$

$$\int_0^t 1_{(0,\tau_k]}X_n dM^{\tau_k} \to \int_0^t 1_{(0,\tau_k]}X dM^{\tau_k}$$

Zatem z definicji

$$\int_0^{t\wedge\tau_k} X_n dM \to \int_0^{t\wedge\tau_k} X dM$$

Uwaga, że $A_k = \{\tau_k \geqslant t\} \nearrow \Omega$ razem z Lematem 2 kończy dowód stwierdzenia.

■

Kluczowym pojęciem w teorii całki stochastycznej jest pojęcie semimartyngału.

Definicja 13 *Proces $Z(t)$, $t < T$ nazywamy semimartyngałem ciągłym jeśli*

$$Z = Z(0) + M + A, \quad gdzie$$

$Z(0)$ jest $\mathcal{F}_0$ mierzalne, $M \in \mathcal{M}^{2,c}_{loc}$ natomiast $A \in \mathcal{V}^c$. Ponadto $M(0) = A(0) = 0$.

Uwaga 11 *Jeśli $Z = Z(0) + M + A$ semimartyngałem ciągłym, to M, A są wyznaczone jednoznacznie.*

Dowód. Korzystamy z argumentu dyskutowanego na ćwiczeniach. Gdyby istniały dwa przedstawienia $Z = Z(0) + M + A$, $Z = Z(0) + M' + A'$, to

$$M - M' = -(A - A') \in \mathcal{V}^c.$$

Ponadto $M - M' \in \mathcal{M}^{2,c}_{loc}$ oraz $M(0) - M'(0) = 0$. Stąd $M - M' \equiv 0$. Pokazaliśmy wprawdzie ten fakt dla martyngałów, ale przez zatrzymywanie można go rozszerzyć na martyngały lokalne.

■

Najważniejszym przykładem są procesy

$$Z = Z(0) + \int X dW + \int Y ds,$$

gdzie $X \in \Lambda^2_T$, Y prognozowalny, mierzalny.

Wniosek 5 *Jeśli Z_1, Z_2 są semimartyngałami ciągłymi, to $Z_1 Z_2$ też jest semimartyngałem. Ponadto jeśli*

$$Z_1 = Z_1(0) + M_1 + A_1, \quad Z_2 = Z_2(0) + M_2 + A_2.$$

to

$$Z_1 Z_2 = Z_1(0) Z_2(0) + \int Z_1 dZ_2 + \int Z_2 dZ_1 + \langle M_1, M_2 \rangle. \tag{5.1}$$

Definicja 14 *Niech Z_1, Z_2 będą semimartyngałami takimi, że $Z_1 = Z_1(0) + M_1 + A_1$, $Z_2 = Z_2(0) + M_2 + A_2$. Dla uproszczenia zapisu definiujemy $\langle Z_1, Z_2 \rangle = \langle M_1, M_2 \rangle$.*

W myśl powyższej uwagi wzór na całkowanie przez części przyjmuje szczególnie prostą postać

$$Z_1Z_2 = Z_1(0)Z_2(0) + \int Z_1 dZ_2 + \int Z_2 dZ_1 + \langle Z_1, Z_2\rangle.$$

Zachodzi następujące uogólnienie Uwagi 10.

Uwaga 12 *Niech $Z = Z(0) + M + A$ będzie semimartyngałem. Niech $X \in \Lambda^2_T(M)$, Y-prognozowalny, lokalnie ograniczony. Definiujemy $Z' = \int X dZ$. Zachodzi równość*

$$\int Y dZ' = \int XY dZ.$$

Twierdzenie 9 *(Wzór Ito) Niech $Z = Z(0)+M+A$ będzie ciągłym semimartyngałem. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, będzie klasy C^2. Wówczas zachodzi wzór*

$$f(Z(t)) = f(Z(0)) + \int_0^t f'(Z(s))dZ(s) + \frac{1}{2}\int_0^t f''(Z(s))d\langle M\rangle(s).$$

Innymi słowy $f(Z)$ jest semimartyngałem, działanie funkcji f na semimartyngały (to znaczy $Z \to f \circ Z$) nie wyprowadza poza tą klasę.

Dowód. Warto zwrócić uwagę, że całki powyższych wzorach są dobrze określone. Ponadto wystarczy pokazać twierdzenie dla każdego t z osobna, bo stąd już wynika równość w sensie nieodróżnialności. (Np. dlatego, że trajektorie procesów po lewej i prawej stronie są ciągłe, a zatem równość na przeliczalnym zbiorze indeksów daje równość trajektorii). Będziemy systematycznie upraszczać zagadnienie.

(1) Można założyć, że $Z(0)$ jest ograniczone. Istotnie jeśli $Z(0)$ nie jest ograniczone, to możemy zdefiniować

$$Z_n(0) := Z(0)1_{\{|Z(0)|\leqslant n\}}.$$

Niech $Z_n := Z_n(0)+M+A$. Zauważmy, że $Z_n(t) \to Z(t)$ p.n. dla każdego $t \leqslant T$. Ponadto

$$|f'(Z_n(s)| \leqslant \sup_{n\geqslant 1}|f'(Z_n(s))| \leqslant C(t), \text{ dla } s \leqslant t,$$

gdzie $C(t)$ jest zmienną losową. Stąd wynika, że $\sup_{n\geqslant 1}|f'(Z_n)| \in \Lambda^2_T(M)$, gdyż

$$\int_0^t \sup_{n\geqslant 1}|f'(Z_n)|d\langle M\rangle \leqslant C(t)\langle M\rangle(t) < \infty.$$

Zatem na mocy Stwierdzenia 6 dostajemy, że

$$\int_0^t f'(Z_n)dM \xrightarrow{\mathbf{P}} \int_0^t f'(Z)dM.$$

Ponieważ w oczywisty sposób pozostałe całki we wzorze Ito zbiegają według **P**, więc po lewej stronie mamy ciąg zmiennych $\xi_n := f(Z_n)(t)$ zbieżny p.n. do $\xi := f(Z)(t)$, a po prawej ciąg zmiennych

$$\eta_n := f(Z_n(0)) + \int_0^t f'(Z_n)dZ_n + \frac{1}{2}\int_0^t f''(Z_n)d\langle M\rangle(s)$$

zbieżny według **P** do zmiennej η. Równość $\xi_n = \eta_n$ wraz z jednoznacznością granic dają $\xi = \eta$.

(2) Można założyć, że Z jest ograniczony. Przypuśćmy, że mamy wzór Ito dla Z ograniczonych. Niech Z dowolny taki, że $Z(0)$ ograniczony. Definiujemy momenty zatrzymania

$$\tau_n' := \inf\{t\ |M(t)| \geqslant n\} \wedge T; \quad \tau_n'' := \inf\{t\ |A(t)| \geqslant n\} \wedge T.$$

Niech wreszcie $\tau_n := \tau_n' \wedge \tau_n''$. Mamy $\tau_n \nearrow T$, ponadto

$$Z_n := Z(0) + M^{\tau_n} + A^{\tau_n}$$

jest semimartyngałem ciągłym, ograniczonym. Zauważmy, że $Z_n(t) \to Z(t)$ p.n. Ponadto jeśli wzór Ito jest prawdziwy dla Z_n, to

$$f(Z_n(t)) = f(Z(0)) + \int_0^t f'(Z_n)dM^{\tau_n} + \int_0^t f'(Z_n)dA^{\tau_n} + \frac{1}{2}\int_0^t f''(Z_n)d\langle M^{\tau_n}\rangle =$$
$$= f(Z(0)) + \int_0^{t\wedge\tau_n} f'(Z_n)dM + \int_0^{t\wedge\tau_n} f'(Z_n)dA\frac{1}{2}\int_0^{t\wedge\tau_n} f''(Z_n)d\langle M\rangle.$$

Dla $s \leqslant \tau_n$ mamy równości $A^{\tau_n}(s) = A(s)$, $M^{\tau_n}(s) = M(s)$, $Z_n(s) = Z(s)$. Stąd wynika

$$f(Z_n(t)) = f(Z(0)) + \int_0^{t\wedge\tau_n} f'(Z)dZ\frac{1}{2}\int_0^{t\wedge\tau_n} f''(Z)d\langle M\rangle.$$

Pozostaje zauważyć, że

$$\text{p.n.}\ \ f(Z) \leftarrow f(Z_n) = f(Z(0)) + \int_0^{t\wedge\tau_n} f'(Z)dZ\frac{1}{2}\int_0^{t\wedge\tau_n} f''(Z)d\langle M\rangle \to$$
$$\to f(Z(0)) + \int_0^t f'(Z)dZ + \frac{1}{2}\int_0^t f''(Z)d\langle M\rangle\ \ \text{p.n.}$$

Możemy przejść do najważniejszej części dowodu.

(3) Wystarczy pokazać wzór Ito dla wielomianu. Przypuśćmy, że wiemy, że wzór Ito jest prawdziwy dla wielomianu. Ponieważ f jest klasy C^2, więc istnieje ciąg wielomianów f_n taki, że

$$f_n \to f,\ f_n' \to f',\ f_n'' \to f'',\ \ \text{jednostajnie na}\ \ [-k,k],$$

gdzie k dowolne naturalne. Zauważmy, że skoro Z jest ograniczony, to istnieje $k \in \mathbb{N}$ takie, że $Z(s) \in [-k,k]$ dla każdego $s \leqslant t$. Zatem $f_n(Z) \to f(Z)$ jednostajnie. Podobnie ponieważ

$$|f_n'(Z(s))| \leqslant \sup_n \sup_{x\in[-k,k]} |f'(x)| \leqslant C < \infty,$$

(jest oczywiste, proces stały $C \in \Lambda_T^2(M)$), więc korzystając ze Stwierdzenia 6

$$\int_0^t f_n'(Z)dZ \to \int_0^t f'(Z)dZ, \text{ według } \mathbf{P}.$$

Analogicznie dla $f_n''(Z)$ dostajemy zbieżność

$$\int_0^t f_n''(Z)d\langle M\rangle \to \int_0^t f'(Z)d\langle M\rangle, \text{ według } \mathbf{P}.$$

Zatem znowu korzystając z jednoznaczności granic dostajemy

$$f(Z(t)) = f(Z(0)) + \int_0^t f'(Z)dZ + \frac{1}{2}\int_0^t f''(Z)d\langle M\rangle.$$

Pozostaje nam sprawdzić wzór Ito dla wielomianów.

(4) Zauważmy najpierw, że obie strony wzoru Ito są liniowe względem f. Wystarczy zatem sprawdzić wzór Ito dla $f = x^n$, $n \in \mathbb{N}$. Dla $f \equiv 1$ wzór Ito jest oczywisty. Udowodnimy teraz, że jeśli wzór Ito jest prawdziwy dla wielomianu f to jest prawdziwy dla $g(x) \equiv xf(x)$. Potrzebujemy wzorów

$$g'(x) = f(x) + xf'(x), \quad g''(x) = 2f'(x) + xf''(x).$$

W istocie musimy wykazać, że

$$g(Z(t)) = Z(t)f(Z(t)) = Z(0)f(Z(0)) + \int_0^t (f(Z) + Zf'(Z))dZ +$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^t (2f'(Z) + Zf''(Z))d\langle M\rangle = g(Z(0)) + \int_0^t g'(Z)dZ\frac{1}{2}\int_0^t g''(Z)d\langle M\rangle.$$

Zauważmy, że do $Zf(Z)$ możemy zastosować wzór na całkowanie przez części. To znaczy

$$Zf(Z) = Z(0)f(Z(0)) + \int Zdf(Z) + \int f(Z)dZ + \langle Z, f(Z)\rangle.$$

Korzystając ze wzoru Ito dla f mamy równość

$$\int Zdf(Z) = \int Zd(\int f'(Z)dZ + \frac{1}{2}\int f''(Z)\langle M\rangle)$$

Warto przypomnieć, że $\int Zdf(Z) = \int Zd(f(Z) - f(0))$. Na mocy Uwagi 12

$$\int Zd(\int f'(Z)dZ) = \int Zf'(Z)dZ. \tag{5.2}$$

Podobnie

$$\int Zd(\frac{1}{2}\int f''(Z)\langle M\rangle) = \frac{1}{2}\int Zf''(Z)d\langle M\rangle. \tag{5.3}$$

Pozostaje obliczyć $\langle Z, f(Z)\rangle$. Ze wzoru Ito

$$\begin{aligned} f(Z) &= f(Z(0)) + \int f'(Z)dZ + \frac{1}{2}\int f''(Z)d\langle M\rangle = \\ &= f(Z(0)) + \int f'(Z)d(M+A) + \frac{1}{2}\int f''(Z)d\langle M\rangle \end{aligned}$$

a zatem martyngałem lokalnym w rozkładzie $f(Z)$ jest $\int f'(Z)dM$. Z definicji

$$\langle Z, f(Z)\rangle = \langle M, \int f'(Z)dM\rangle = \langle \int 1dM, \int f'(Z)dM\rangle.$$

Zatem z własności nawiasu skośnego

$$\langle Z, f(Z)\rangle = \int f'(Z)\langle M\rangle. \tag{5.4}$$

Równości (5.2), (5.3), (5.4) dają

$$\begin{aligned} &Z(0)f(Z(0)) + \int Zdf(Z) + \int f(Z)dZ + \langle Z, f(Z)\rangle = \\ &= Z(0)f(Z(0)) + \int (f(Z) + Zf'(Z))dZ + \frac{1}{2}\int (f'(Z) + Zf''(Z))\langle M\rangle. \end{aligned}$$

Zatem wzór Ito jest prawdziwy dla funkcji g. To kończy dowód twierdzenia.

■

Możemy sformułować wersję wielowymiarową twierdzenia Ito.

Twierdzenie 10 *Niech $Z_1, ..., Z_d$ będą semimartyngałami ciągłymi, $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ klasy C^2. Oznaczmy $Z = (Z_1, ..., Z_d)$, $Z = Z(0) + M + A$. Zachodzi równość*

$$f(Z) = f(Z(0)) + \int \nabla f(Z)dZ + \frac{1}{2}\int \nabla^2 f(Z)d\langle M\rangle,$$

gdzie

$$\begin{aligned} \int \nabla f(Z)dZ &= \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f(Z)}{\partial x_i}, \\ \int \nabla^2 f(Z)d\langle M\rangle &= \sum_{i,j=1}^{d} \int \frac{\partial^2 f(Z)}{\partial x_i \partial x_j} d\langle M_i, M_j\rangle. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Rozdział 6

Charakteryzacje procesu Wienera

6.1 Twierdzenie Levy'ego

Twierdzenie 11 *(Tw. Levy'ego) Niech M będzie ciągłym martyngałem lokalnym takim, że $M(0) = 0$. Proces M jest procesem Wienera wtedy i tylko wtedy, gdy $M^2(t) - t$ jest martyngałem lokalnym, to znaczy $\langle M\rangle(t) = t$.*

Dowód. Jeśli $M = W$, to oczywiście $\langle M\rangle = t$. Cała trudność jest w dowodzie twierdzenia przeciwnego.

(1) Pokażemy najpierw, że $M \in \mathcal{M}^{2,c}$. Niech τ_n będzie lokalizacją martyngału lokalnego M. Z definicji $M^2(t\wedge\tau_n) - t\wedge\tau_n$ jest martyngałem. Stosujemy nierówność Dooba

$$\mathbf{E}\sup_{s\leqslant t} M^2(s\wedge\tau_n) = \mathbf{E}\sup_{s\leqslant t\wedge\tau_n} M^2(s) \leqslant 4\mathbf{E}M^2(t\wedge\tau_n).$$

Z lematu Fatou dostajemy

$$\mathbf{E}\sup_{s\leqslant t} M^2(s) \leqslant \lim_{n\to\infty} 4\mathbf{E}(t\wedge tau_n) = 4\lim_{n\to\infty}(t\wedge\tau_n) = 4t.$$

Czyli

$$\mathbf{E}\sup_{s\leqslant t} M^2(s\wedge\tau_n) \leqslant \mathbf{E}\sup_{s\leqslant t} M^2(s) \leqslant 4t, \tag{6.1}$$

co w szczególności oznacza, że rodzina $M^2(s)$ dla $s\in[0,t]$ jest jednostajnie całkowalna. Niech $s < t$. Wiemy, że dla każdego n

$$\mathbf{E}(M(t\wedge\tau_n)|\mathcal{F}_s) = M(s\wedge\tau_n),$$

zatem ponieważ $M(t\wedge\tau_n)\to M(t)$, $M(s\wedge\tau_n)\to M(s)$ p.n., więc

$$\mathbf{E}(M(t)|\mathcal{F}_s) \leftarrow \mathbf{E}(M(t\wedge\tau_n)|\mathcal{F}_s) = M(s\wedge\tau_n) \to M(s), \quad \text{p.n.}$$

Korzystamy tu z faktu, że rodzina zmiennych $(M(t \wedge \tau_n))$ jest jednostajnie całkowalna (nierówność (6.1)). Pokazaliśmy, że M jest martyngałem oraz $\mathbf{E}M^2(t) < \infty$, dla każdego $t < \infty$, co daje $M \in \mathcal{M}^{2,c}$.

(2) Wystarczy pokazać, że dla każdego $h \in \mathbb{R}$, $t \geqslant s$ mamy

$$\mathbf{E}(e^{ih(M(t)-M(s))}|\mathcal{F}_s) = e^{-\frac{1}{2}(t-s)h^2} \tag{6.2}$$

W szczególności

$$\mathbf{E}(e^{ih(M(t)-M(s))}) = e^{-\frac{1}{2}(t-s)h^2}$$

czyli przyrosty $M(t) - M(s)$ są gaussowskie. Pokażemy, że z (5.2) wynika niezależność $M(t) - M(s)$ od σ-ciała $\mathcal{F}_s$. Równoważnie dla każdej zmiennej η mierzalnej względem $\mathcal{F}_s$ zmienne $M(t) - M(s), \eta$ są niezależne. Korzystamy z równości

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}(e^{ih_1(M(t)-M(s))+ih_2\eta}) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(e^{ih_1(M(t)-M(s))+ih_2\eta}|\mathcal{F}_s)) = \\
&= \mathbf{E}(e^{ih_2\eta}\mathbf{E}(e^{ih_1(M(t)-M(s))}|\mathcal{F}_s)) = e^{-\frac{1}{2}(t-s)h_1^2}\mathbf{E}(e^{ih_2\eta}) = \mathbf{E}(e^{ih(M(t)-M(s))})\mathbf{E}(e^{ih_2\eta}),
\end{aligned}$$

dla każdego $h_1, h_2 \in \mathbb{R}$, co jest równoważne niezależności $M(t) - M(s), \eta$.

(3) Udowodnimy równość (5.2). Stosujemy wzór Ito do funkcji $f(x) = e^{ihx}$. Wzór Ito dla funkcji o wartościach zespolonych jest prostym uogólnieniem klasycznego wzoru Ito (sprawdza oddzielnie dla części rzeczywistej i urojonej). Mamy wzory

$$f'(x) = ihe^{ihx}, \quad f''(x) = -h^2e^{ihx}.$$

Zatem na mocy wzoru Ito zachodzi równość

$$\begin{aligned}
e^{ihM(t)} &= 1 + ih\int_0^t e^{ihM(u)}dM(u) - \frac{h^2}{2}\int_0^t e^{ihM(u)}du = \\
&= e^{ihM(s)} + \int_s^t e^{ihM(u)}dM(u) - \frac{h^2}{2}\int_s^t e^{ihM(u)}du.
\end{aligned}$$

Wiemy, że $M \in \mathcal{M}^{2,c}$, oraz $|e^{ihM(u)}| = 1$, zatem $\int e^{ihM}dM \in \mathcal{L}_t^2(M)$ (dla każdego $t < \infty$). Ustalmy dowolny zbiór $A \in \mathcal{F}_s$. Z definicji martyngału wynika, że

$$\mathbf{E}(1_A\int_s^t e^{ihM}dM) = \mathbf{E}(1_A(\int_0^t e^{ihM}dM - \int_0^s e^{ihM}dM)) = 0.$$

Zatem

$$\mathbf{E}(1_Ae^{ihM(t)}) = \mathbf{E}(1_Ae^{ihM(s)}) - \frac{h^2}{2}\mathbf{E}(1_A\int_0^t e^{ihM(u)}du).$$

Oznaczmy $g(r) := \mathbf{E}(1_Ae^{ihM(u+s)})$. Możemy przepisać powyższe równanie

$$g(t-s) = g(0) - \frac{h^2}{2}\int_s^t g(u-s)du = g(0) - \frac{h^2}{2}\int_0^{t-s} g(u)du.$$

Jest to równanie liniowe, które ma dokładnie jedno rozwiązanie

$$g(r) = g(0)e^{-\frac{1}{2}h^2(t-s)}.$$

Co oznacza, że

$$\mathbf{E}(1_A e^{ihM(t)}) = e^{-\frac{1}{2}h^2(t-s)}\mathbf{E}(1_A e^{ihM(s)}).$$

Ponieważ tak jest dla każdego $A \in \mathcal{F}_s$, więc z definicji warunkowej wartości oczekiwanej

$$\mathbf{E}(e^{ihM(t)}|\mathcal{F}_s) = e^{-\frac{1}{2}h^2(t-s)}e^{ihM(s)}.$$

To kończy dowód twierdzenia. Z definicji proces gaussowski, ciągły o przyrostach niezależnych, taki, że $\mathbf{E}M(t) = 0$, $\mathbf{E}M^2(t) = t$ (wnioski z (5.2) jest procesem Wienera.

■

Zachodzi następujące uogólnienie twierdzenia Levy'ego (na ćwiczenia).

Twierdzenie 12 *Niech $M_1, ..., M_d$ będą martyngałami lokalnymi, $M_i(0) = 0$, $i = 1, ..., d$. Wówczas $M = (M_1, ..., M_d)$ jest d-wymiarowym procesem Wienera wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\langle M_i, M_j\rangle(t) = \delta_{i,j}t, \quad \textit{dla } 1 \leqslant i, j \leqslant d.$$

6.2 Martyngały eksponencjalne

Twierdzenie 13 *Niech M będzie procesem ciągłym adaptowalnym, $M(0) = 0$. Wówczas M jest procesem Wienera względem filtracji $(\mathcal{F}_t)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $e^{\lambda M(t)-\frac{\lambda^2}{2}t}$ dla każdego $\lambda \in \mathbb{R}$ jest martyngałem lokalnym.*

Dowód. Podobnie jak w twierdzeniu Levy'ego jeśli $M = W$, to w oczywisty sposób $e^{\lambda M(t)-\frac{\lambda^2}{2}t}$ jest martyngałem lokalnym dla każdego $\lambda \in \mathbb{R}$.
Definiujemy momenty zatrzymania

$$\tau_n = \inf\{t : \ |M(t)| \geqslant n\} \wedge n.$$

Stąd $|M(t \wedge \tau_n)| \leqslant n$ oraz

$$e^{\lambda M(t\wedge\tau_n)-\frac{\lambda^2}{2}(t\wedge\tau_n)} \leqslant e^{|\lambda n|}.$$

Ograniczony martyngał lokalny jest martyngałem. Niech $s < t$, $A \in \mathcal{F}_s$. Mamy równość

$$\mathbf{E}(1_A e^{\lambda M(t\wedge\tau_n)-\frac{\lambda^2}{2}(t\wedge\tau_n)}) = \mathbf{E}(1_A e^{\lambda M(s\wedge\tau_n)-\frac{\lambda^2}{2}(s\wedge\tau_n)}) \tag{6.3}$$

Oznaczmy

$$g(\lambda) = e^{\lambda M(t\wedge\tau_n)-\frac{\lambda^2}{2}(t\wedge\tau_n)}.$$

Mamy

$$|g'(\lambda)| = |(M(t \wedge \tau_n) - \lambda(t \wedge \tau_n))g(\lambda)| \leqslant n(1+|\lambda|)e^{n|\lambda|}.$$

W szczególności $|g'(\lambda)| \leqslant n(1+\lambda_0)e^{n\lambda_0}$, dla $|\lambda| \leqslant \lambda_0$. Zatem można przejść z różniczkowaniem pod znak całki w równości (6.3). Stąd

$$\mathbf{E}(1_A(M(t \wedge \tau_n) - \lambda(t \wedge \tau_n))e^{\lambda M(t\wedge\tau_n) - \frac{\lambda^2}{2}(t\wedge\tau_n)}) =$$
$$= \mathbf{E}(1_A(M(s \wedge \tau_n) - \lambda(s \wedge \tau_n))e^{\lambda M(s\wedge\tau_n) - \frac{\lambda^2}{2}(s\wedge\tau_n)})$$

w pewnym otoczeniu 0 ($|\lambda| < \lambda_0$). Kładąc $\lambda = 0$ dostajemy

$$\mathbf{E}(1_A M(t \wedge \tau_n)) = \mathbf{E}(1_A M(s \wedge \tau_n)).$$

To oznacza, że $\mathbf{E}(M(t \wedge \tau_n)|\mathcal{F}_s) = M(s \wedge \tau_n)$, czyli M jest martyngałem lokalnym. Analogicznie dowodzi sie, że $g''(\lambda) \leqslant C(n, \lambda_0)$, dla $|\lambda| < \lambda_0$. Ponadto zachodzą wzory

$$g''(\lambda) = (M(t \wedge \tau_n) - \lambda(t \wedge \tau_n))^2 g(\lambda) - (t \wedge \tau_n)g(\lambda)$$

oraz

$$g''(0) = M^2(t \wedge \tau_n) - (t \wedge \tau_n).$$

Zatem możemy dwukrotnie przejść z różniczkowaniem pod znak całki w równości (6.3). Dla $\lambda = 0$ dostajemy równość

$$\mathbf{E}(1_A(M^2(t \wedge \tau_n) - (t \wedge \tau_n))) = \mathbf{E}(1_A(M^2(s \wedge \tau_n) - (s \wedge \tau_n))),$$

czyli $\mathbf{E}(M^2(t\wedge\tau_n) - (t\wedge\tau_n)|\mathcal{F}_s) = M^2(s\wedge\tau_n) - (s\wedge\tau_n)$. Stąd $M^2(t) - t$ jest martyngałem lokalnym. Na mocy twierdzenia Levy'ego dostajemy tezę.

■

6.3 Zatrzymywanie martyngałów lokalnych

Lemat 8 *Jeśli $M \in \mathcal{M}^{2,c}_{loc}$, to z $\mathbf{P} = 1$ procesy M i $\langle M \rangle$ mają te same przedziały stałości. To znaczy*

$$\mathbf{P}(\bigcup_{s,t\in[0,T]} (\{\omega \in \Omega : \ M(\omega) \textit{ stałe na } [s,t]\} \triangle \{\omega \in \Omega : \ \langle M \rangle(\omega) \textit{ stałe na } [s,t]\})) = 0,$$

gdzie przez $\triangle$ rozumiemy różnicę symetryczną zbiorów.

Dowód. Można założyć, że $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+} = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s$, bo M jest martyngałem lokalnym, ciągłym. Ponadto można zakładać, że $M \in \mathcal{M}^{2,c}$. Ponieważ M i $\langle M \rangle$ są ciągłe, więc wystarczy pokazać, że dla każdego $r < s$ $r, s \in \mathbb{Q}$ zachodzi

$$\{M: \text{ stałe na } [r,s]\} = \{\langle M \rangle : \ [r,s]\}, \ \text{ p.n.}$$

Definiujemy moment zatrzymania

$$\tau := \inf\{t: \ t > r \ \langle M \rangle(t) > \langle M \rangle(r)\}.$$

To jest moment stopu gdyż $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+}$. Zauważmy teraz, że $1(r, \tau]$ jest ograniczonym procesem prognozowalnym. Ponadto

$$\langle \int 1_{(r,\tau]} dM \rangle = \int 1_{(r,\tau]} d\langle M \rangle = 0$$

Jeśli $N \in \mathcal{M}^{2,c}$, $\langle N \rangle \equiv 0$, to $N \equiv N(0)$ (sprawdzić). Zatem

$$M(\tau \wedge t) - M(r) = \int_0^t 1_{(r,\tau]} = \int_0^t 1_{(r,\tau]} dM = 0.$$

To oznacza, że $M(\tau \wedge t) = M(r)$. Na odwrót $M(\omega)$ stałe na przedziale $[s, t]$, to z Twierdzenia 6 $\langle M \rangle(t) = \langle M \rangle(s)$.

∎

Okazuje się, że każdy odpowiednio stopując martyngał $M \in \mathcal{M}^{2,c}_{loc}$ można otrzymać proces Wienera.

Twierdzenie 14 *Niech $M \in \mathcal{M}^{2,c}_{loc,T}$, $T \leqslant \infty$ będzie takie, że $M(0) = 0$ oraz $\langle M \rangle(T) = \infty$ p.n. Niech*

$$\tau_t := \inf\{s: \ \langle M \rangle(s) > t\}.$$

Wówczas $M(\tau_t)$ jest procesem Wienera. W szczególności, jeśli $X \in \Lambda^2_T$, $\int_0^T X^2(s)ds = \infty$ p.n., to $\tau_t = \inf\{s: \ \int_0^s X^2(u)du > t\}$ oraz $\int_0^{\tau_t} X(u)dW(u)$ jest procesem Wienera.

Dowód. Zauważmy, że τ_t jest dobrze określony (prawostronna ciągłość filtracji $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{t+}$ oraz $\langle M \rangle_T = \infty$ p.n.). Z definicji $\langle M \to (\tau_t) = t$. Ponadto z nierówności Dooba

$$\mathbf{E}(\sup_{s,t \in T} M^2(s)) \leqslant 4\mathbf{E}\langle M \rangle(\tau_t) = 4t.$$

Zauważmy, że τ_t jest niemalejące, czyli jeśli $t_1 \leqslant t_2$, to $\tau_{t_1} \leqslant \tau_{t_2}$. Proces $M(\tau_t \wedge s)$ jest martyngałem jednostajnie całkowalnym, stad $M(\tau \wedge s) = \mathbf{E}(M(\tau_t)|\mathcal{F}_s)$. W szczególności z równości Dooba dla martyngałów jeśli $r < t$, to $\tau_r < \tau_t$ oraz

$$M(\tau_r) = M(\tau_t \wedge \tau_r) = \mathbf{E}(M(\tau_t)|\mathcal{F}_{\tau_r}).$$

Pokazaliśmy, że $M(\tau_t)$ jest martyngałem względem filtracji $\mathcal{F}_{\tau_t}$. Jest jasne, że $M(\tau_t)$ ma prawostronnie ciągłe trajektorie. Pokażemy, że $M(\tau_t)$ jest ciągły. W istocie problem może pojawić się jedynie jeśli $\lim_{r\to t-}\tau_r(\omega) < \tau_t(\omega)$.

Przypuśćmy, że $r \nearrow t$, wówczas $\tau_r(\omega) \nearrow \sigma(\omega) < \tau_t(\omega)$. Wiemy, że

$$\tau_r \leqslant \sigma \quad\Rightarrow\quad r = \langle M\rangle(\tau_r) \leqslant \langle M\rangle(\sigma) \quad\Rightarrow\quad t \leqslant \langle M\rangle(\sigma).$$

Z drugiej strony $\sigma < \tau_t$, a zatem $\langle M\rangle(\sigma) = t$. To pokazuje, że $\langle M\rangle(\sigma) = \langle M\rangle(\tau_t) = t$, czyli $\langle M\rangle$ jest stałe na odcinku $[\sigma, \tau_t]$. Na moc Lematu 8 dostajemy, że M również jest stały na $[\sigma, \tau_t]$. To dowodzi, że $M(\tau_{t-}) = M(\sigma) = M(\tau+)$. Udowodniliśmy, że martyngał $M(\tau_t)$ jest ciągły.

Rozważmy proces $M^2(\tau_t) - \langle M\rangle(\tau_t)$. Pokażemy, że jest to martyngał względem filtracji $(\mathcal{F}_{t+})$. Z nierówności Dooba wynika

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}\sup_{s\leqslant\tau_t}|M^2(s) - \langle M\rangle(s)| = \mathbf{E}\sup_{s\leqslant\tau_t}|M^2(\tau_t\wedge s) - \langle M\rangle(\tau_t\wedge s)| \leqslant \\ &\leqslant \mathbf{E}\sup_{s\leqslant\tau_t} M^2(s) + \mathbf{E}\langle M\rangle(\tau_t) \leqslant 5t.\end{aligned} \tag{6.4}$$

Ponieważ

$$M^2(\tau_t\wedge s) - \langle M\rangle(\tau_t\wedge s) = \mathbf{E}(M^2(\tau_t) - \langle M\rangle(\tau_t)|\mathcal{F}_s),$$

więc z równości Dooba dla $r < t$ $(\tau_r \leftarrow \tau_t)$

$$M^2(\tau_r) - \langle M\rangle(\tau_r) = M^2(\tau_t\wedge\tau_r) - \langle M\rangle(\tau_t\wedge\tau_r) = \mathbf{E}(M^2(\tau_t) - \langle M\rangle(\tau_t)|\mathcal{F}_{\tau_r}).$$

Pokazaliśmy, że $M(\tau_t)$ jest martyngałem ciągłym, $M^2(\tau_t) - \langle M \to (\tau_t)$ również, a ponadto $\langle M\rangle(\tau_t) = t$. Z twierdzenia Levy'ego wynika, że $M(\tau_t)$ jest procesem Wienera względem filtracji $\mathcal{F}_{t+}$.

■

Pozostaje pytanie co jeśli $\mathbf{P}(\langle M\rangle(T) < \infty) > 0$.

Uwaga 13 *Jeśli* $\mathbf{P}(\langle M\rangle(T) < \infty) > 0$*, to jeśli* V *będzie niezależnym od* M *procesem Wienera, wówczas definiując*

$$U(t) := M(\tau_t) + V(t) - V(t\wedge\langle M\rangle(T)),$$

gdzie $\tau_t(\omega) = T$ *dla* $t \geqslant \langle M\rangle(T)$*, oraz* $\tau_t = \inf\{s:\ \langle M\rangle(s) > t\}$ *dla* $t < \langle M\rangle(T)$*, otrzymamy proces Wienera.*

Rozdział 7

Stochastyczne równania różniczkowe

7.1 Proces dyfuzji

Stochastycznym równaniem różniczkowym będziemy nazywać następujące równanie

$$dX(t) = b(X(t))dt + \sigma(X(t))dW(t), \quad t \in [s, T], \tag{7.1}$$

gdzie $X(s) = \xi$, $\xi \in \mathcal{F}_s$. Przez powyższy zapis należy rozumieć, że

$$X(t) = \xi + \int_s^t b(X(u))du + \int_s^t \sigma(X(u))dW(u).$$

Będziemy zakładać, że b, σ są ciągłe (czasami wystarczą słabsze założenia).
W szczególności interesującym przypadkiem jest równanie

$$X(t) = x + \int_0^t b(X(u))du + \int_0^t \sigma(X(u))dW(u).$$

Przypuśćmy, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ istnieje rozwiązanie $X(t, x, \omega)$, mierzalne względem (x, ω). Zamiast wielu procesów można rozważać jeden proces na przestrzeni $\overline{\Omega} = \mathbb{R} \times \Omega$ z filtracją $\overline{\mathcal{F}}_t = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{F}_t$ z rodziną prawdopodobieństw $\mathbf{P}_x = \delta_x \otimes \mathbf{P}$. Proces zadajemy wzorem $X(t, \overline{\omega}) = X(t, x, \omega)$, gdzie $\overline{\omega} = (x, \omega)$. Zatem

$$\mathbf{P}_x(\{(y, \omega) : \ X(0, y, \omega) = x\}) = \mathbf{P}(\omega : \ X(0, \omega) = x) = 1.$$

Niech ponadto $\mathbf{E}_x f(X(t)) = \mathbf{E} f(X(t, x))$.

Twierdzenie 15 *Załóżmy, że $(\overline{\Omega}, \overline{\mathcal{F}}_t, X(t), \mathbf{P}_x)$ jest jednorodną rodziną Markowa, której generatorem półgrupy jest operator A. Wówczas dla każdej $f \in C_0^2$ (funkcje klasy C^2 o nośnikach zwartych), $f \in DA$*

$$\mathcal{L}f(y) = f'(y)b(y) + \frac{1}{2}\sigma^2(y)f''(y).$$

Dowód. Stosujemy wzór Ito

$$f(X(t)) = f(x) + \int_0^t f'(X(u))b(X(u))du +$$
$$+ \int_0^t f'(X(u))\sigma(X(u))dW(u) + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X(u))\sigma^2(X(u))du =$$
$$= f(x) + \int_0^t f'(X(u))\sigma(X(u))dW(u) + \int_0^t \mathcal{L}f(X(u))du.$$

Zauważmy, że jeśli $f \in C_0^2$, to $\int_0^t f'(X(u))\sigma(X(u))dW(u)$ jest martyngałem. Istotnie

$$\mathbf{E}\sup_{t\leqslant T}|\int_0^t \mathcal{L}(f'(X(u))\sigma(X(u)))^2du| < \infty.$$

Można też skorzystać z faktu, że każdy ograniczony martyngał lokalny jest martyngałem. Stąd

$$\mathbf{E}f(X(t)) = f(x) + \int_0^t \mathbf{E}\mathcal{L}f(X(s))ds.$$

Używając notacji $X(x,\omega)$ możemy zapisać powyższą równość następująco

$$\mathbf{E}_x f(X(t)) = f(x) + \int_0^t \mathbf{E}_x\mathcal{L}f(X(s))ds.$$

Niech B oznacza przestrzeń Banach funkcji borelowskich, ograniczonych. Przypomnijmy, że półgrupę T_t związaną z jednorodnym procesem Markowa zadaje się wzorem $T_tf(x) := \mathbf{E}_xf(X)$, dla każdego $f \in B$. Zatem

$$T_tf(x) - f(x) = \int_0^t T_s\mathcal{L}f(x)ds,$$

dla $f \in C_0^2$. Stąd

$$\|T_tf - f\| \leqslant t\|\mathcal{L}f\| \to 0, \quad \text{gdy } t \to 0,$$

gdzie $\|\cdot\|$ oznacza normę supremum. To oznacza, że $C_0^2 \subset B_0$ (podprzestrzeń B złożona z funkcji na których półgrupa jest mocno ciągła). Co więcej

$$|\frac{1}{t}(T_tf(x) - f(x)) - \mathcal{L}f(x)| = \frac{1}{t}|\int_0^t (T_s\mathcal{L}f(x) - \mathcal{L}f(x))ds| \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{s\leqslant t}\|T_s\mathcal{L}f - \mathcal{L}f\| \to 0 \ \text{ gdy } t \to \infty. \tag{7.2}$$

Zbieżność wynika z faktu, że $\mathcal{L}f \in C_0 \subset B_0$.

■

Definicja 15 *Rodzinę Markowa taką, że $C_0^2 \subset D_A$ i $Af = \mathcal{L}f$ dla $f \in C_0^2$ nazywa się procesem dyfuzji z operatorem tworzącym $\mathcal{L}$*

Zwyczajowo b w równaniu (7.1) nazywa się współczynnikiem dryfu, σ współczynnikiem dyfuzji.

7.2 Istnienie rozwiązania

Rozpatrujemy równanie (7.1)

$$X(t) = \xi + \int_s^t b(X(u))du + \int_s^t \sigma(X(u))dW(u).$$

Będziemy zakładać, że b i σ spełniają warunek Lipschitza ze stałą K

$$|b(x) - b(y)| \leqslant K|x - y|, \quad |\sigma(x) - \sigma(y)| \leqslant K|x - y|. \tag{7.3}$$

W szczególności wynika stąd, że

$$|b(x)|, |\sigma(x)| \leqslant K\sqrt{1 + x^2}.$$

Twierdzenie 16 *Załóżmy, że b, σ spełniają warunek (7.3) (warunek Lipschitza ze stałą K). Jeśli istnieje rozwiązanie równania (7.1) to jest dokładnie jedno.*

Dowód. Przypuśćmy, że X_1, X_2 są rozwiązaniami równania (7.1). Stąd

$$X_1(t) - X_2(t) = \int_s^t (b(X_1(u)) - b(X_2(u)))du + \int_s^t (\sigma(X_1(u)) - \sigma(X_2(u)))dW(u).$$

(1) Załóżmy, że $t \to \mathbf{E}X_1^2(t)$, $t \to \mathbf{E}X_2^2(t)$ są ograniczone na przedziałach skończonych. Skorzystamy z nierówności $(a + b)^2 \leqslant 2a^2 + 2b^2$. Mamy

$$\mathbf{E}(X_1(t) - X_2(t))^2 \leqslant 2\mathbf{E}\int_0^t (b(X_1(u)) - b(X_2(u)))du +$$
$$+2\mathbf{E}(\int_s^t (\sigma(X_1(u)) - \sigma(X_2(u)))dW(u))^2.$$

Oznaczmy

$$A := 2\mathbf{E}\int_0^t (b(X_1(u)) - b(X_2(u)))du, \quad B := 2\mathbf{E}(\int_s^t (\sigma(X_1(u)) - \sigma(X_2(u)))dW(u))^2.$$

Szacujemy z warunku (7.3) i z nierówności Schwarza

$$A \leqslant 2K^2\mathbf{E}\int_s^t |X_1(u) - X_2(u)|du \leqslant 2K^2(t - s)\int_s^t \mathbf{E}|X_1(u) - X_2(u)|^2du.$$

Przypomnijmy teraz, że $\sigma^2(x) \leqslant K^2(1 + x^2)$. Stąd

$$\mathbf{E}\int_s^t \sigma^2(X_1(u))du \leqslant Kt + K\int_0^t \mathbf{E}X^2(u)du.$$

To oznacza, że proces $\int_0^t (\sigma(X_1(u)) - \sigma(X_2(u)))dW(u)$ jest martyngałem (bo $(\sigma(X_1(t)) - \sigma(X_2(t))) \in \mathcal{L}_T^2$). Korzystając dodatkowo z warunku (7.3) otrzymujemy

$$B = 2\mathbf{E}\int_s^t (\sigma(X_1(u)) - \sigma(X_2(u)))^2 du \leqslant 2K^2 \int_s^t \mathbf{E}(X_1(u) - X_2(u))^2 du.$$

Pokazaliśmy, że

$$\mathbf{E}(X_1(t) - X_2(t))^2 \leqslant 2K^2(t-s+1)\int_s^t \mathbf{E}(X_1(u) - X_2(u))^2 du.$$

Oznaczmy $C := 2K^2(t-s+1)$. Indukcyjnie pokazujemy, że

$$\mathbf{E}(X_1(t) - X_2(t))^2 \leqslant C^n \int_s^t \int_s^{u_1} ... \int_s^{u_{n-1}} \mathbf{E}(X_1(u_n) - X_2(u_n))^2 du_n ... du_1.$$

Stąd

$$\mathbf{E}(X_1(t) - X_2(t))^2 \leqslant C^n \frac{|t-s|^n}{n!} \sup_{s \leqslant u \leqslant t} \mathbf{E}|X_1(u) - X_2(u)|^2 \to 0, \text{ gdy } n \to \infty.$$

To oznacza, że $\mathbf{E}|X_1(t) - X_2(t)|^2 = 0$, czyli $X_1(t) = X_2(t)$ p.n. Z ciągłości wynika, że oba procesy są nieodróżnialne.

Niech teraz X_1, X_2 będą dowolnymi rozwiązaniami. Definiujemy

$$\sigma_n = \begin{cases} T & \xi \leqslant n \\ s & \xi > n \end{cases}$$

$$\tau_n = \inf\{t \geqslant s : \ |X_1(t)| + |X_2(t)| \geqslant n\} \wedge T \wedge \sigma_n$$

Z definicji wynika, że $|X_i(t)| 1_{(s,\tau_n]}(t) \leqslant n$ dla $i \in \{1, 2\}$. Korzystając z nierówności $\sigma^2(x) \leqslant K^2(1 + x^2)$ dostajemy

$$\sigma^2(X_i(t))1_{(s,\tau_n]}(t) \leqslant K^2(1 + X_i^2(t))1_{(s,\tau_n]}(t) \leqslant K^2(1+n^2).$$

Zachodzi równość

$$X_1(t\wedge\tau_n) - X_2(t\wedge\tau_n) = \int_s^{t\wedge\tau_n} (b(X_1(u)) - b(X_2(u)))du +$$
$$+ \int_s^{t\wedge\tau_n} (\sigma(X_1(u)) - \sigma(X_2(u)))dW(u) = \int_s^t (b(X_1(u)) - b(X_2(u)))1_{(s,\tau_n]}(u)du +$$
$$+ \int_s^t (\sigma(X_1(u)) - \sigma(X_2(u)))1_{(s,\tau_n]}(u)dW(u).$$

Rozumując jak w części pierwszej dostajemy

$$\mathbf{E}|X_1(t\wedge\tau_n) - X_2(t\wedge\tau_n)|^2 = 0.$$

Czyli $X_1(t\wedge\tau_n) = X_2(t\wedge\tau_n)$ p.n.. Przechodząc z n do nieskończoności, dostajemy $X_1(t) = X_2(t)$ p.n. Z ciągłości wynika nieodróżnialność.

■

Twierdzenie 17 *Jeśli* $\mathbf{E}\xi^2 < \infty$*,* b, σ *spełniają warunek (7.3), to równanie stochastyczne (7.1) ma rozwiązanie (dokładnie jedno), przy czym* $\mathbf{E}X^2(t) < \infty$ *i funkcja* $t \to \mathbf{E}X^2(t)$ *jest ograniczona na przedziałach ograniczonych.*

Dowód. (1) Definiujemy $X_0(t) = \xi$, $t \geqslant s$ oraz

$$X_n(t) = \xi + \int_s^t b(X_{n-1}(u))du + \int_s^t \sigma(X_{n-1}(u))dW(u).$$

Z definicji X_n jest procesem prognozowalnym (bo jest ciągły i adaptowalny). Ponadto funkcja $t \to \mathbf{E}X_n^2(t)$ jest ograniczona na przedziałach ograniczonych (indukcja i wzór izometryczny dla całek Ito

(2) Szacujemy $\mathbf{E}(X_{n+1}(t) - X_n(t))^2$. Dla $n = 0$

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(X_1(t) - X_0(t))^2 &= \mathbf{E}(\int_s^t b(\xi)du + \int_s^t \sigma(\xi)dW(u))^2 \leqslant \\ &\leqslant 2\mathbf{E}b^2(\xi)(t-s)^2 + \mathbf{E}\sigma^2(\xi)(t-s) \leqslant 2K^2((t-s)^2 + (t-s))(1 + \mathbf{E}\xi^2) = C_1\end{aligned}$$

Przypadek $n > 0$. Analogicznie jak w dowodzie jednoznaczności (Twierdzenie 16) szacujemy

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}(X_{n+1}(t) - X_n(t))^2 \leqslant 2\mathbf{E}(\int_s^t (b(X_n(u)) - b(X_{n-1}(u)))du)^2 + \\ &+2\mathbf{E}(\int_s^t \sigma(X_n(u)) - \sigma(X_{n-1}(u))du)^2 \leqslant C\int_s^t \mathbf{E}(X_n(u) - X_{n-1}(u))^2 du \leqslant \\ &\leqslant C^n \int_s^t \int_s^{u_1} \ldots \int_s^{u_{n-1}} \mathbf{E}(X_n(u_1) - X_0(u_n))^2 du_n \ldots du_1,\end{aligned}$$

gdzie $C = 2K^2(1 + t - s)$. Korzystając z obliczeń dla $n = 0$ dostajemy

$$\mathbf{E}(X_{n+1}(t) - X_n(t))^2 \leqslant C_1 C^n \frac{(u-s)^n}{n!}.$$

dla każdego $s \leqslant u \leqslant t$. Zatem $X_n(t)$ jest zbieżny w $L_2(\Omega)$ jednostajne na odcinku $[s,t]$. Istotnie niech $m > n$

$$\sup_{s \leqslant u \leqslant t} \sqrt{\mathbf{E}|X_m(u) - X_n(u)|^2} \leqslant \sum_{k=n}^m \sqrt{C_1 C^k \frac{(t-s)^k}{k!}} \to 0,$$

gdy $m, n \to \infty$.

Pokażemy, że $X_n(t)$ zbiega z $\mathbf{P} = 1$ jednostajnie na przedziałach ograniczonych. Korzystając z faktu, że dla dowolnych zmiennych losowych ξ i η

$$\mathbf{P}(|\xi + \eta| > \alpha) \geqslant \mathbf{P}(|\xi| > \frac{\alpha}{2}) + \mathbf{P}(|\eta| > \frac{\alpha}{2})$$

dostajemy

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(\sup_{s\leqslant t\leqslant v}|X_{n+1}(t)-X_n(t)|>\frac{1}{2^n})\leqslant\\
&\leqslant \mathbf{P}(\sup_{s\leqslant t\leqslant v}|\int_s^t(b(X_n(u))-b(X_{n-1}(u)))du|>\frac{1}{2^{n+1}})+\\
&+\mathbf{P}(\sup_{s\leqslant t\leqslant v}|\int_s^t(\sigma(X_n(u))-\sigma(X_{n-1}(u)))dW(u)|>\frac{1}{2^{n+1}}).
\end{aligned}$$

Definiujemy

$$\begin{aligned}
A&:=\mathbf{P}(\sup_{s\leqslant t\leqslant v}|\int_s^t(b(X_n(u))-b(X_{n-1}(u)))du|>\frac{1}{2^{n+1}}),\\
B&:=\mathbf{P}(\sup_{s\leqslant t\leqslant v}|\int_s^t(\sigma(X_n(u))-\sigma(X_{n-1}(u)))dW(u)|>\frac{1}{2^{n+1}}).
\end{aligned}$$

Stosujemy nierówność Czebyszewa

$$\begin{aligned}
&A\leqslant \mathbf{P}(\int_s^v|b(X_n(u))-b(X_{n-1}(u))|du>\frac{1}{2^{n+1}})\leqslant\\
&\leqslant 2^{2(n+1)}\mathbf{E}(\int_s^v|b(X_n(u))-b(X_{n-1}(u))|du)^2\leqslant\\
&\leqslant 4^{n+1}(v-s)K^2\int_s^v\mathbf{E}(X_n(u)-X_{n-1}(u))^2du\leqslant\\
&\leqslant 4^{n+1}(v-s)K^2\int_s^v C_1C^{n-1}\frac{(u-s)^{n-1}}{(n-1)!}du=C_1C^n4^{n+1}\frac{(v-s)^{n+1}}{n!},
\end{aligned}$$

gdzie C jest stałą zależącą od v.

$$\begin{aligned}
&B\leqslant 2^{2(n+1)}\mathbf{E}(\int_s^v(\sigma(X_n(u))-\sigma(X_{n-1}(u)))dW(u))^2\leqslant\\
&\leqslant 4^{n+1}\int_s^v\mathbf{E}(\sigma(X_n(u))-\sigma(X_{n-1}(u)))^2du\leqslant 4^{n+1}K^2\int_s^v\mathbf{E}(X_n(u)-X_{n-1}(u))^2du\leqslant\\
&\leqslant 4^{n+1}K^2C_1C^{n-1}\frac{(v-s)^n}{n!}.
\end{aligned}$$

Wynika stąd, że

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{P}(\sup_{s\leqslant t\leqslant v}|X_{n+1}(t)-X_n(t)|>\frac{1}{2^n})<\infty.$$

Z lematu Borela-Canteli wynika, że z $\mathbf{P}=1$ istnieje n_0 (losowe) takie, że dla $n\geqslant n_0$

$$\sup_{s\leqslant t\leqslant v}|X_{n+1}(t)-X_n(t)|\leqslant\frac{1}{2^n}.$$

Wynika stąd, że dla $m > n \geqslant n_0$

$$\sup_{s \leqslant t \leqslant v} |X_m(t) - X_n(t)| \leqslant \sum_{k=n}^{m} \frac{1}{2^n}.$$

Pokazaliśmy, że $X_n(t)$ zbiega z $\mathbf{P} = 1$ jednostajnie na przedziałach ograniczonych.

(4) Definiujemy $X(t) = \lim_{n\to\infty} X_n(t)$ tam gdzie ta zbieżność zachodzi oraz $X(t,\omega) = \xi(\omega)$ dla pozostałych $\omega \in \Omega$. Wynika stąd, że $X(t)$ jest procesem ciągłym i adaptowalnym, czyli prognozowalnym. Pozostaje wykazać, że $t \to \mathbf{E}X^2(t)$ jest funkcją ograniczoną na przedziałach ograniczonych. Korzystamy z dwóch faktów. Po pierwsze $t \to \mathbf{E}X_n^2(t)$ jest funkcją ograniczoną na przedziałach ograniczonych, po drugie $X_n \to X$ w L^2 jednostajnie na przedziałach ograniczonych. Istotnie

$$\mathbf{E}(X(t) - X_n(t))^2 \leqslant 2\mathbf{E}(\int_s^t (b(X(u)) - b(X_n(u)))du)^2 +$$
$$+2\mathbf{E}(\int_s^t (\sigma(X(u))) - \sigma(X_n(u))dW(u))^2.$$

Analogicznie jak w punkcie (2) dowodzimy, że

$$\sup_{s\leqslant u\leqslant t} \sqrt{\mathbf{E}(X(u) - X_n(u))^2} \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} \sqrt{C_1 C^k \frac{(t-s)^k}{k!}} \to 0,$$

gdy $n \to \infty$. To kończy dowód twierdzenia.

■

7.3 Proces Markowa

Stwierdzenie 7 *Załóżmy, że b, σ spełniają warunek Lipschitza (7.3). Wówczas istnieje proces $X : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$ taki, że dla każdego $t \geqslant 0$, X jako funkcja na $[0,t] \times \mathbb{R} \times \Omega$ jest mierzalny względem $\mathcal{B}[0,t] \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{F}_t^W$. Ponadto $X(\cdot, x, \cdot)$ jest rozwiązaniem równania (7.1) w warunkiem początkowym $X(0) = x$.*

Twierdzenie 18 *Przy założeniach jak wyżej, dla każdego x, $X(\cdot, x, \cdot)$ jest procesem Markowa, jednorodnym w czasie o tej samej funkcji przejścia (rodzina Markowa).*

Dowód. Proces $X(\cdot, x, \cdot)$ spełnia równanie

$$X(t,x) = x + \int_0^t b(X(u,x))du + \int_0^t \sigma(X(u,x))dW(u).$$

Zatem

$$X(t,x) = X(s,x) + \int_s^t b(X(u,x))du + \int_s^t \sigma(X(u,x))dW(u).$$

Stąd wynika, że proces Markowa X ma jednorodną funkcje przejścia (sprawdzić!). Co więcej $P(t,y,\Gamma) = \mathbf{P}(X(t,x) \in \Gamma)$.

■

Wniosek 6 *Niech σ, b spełniają warunek Lipschitza (7.3). Jedynym rozwiązaniem równania (7.1) jest proces dyfuzji w $\mathbb{R}$ z operatorem tworzącym*

$$\mathcal{L} = b\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

Na przykład jedynym rozwiązaniem równania

$$dX(t) = \lambda X(t)dW(t), \quad X(0) = x$$

jest proces $X(t) = xe^{\lambda W(t) - \frac{\lambda^2}{2}t}$. Operatorem towarzyszącym $\mathcal{L}$ jest w tym przypadku $\mathcal{L}f = \frac{1}{2}\lambda^2 x^2 f''(x)$.

7.4 Przypadek wielowymiarowy

Niech $W = (W_1, ..., W_d)$ będzie procesem Wienera w $\mathbb{R}^d$, $b(x) \in \mathbb{R}^m$, $\sigma(x) = [\sigma(x)]_{n\times d}$. Przypomnijmy, że proces stochastyczny $X(t)$, $t \in T$ spełnia równanie (7.1), jeśli

$$X(t) = \xi + \int_0^t b(X(s))ds + \int_0^t \sigma(X(s)))dW(s),$$

gdzie $\xi \in \mathbb{R}^m$. Analogicznie jak w przypadku jednowymiarowym dowodzi się następujące twierdzenie.

Twierdzenie 19 *Załóżmy, że b, σ, spełniają warunek Lipschitza, $\xi \in L^2(\Omega)$. Wówczas równanie (7.1) ma dokładnie jedno rozwiązanie.*

Stosując wzór Ito dla $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ klasy C^2 dostajemy

$$f(X(t)) = f(\xi) + \sum_{i=1}^m \int_0^t \frac{\partial f(X(s))}{\partial x_i} dX_i(s) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^m \int_0^t \frac{\partial^2 f(X(s))}{\partial x_i \partial x_j} d\langle M_i, M_j\rangle(s),$$

gdzie

$$\langle M_i, M_j\rangle = \sum_{k=1}^d \int_0^t \sigma_{ik}(X(s))\sigma_{jk}(X(s))ds, \quad 1 \leqslant i,j \leqslant m.$$

Równoważnie

$$[\langle M_i, M_j\rangle]_{1\leqslant i,j\leqslant m} = \int_0^t \sigma(X(s))\sigma^*(X(s))ds.$$

Oznaczmy $a = \sigma\sigma^*$. Dostajemy równość

$$f(X(t)) = f(\xi) + M(t) + \int_0^t \sum_{i=1}^m \int_0^t \frac{\partial f(X(s))}{\partial x_i} b_i(X(s))ds +$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^t \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial^2 f(X(s))}{\partial x_i \partial x_j} a_{i,j}(X(s))ds,$$

gdzie

$$M(t) := \int_0^t \sum_{i=1}^m \frac{\partial_i f(X(s))}{\partial x_i} b_i(X(s))dW_i(s)$$

jest martyngałem lokalnym. Definiujemy operator różniczkowy wzorem

$$\mathcal{L}f := \sum_{i=1}^m b_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^m a_{i,j}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

(operator eliptyczny drugiego rzędu). Udowodniliśmy równość

$$f(X(t)) = f(\xi) + M(t) + \int_0^t \mathcal{L}f(X(s))ds.$$

Niech $f \in C_0^2(\mathbb{R}^m)$. Wówczas M jest martyngałem, a ponadto jeśli przez A oznaczamy generator półgrupy dla rodziny Markowa $X(t, x, \omega)$, to $f \in D_A$ oraz $Af = \mathcal{L}f$. Co oznacza, że rozwiązania równania (7.1) tworzą proces dyfuzji w $\mathbb{R}^m$.

Analogicznie można rozważyć przypadek kiedy współczynniki b, σ zależą od czasu.

Twierdzenie 20 *Niech $b(\cdot,\cdot), \sigma(\cdot,\cdot)$ mierzalne i $b(t,\cdot), \sigma(t,\cdot)$, spełniają warunek Lipschitza ze stałą niezależną do t, to równanie*

$$dX(t) = b(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t), \quad X_0 = \xi \in L^2(\Omega)$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie (proces Markowa, niekoniecznie jednorodny w czasie).

Rozdział 8

Twierdzenie Girsanowa

8.1 Zamiana miary

Lemat 9 *Niech* $M \in \mathcal{M}^{2,c}_{loc}$, $M(0) = 0$. *Definiujemy*

$$Z(t) = \exp(M(t) - \frac{1}{2}\langle M\rangle(t))$$

Proces $Z(t)$, $t \in [0,T]$ $T < \infty$ *jest martyngałem lokalnym. Proces* $Z(t)$ *jest martyngałem wtedy i tylko wtedy, gdy* $\mathbf{E}Z(T) = 1$.

Dowód. Korzystając ze wzoru Ito dostajemy, że $Z(t)$ jest martyngałem lokalnym. Jest jasne, że jeśli Z jest martyngałem, to $\mathbf{E}Z(T) = 1$ (bo $Z(0) = 1$). Pozostaje zatem udowodnić fakt przeciwny.

Ponieważ Z jest martyngałem lokalnym oraz $Z \geqslant 0$, więc Z jest nadmartyngałem (udowodniliśmy taki fakt na ćwiczeniach). Z założenia $\mathbf{E}Z(T) = 1$. Stąd

$$1 = \mathbf{E}Z(0) \geqslant \mathbf{E}Z(t) \geqslant \mathbf{E}Z(T) = 1, \ \ 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Otrzymujemy $\mathbf{E}Z(t) = 1$. Korzystając z faktu, że Z jest nadmartyngałem, dostajemy $Z(t) - \mathbf{E}(Z(T)|\mathcal{F}_t) \geqslant 0$. Z drugiej strony

$$\mathbf{E}(Z(t) - \mathbf{E}(Z(T)|\mathcal{F}_t)) = \mathbf{E}Z(t) - \mathbf{E}Z(T) = 0.$$

To oznacza, że $Z(t) = \mathbf{E}(Z(T)|\mathcal{F}_t)$ p.n., co kończy dowód.

■

Zauważmy, że w szczególności biorąc $Y \in \Lambda^2_T$ otrzymujemy, że

$$Z(t) = \exp(\int_0^t Y(s)dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^t Y^2(s)ds). \tag{8.1}$$

jest martyngałem lokalnym.

Twierdzenie 21 *(Girsanowa) Niech Y, Z spełniają równanie (8.1). Jeśli $\mathbf{E}Z(T) = 1$, to proces $V(t) = W(t) - \int_0^t Y(s)ds$, $t \in [0,T]$, jest procesem Wienera w przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{Q})$, gdzie*

$$\mathbf{Q}(A) = \mathbf{E}(1_A Z(T)), \quad A \in \mathcal{F}$$

Dowód. Zauważmy, że $\mathbf{Q}$ jest miarą probabilistyczną (bo $\mathbf{E}Z(T) = 1$). Ponadto proces V jest ciągłym, adaptowalnym procesem takim, że $V(0) = 0$. Wystarczy pokazać, że

$$U(t) = \exp(\lambda V(t) - \frac{1}{2}\lambda^2 t), \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

jest martyngałem lokalnym (względem miary $\mathbf{Q}$). Zauważmy, że wystarczy udowodnić, że $U(t)Z(t)$ jest martyngałem lokalnym względem miary $\mathbf{P}$. Istotnie, niech τ_n będzie ciągiem lokalizującym $\tau_n \nearrow T$ dla $U(t)Z(t)$. Skoro $U(t)Z(t)$ jest martyngałem lokalnym, to dla dowolnego ograniczonego momentu zatrzymania τ zachodzi równość

$$1 = \mathbf{E}(U(\tau_n \wedge \tau)Z(\tau_n \wedge \tau)).$$

Z Lematu 9 wiemy, że

$$Z(\tau_n \wedge \tau) = \mathbf{E}(Z(T)|\mathcal{F}_{\tau \wedge \tau_n}).$$

Zatem

$$1 = \mathbf{E}(U(\tau_n \wedge \tau)\mathbf{E}(Z(T)|\mathcal{F}_{\tau\wedge\tau_n})) = \mathbf{E}(U(\tau_n \wedge \tau)Z(T)). \tag{8.2}$$

Stąd $1 = \mathbf{E}_{\mathbf{Q}_T} U(\tau_n \wedge \tau)$, czyli U jest martyngałem lokalnym względem miary $\mathbf{Q}$. Pokażemy, że UZ jest martyngałem lokalnym. Z definicji

$$\begin{aligned}
U(t)Z(t) &= \exp(\lambda V(t) - \frac{1}{2}\lambda^2 t)\exp(\int_0^t Y(s)dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^t Y^2(s)ds) = \\
&= \exp(\lambda W(t) + \int_0^t Y dW - \frac{1}{2}\int_0^t (2\lambda Y(s) + \lambda^2 + Y^2(s))ds) = \\
&= \exp(\int_0^t (\lambda + Y(s))dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^t (\lambda + Y(s))^2 ds).
\end{aligned}$$

Powyższy proces jest rzecz jasna, martyngałem lokalnym (patrz równanie (8.1)).

■

8.2 Wnioski z twierdzenia Girsanowa

Twierdzenie 22 *Niech $Y = (Y_1, ..., Y_d)$, $Y_j \in \Lambda^2$, W proces Wienera w $\mathbb{R}^d$. Definiujemy*

$$Z(t) = \exp(\int_0^t Y dW - \frac{1}{2}\int_0^t |Y(s)|^2 ds),$$

gdzie $\int_0^t YdW = \sum_{j=1}^d \int_0^t Y_j(s)dW_j(s)$. Jeśli $\mathbf{E}Z(T) = 1$, to zachodzi teza twierdzenia Girsanowa.

Uwaga 14 *Przypuśćmy $Z(t)$ jest martyngałem, to znaczy $\mathbf{E}Z(t) = 1$, (Y, W jak w twierdzeniu Girsanowa). Wówczas dla każdego $T > 0$ miara $\mathbf{Q}_T$ jest prawdopodobieństwem na $\mathcal{F}_T$.*

Można się zastanawiać czy prawdopodobieństwa $\mathbf{Q}_T$ można wybrać tak, aby pokrywały się na $\mathcal{F}_\infty$. Okazuje się, że na ogół jest to niemożliwe. Natomiast jeśli $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^W$, to istotnie takie przedłużenie da się skonstruować.

Stwierdzenie 8 *Niech $Z(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$ będzie martyngałem. Wówczas istnieje dokładnie jedno prawdopodobieństwo $\mathbf{Q}$ na $\mathcal{F}_\infty$ takie, że dla każdego $T > 0$ i $A \in \mathcal{F}_T^W$ zachodzi*

$$\mathbf{Q}(A) = \mathbf{Q}_T(A) = \mathbf{E}(1_A Z(T)).$$

Dowód. Niech $t_1, ..., t_n \in \mathbb{R}_+$, $t_1, ..., t_n \leqslant T$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Definiujemy

$$\mu_{t_1,...,t_n}(B) = \mathbf{Q}_T((W(t_1), ..., W(t_n)) \in B).$$

Ta definicja nie zależy od $T \geqslant t_1, ..., t_n$. Istotnie jeśli $T_1 > T_2 \geqslant t_1, ..., t_n$, to $\mathcal{F}_{T_2} \subset \mathcal{F}_{T_1}$. Ponieważ Z jest martyngałem, więc dla $A = (W(t_1), ..., W(t_n)) \in B$ dostajemy

$$\mathbf{Q}_{T_1}(A) = \mathbf{E}(1_A Z_{T_1}) = \mathbf{E}(1_A \mathbf{E}(Z_{T_1}|\mathcal{F}_{T_2})) = \mathbf{E}(1_A Z_{T_2}) = \mathbf{Q}_{T_2}(A).$$

Zauważmy, że $\mu_{t_1,...,t_n}$ spełnia warunki zgodności Kołmogorowa. Na mocy Twierdzenia Kołmogorowa istnieje miara probabilistyczna μ na $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}_+}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{R}_+}))$ taka, że

$$\mu(\{x : (x(t_1), ..., x(t_n))\} \in B\}) = \mu_{t_1,...,t_n}(B).$$

Niech $A \in \mathcal{F}_\infty^W$, wówczas z definicji procesu W istnieje zbiór $\Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{R}_+})$ taki, że

$$A = \{\omega : \ W(\cdot, \omega) \in \Gamma\}.$$

Definiujemy $\mathbf{Q}(A) = \mu(\Gamma)$. Niech C oznacza podzbiór $\mathbb{R}^{\mathbb{R}_+}$ złożony z wszystkich funkcji ciągłych. Ponieważ $\mu_*(C) = 1$ (miara zewnętrzna), więc miara $\mathbf{Q}$ jest dobrze zdefiniowana (nie zależy od wyboru zbioru Γ). Jest jasne, że spełnia żądane warunki.

■

Wniosek 7 *Przyjmijmy założenia ze Stwierdzenia 8. Wówczas*

$$V(t) = W(t) - \int_0^t Y(s)ds$$

jest procesem Wienera względem miary $\mathbf{Q}$ *(w przestrzeni* $(\Omega, \mathcal{F}^W_\infty, \mathbf{P})$ *). Miara* $\mathbf{Q}$ *(zdefiniowana w Stwierdzeniu 8) spełnia*

$$\mathbf{Q}((V(t_1), ..., V(t_n)) \in B) = \mathbf{Q}_T((V(t_1), , ..., V(T_n)) \in B), \quad na\ [0, T]$$

gdzie $\{V(t_1), ..., V(t_n)) \in B\} \in \mathcal{F}^W_T$*.*

Uwaga 15 *Miara* $\mathbf{Q}$ *na ogół nie jest ciągła względem miary* $\mathbf{P}$*.*

Istotnie rozważmy przykład. Niech $Y(t) = 1$, $V(t) = W(t) - t$, wiemy ponadto, że $Z = e^{W(t) - \frac{1}{2}t}$ jest martyngałem. Zauważmy, że skoro V jest procesem Wienera względem $\mathbf{Q}$, to $\mathbf{Q}(\lim_{t\to\infty} \frac{V(t)}{t} = 0) = 1$. Z drugiej strony

$$\mathbf{Q}(\lim_{t\to\infty} \frac{V(t)}{t} = 0) = \mathbf{Q}(\lim_{t\to\infty} \frac{W(t)}{t} = 1).$$

Jest jasne, że

$$\mathbf{P}(\lim_{t\to\infty} \frac{W(t)}{t} = 1) = 0.$$

Mamy zatem zbiór A taki, że $\mathbf{P}(A) = 0$, $\mathbf{Q}(A) = 1$.

Pokażemy teraz pożyteczne zastosowanie twierdzenia Girsanowa. Rozważmy proces Wienera z dryfem, to znaczy dla $\lambda \in \mathbb{R}$ definiujemy $V(t) = W(t) - \lambda t$. Wiemy, że

$$Z(t) = \exp(\lambda W(t) - \frac{1}{2}\lambda^2 t)$$

jest martyngałem zatem z twierdzenia Girsanowa V jest procesem Wienera względem $\mathbf{Q}$ na $\mathcal{F}^W_t$. To oznacza, że

$$W(t) = V(t) + \lambda t, \ \text{ względem } \ \mathbf{Q}.$$

Rozważmy moment zatrzymania względem filtracji $(\mathcal{F}^W_t)_t$, $\tau < \infty$. Korzystając z twierdzenia Dooba, otrzymujemy

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}(\tau \leqslant t) &= \mathbf{E}(1_{\tau\leqslant t} Z(t)) = \mathbf{E}(1_{\tau\leqslant t}\mathbf{E}(Z(t)|\mathcal{F}_{\tau\wedge t})) = \\ &= \mathbf{E}(1_{\tau\leqslant t} Z(\tau\wedge t)) = \mathbf{E}(1_{\tau\leqslant t} e^{\lambda W(\tau) - \frac{1}{2}\lambda^2\tau}).\end{aligned}$$

Udowodniliśmy, że

$$\mathbf{Q}(\tau \leqslant t) = \mathbf{E}(1_{\tau\leqslant t} e^{\lambda W(\tau) - \frac{1}{2}\lambda^2\tau}).$$

Wniosek 8 *Równość Walda*

$$\mathbf{E}(e^{\lambda W(\tau) - \frac{1}{2}\lambda^2\tau}) = 1 \Leftrightarrow \mathbf{Q}(\tau < \infty) = 1.$$

Rozpatrzmy $\tau = \tau_a = \inf\{t: \ W(t) = a\} = \inf\{t: \ V(t) + \lambda t = a\}$, gdzie $a \in \mathbb{R}$. Wiemy, że τ_a ma gęstość zadaną wzorem

$$g_a(r) = \frac{|a|}{\sqrt{2\pi r^3}} e^{-\frac{a^2}{2r}} 1_{r>0}.$$

Zatem

$$\begin{aligned}
&\mathbf{Q}(\tau_a \leqslant t) = \mathbf{E}(1_{\tau_a \leqslant t} e^{\lambda W(\tau_a) - \frac{1}{2}\lambda^2 \tau_a}) = \\
&= \int_0^t e^{\lambda a - \frac{1}{2}\lambda^2 r} g_a(r) dr = \int_0^t \frac{|a|}{\sqrt{2\pi r^3}} e^{\lambda a - \frac{1}{2}\lambda^2 r - \frac{a^2}{2r}} dr = \\
&= \int_0^t \frac{|a|}{\sqrt{2\pi r^3}} e^{-\frac{1}{2r}(-2\lambda a r - \lambda^2 r^2 - a^2)} dr = \int_0^t \frac{|a|}{\sqrt{2\pi r^3}} e^{-\frac{1}{2r}(a - \lambda r)^2} dr.
\end{aligned}$$

Korzystając z gęstości rozkładu momentu zatrzymania τ_a, obliczyliśmy rozkład τ_a względem $\mathbf{Q}$, czyli rozkład momentu dojścia do a dla procesu z dryfem. To pozwoli nam znaleźć rozkład $\max_{s \leqslant t}(W(s) + \lambda s)$. Istotnie mamy

$$\mathbf{P}(\max_{s \leqslant t}(W(s) + \lambda s) < a) = \mathbf{Q}(\max_{s \leqslant t}(V(s) + \lambda s) < a) = \mathbf{Q}(\tau_a > t).$$

Można pokazać, że

$$\mathbf{E} e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 \tau_a} = e^{-|a||\lambda|}.$$

Istotnie wystarczy skorzystać z faktu, że $e^{\lambda W(t) - \frac{1}{2}\lambda^2 t}$ jest martyngałem. Stąd

$$\mathbf{Q}(\tau_a < \infty) = e^{\lambda a} \mathbf{E} e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 \tau_a} = e^{\lambda a - |a\lambda|} = 1,$$

wtedy i tylko wtedy, gdy $\lambda a \geqslant 0$.

Twierdzenie 23 *(Novikov) Niech M będzie ciągłym martyngałem lokalnym, $M(0) = 0$. Niech*

$$Z(t) = \exp(M(t) - \frac{1}{2}\langle M \rangle(t)), \ \ t \in \mathbb{R}_+.$$

Jeżeli $\mathbf{E}\exp(\frac{1}{2}\langle M \rangle(t)) < \infty$ *dla każdego* $t \in \mathbb{R}_+$, *to* $Z(t)$ *jest martyngałem.*

Wniosek 9 *Jeśli* $Y \in \Lambda^2$. *Jeżeli* $\mathbf{E}\exp(\frac{1}{2}\int_0^T Y^2(s)ds) < \infty$, *to*

$$\mathbf{E}\exp(\int_0^t Y(s) dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^t Y^2(s) ds) = 1$$

jest martyngałem.

Dowód. Bierzemy $M(t) = \int_0^t 1_{[0,T]} Y(s) ds$ w twierdzeniu Novikova.

■

8.3 Mocne i słabe rozwiązania

Rozważmy równanie

$$dX(t) = b(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t), \tag{8.3}$$

gdzie W jest procesem Wienera w $\mathbb{R}^m$, $b(t,x) \in \mathbb{R}^d$, $\sigma(t,x)$ jest macierzą $m \times d$ wymiarową.

Definicja 16 *Niech $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ przestrzeń probabilistyczna, W proces Wienera m wymiarowy w tej przestrzeni. Mówimy, że równanie (8.3) ma mocne rozwiązanie jeśli istnieje proces $X = (X(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ adaptowalny do $(\mathcal{F}_t^W)$ taki, że (8.3) zachodzi. Proces X nazywamy mocnym rozwiązaniem.*

Definicja 17 *Mówimy, że równanie (8.3) ma słabe rozwiązanie, jeśli na przestrzeni $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ z filtracją $\mathcal{F}_t$ istnieje m-wymiarowy proces Wienera (adaptowalny do $\mathcal{F}_t$) oraz proces X adaptowalny do $\mathcal{F}_t$ spełniający (8.3). Parę (X, W) nazywamy słabym rozwiązaniem.*

Definicja 18 *Słabe rozwiązanie (X, W) nazywamy mocnym, jeśli X jest adaptowalne do filtracji $\overline{\mathcal{F}}_t^W$ (uzupełnienia filtracji związanej z procesem W).*

Definicja 19 *Mówimy, że rozwiązanie równania (8.3) jest jednoznaczne w sensie trajektorii, jeśli dla każdej pary $(X, W), (X', W')$ słabych rozwiązań na tej samej przestrzeni probabilistycznej X, X' są nieodróżnialne.*

Definicja 20 *Mówimy, że rozwiązanie równania (8.3) jest jednoznaczne w sensie rozkładów, jeśli dla każdej pary $(X, W), (X', W')$ słabych rozwiązań procesy X, X' mają te same rozkłady skończenie wymiarowe.*

(1) Na przykład jeśli b, σ spełniają warunek Lipschitza ze względu na x (ze stałą niezależna od t), to dla każdego $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ i W procesu Wienera istnieje mocne rozwiązanie, jednoznaczne w sensie trajektorii.

(2) Przykład Tanaki. Jak się okazuje, jeśli funkcje a, σ są ograniczone, to równanie (8.3) ma słabe rozwiązanie. Rozważmy następujący przykład

$$dX(t) = \mathrm{sgn} X(t) dW(t), \quad X(0) = 0, \tag{8.4}$$

gdzie

$$\mathrm{sgn} x = \begin{cases} 1 & x \geqslant 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

Niech $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ będzie przestrzenią probabilistyczną, W' procesem Wienera. Powinniśmy skonstruować parę X, W adaptowalną do filtracji zadanej przez W' spełniającą równanie (8.4). Zauważmy najpierw, że

$$W(t) := \int_0^t \mathrm{sgn} W'(s) dW'(s)$$

jest martyngałem ciągłym, przyjmującym wartość 0 w 0. Niech

$$\langle W \rangle(t) = \int_0^t (\mathrm{sgn} W'(s))^2 ds = t.$$

Ponadto $W \in \mathcal{L}_t^2$, co oznacza (charakteryzacja Levy'ego), że W jest procesem Wienera. Zauważmy teraz, że

$$\int \mathrm{sgn} W' dW = \int \mathrm{sgn} W' \mathrm{sgn} W' dW' = \int dW' = W'.$$

Czyli proces $X(t) := W'(t)$ spełnia równanie

$$X(t) = \int_0^t \mathrm{sgn} X(s) dW(s).$$

Udowodniliśmy, że para (W', W) jest słabym rozwiązaniem równania (8.4) (proces W jest adaptowalny do W', ale niekoniecznie W' jest adaptowalny do W).

Jeśli (X, W) jest słabym rozwiązaniem (8.4), to X jest ciągłym martyngałem 0 w 0, takim, że $\langle X \rangle(t) = t$, czyli X jest procesem Wienera. To oznacza, że słabe rozwiązanie jest jednoznaczne w sensie rozkładów.

Z drugiej strony jeśli (X, W) jest rozwiązaniem (8.4), to $-X$ jest również rozwiązaniem, a ponadto X i $-X$ nie są nieodróżnialne w sensie trajektorii. Jak się okaże oznacza to, że nie ma mocnego rozwiązania równania (8.4).

(3) Przykład Girsanowa. Niech $\alpha > 0$, $d = m = 1$. Rozważmy równanie

$$dX(t) = |X(t)|^\alpha dW(t), \quad X(0) = 0. \tag{8.5}$$

Czyli $X(t) = \int_0^t |X(s)|^\alpha dW(s)$. Zauważmy, że $X \equiv 0$ jest mocnym rozwiązaniem równania (8.5). Jak się okazuje, jeśli $\alpha \geqslant \frac{1}{2}$, to zachodzi jednoznaczność w sensie trajektorii, natomiast dla $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ nie ma jednoznaczności w sensie rozkładu.

Rozważmy proces Wienera Z. Następujący proces jest dobrze określony

$$X(t) = \int_0^t |Z(s)|^{-\alpha} dZ(s).$$

Co więcej jeśli $0 < 2\alpha < 1$

$$\mathbf{E}\int_0^t |Z(s)|^{-2\alpha}ds = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi s}}\frac{1}{|x|^{2\alpha}}e^{-\frac{x^2}{2s}}dxds \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t \frac{1}{s^\alpha}\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{|y|^{2\alpha}}e^{-\frac{|y|^2}{2}}dyds < \infty, \tag{8.6}$$

gdzie skorzystaliśmy z podstawienia $\frac{x}{\sqrt{s}} = y$. To oznacza, że $|Z|^{-\alpha} \in \mathcal{L}_t^{2,c}$, a zatem $M(t) = \int_0^t |Z(s)|^{-\alpha}dZ(s)$ jest martyngałem. Definiujemy moment zatrzymania

$$\tau_t = \inf\{r : \int_0^t |Z(s)|^{-2\alpha}ds = t\}$$

Jest jasne, że

$$\lim_{t\to\infty}\langle M\rangle(t) = \lim_{t\to\infty}\int_0^t |Z(s)|^{-2\alpha}ds = \infty, \ \ p.n.$$

Istotnie, zgodnie z prawem iterowanego logarytmu $|Z(t)| \leqslant (1+\delta)\sqrt{2t\ln\ln t}$ dla $t \geqslant t_0(\omega)$. To oznacza, że

$$|Z(t)|^{-2\alpha} \geqslant (1+\delta)^{-2\alpha}(2t\ln\ln t)^{-\alpha},$$

skąd natychmiast $\langle M\rangle(\infty) = \infty$ p.n. Z twierdzenia 14 wiemy, że

$$W(t) = M(\tau_t) = \int_0^{\tau_t} |Z(s)|^{-\alpha}dZ(s)$$

jest procesem Wienera. Okazuje się, że para $(Z(\tau_t), W(t))$ jest słabym rozwiązaniem równania (8.5). Istotnie

$$\int_0^t |Z(\tau_s)|^\alpha dW(s) = \int_0^t |Z(\tau_s)|^\alpha dM(\tau_s) =$$
$$= \int_0^{\tau_t} |Z(s)|^\alpha |Z(s)|^{-\alpha}dZ(s) = \int_0^{\tau_t} dZ(s) = Z(\tau_t). \tag{8.7}$$

Ściśle rzecz biorąc skorzystaliśmy tu z następującej reguły podstawiania (ścisły dowód na ćwiczeniach).

Lemat 10 *(Reguła podstawiania) Niech Z będzie procesem Wienera, $Y \in \Lambda^2(Z)$. Załóżmy, że $\int_0^t Y^2(s)ds \to \infty$ p.n., gdy $t \to \infty$. Definiujemy*

$$\tau_t = \inf\{r : \int_0^r X^2(s) = t\}.$$

Proces $W(t) = \int^{\tau_t} Y(s)ds$ jest procesem Wienera, a ponadto

$$Z(\tau_t) = \int_0^t Y^{-1}(\tau_s)dW(s).$$

Można pokazać, że dla $a < \frac{1}{2}$ można skonstruować nieskończenie wiele różnych słabych rozwiązań.

8.4 Zastosowanie twierdzenia Girsanowa do szukania słabych rozwiązań

Rozważmy równanie

$$dX(t) = b(s, X(s))ds + dW(t), \quad X(0) = x, \tag{8.8}$$

czyli $X(t) = x + \int_0^t b(s, X(s))ds + W(t)$, a jeszcze inaczej

$$X(t) - x = \int_0^t b(s, X(s) - x + x)ds + W(t)$$

Zatem zmieniając $b(s, y)$ na $b(s, y - x)$ możemy zakładać, że $x = 0$. Przypuśćmy, że Z jest procesem Wienera. Wówczas

$$M(T) = \exp(\int_0^t b(s, Z(s))dZ(s) - \frac{1}{2}\int_0^T b^2(s, Z(s))ds).$$

Załóżmy, że b jest ograniczone. Wówczas $\mathbf{E}M(T) = 1$ Z twierdzenia Girsanowa wynika, że

$$W(t) = Z(t) - \int_0^t b(s, Z(s))ds$$

jest procesem Wienera, względem $\mathbf{Q}(A) = \mathbf{E}(1_A Z_T)$. Rzecz jasna (Z, W) jest słabym rozwiązaniem równania (8.8) (na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$).

Twierdzenie 24 *(Yamada-Watanabe) Jeśli równanie (8.1) ma słabe rozwiązanie jednoznaczne w sensie trajektorii, to każde rozwiązanie jest mocne.*

Dowód tego twierdzenia można znaleźć w książkach Karatzas-Shreve, Ikeda-Watanabe.

Wniosek 10 *Jednoznaczność w sensie trajektorii implikuje jednoznaczność w sensie rozkładów.*

Rozdział 9

Problem martyngałowy

9.1 Słabe rozwiązania a problem martyngałowy

Przypomnijmy, że zajmujemy się następującym równaniem stochastycznym

$$dX(t) = b(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t), \quad X(0) = x, \tag{9.1}$$

gdzie $b(t,x) \in \mathbb{R}^d$, $\sigma(t,x)$ jest macierzą $m \times d$ wymiarową, W jest m wymiarową macierzą. Załóżmy, że $m = d = 1$, b, σ są ograniczone. Przypomnijmy, że operator tworzący ma postać

$$\mathcal{L}_t f = b(t,x)f' + \frac{1}{2}a(t,x)f''(x),$$

gdzie $a = \sigma^2$. Jeśli (X, W) jest słabym rozwiązaniem równania (8.1), to dla każdego $f \in C_0^2(\mathbb{R})$ (funkcje dwukrotnie różniczkowalne w sposób ciągły o zwartych nośnikach).

$$f(X(t)) = f(x) + \int_0^t f'(X(t))b(s, X(s))ds + \int_0^t f'(X(s))\sigma(s, X(s))dW(s) +$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^t a(s, X(s))f''(X(s))ds.$$

Czyli $f(X(t)) - f(x) - \int_0^t \mathcal{L}_s f(X(s))ds$ jest martyngałem.

Definicja 21 *Przestrzeń kanoniczną funkcji ciągłych $x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ oznaczamy przez C. Określamy σ-ciało $\mathcal{B} = \mathcal{B}(C) = \sigma(x(t) : \ t \in \mathbb{R}_+)$ oraz $\mathcal{B}_t = \sigma(x(s),; \ s \leqslant t)$. Proces kanoniczny na przestrzeni $(C, \mathcal{B})$ jest zadany wzorem $Z(t, \omega) = \omega(t)$.*

Definicja 22 *Mówimy, że problem martyngałowy (x, a, b) ma rozwiązanie, jeśli istnieje miara probabilistyczna na przestrzeni kanonicznej $(C, \mathcal{B})$ taka, że $\mathbf{P}(Z(0) = x) = 1$ i dla każdego $f \in C_0^2(\mathbb{R})$ proces*

$$f(Z) - f(x) - \int_0^t \mathcal{L}_s f(Z(s))ds$$

jest martyngałem.

Uwaga 16 *Miara probabilistyczna* $\mathbf{P}$ *na przestrzeni kanonicznej taka, że* $\mathbf{P}(Z(0) = x) = 1$ *jest rozwiązaniem problemu martyngałowego* (x, a, b) *wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego* $f \in C^2(\mathbb{R})$

$$M^f = f(Z) - f(x) - \int_0^t \mathcal{L}_s f(Z(s))ds$$

jest martyngałem lokalnym.

Dowód. $\Rightarrow$ Jeśli $f \in C_0^2(\mathbb{R})$, to M^f jest ograniczonym martyngałem lokalnym, a co za tym idzie martyngałem.

$\Leftarrow$ Niech $f \in C^2(\mathbb{R})$. Definiujemy moment zatrzymania

$$\tau_n = \inf\{t : \ |Z(t)| \geqslant n\}$$

Niech teraz $g_n \in C_0^2(\mathbb{R})$ będzie takie, że $g_n(x) = f(x)$ dla $|x| < n$. Proces M^{g_n} jest martyngałem. Zatem $(M^{g_n})^{\tau_n}$ jest martyngałem. Jest jasne, że $(M^{g_n})^{\tau_n} = (M^f)^{\tau_n}$ p.n. Ponieważ τ_n jest ciągiem lokalizującym, oznacza to, że M^f jest martyngałem lokalnym.

■

Stwierdzenie 9 *Jeśli* $\mathbf{P}$ *jest rozwiązaniem problemu martyngałowego* (x, a, b)*, to*

$$N = Z - x - \int b(s, Z(s))ds$$

jest martyngałem takim, że

$$\langle N \rangle(t) = \int_0^t a(s, Z(s))ds.$$

Odwrotny fakt jest również prawdziwy (na ćwiczenia). Głównym celem tego paragrafu będzie dowód następującego faktu.

Twierdzenie 25 *Równanie (9.1)* $m = d = 1$ *ma słabe rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy problem martyngałowy* (x, a, b) *ma rozwiązanie. Ściślej proces kanoniczny na* $(C, \mathcal{B})$ *(z filtracją* $\mathcal{B}_t$*) spełnia (8.4) dla miary* $\mathbf{P}$ *takiej, że* $\mathbf{P}(X(0) = x) = 1$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $\mathbf{P}$ *jest rozwiązaniem problemu problemu martyngałowego* (x, a, b)*. Ponadto rozwiązanie (8.4) jest jednoznaczne w sensie rozkładów, wtedy i tylko wtedy, gdy* (x, a, b) *ma dokładnie jedno rozwiązanie.*

Dowód. $\Rightarrow$ Niech $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ będzie przestrzenią probabilistyczną z filtracją $\mathcal{F}_t$, para (X, W) słabym rozwiązaniem (9.1). Wiemy, że dla każdego $f \in C_0^2(\mathbb{R}_+)$

$$f(X) - f(x) - \int \mathcal{L}_s f(X(s))ds$$

jest martyngałem względem $\mathcal{F}_t$. Pozostaje przenieść tę konstrukcję na proces kanoniczny Z. Definiujemy rozkład $\mathbf{P}_X$ na C jako rozkład procesu X. Proces

$$M^f = f(Z) - f(x) - \int \mathcal{L}_s f(Z(s))ds$$

jest martyngałem na $(C, \mathcal{B}, \mathbf{P}_X)$ z filtracją $\mathcal{B}_t$. Ogólnie wynika to z następującego faktu (na ćwiczenia). Niech X będzie procesem ciągłym adaptowalnym do $\mathcal{F}_t$, niech $F : \mathbb{R}_+ \times C \to \mathbb{R}$ będzie mierzalne w tym sensie, że $F(t, \cdot)$ jest $\mathcal{B}_t$-mierzalne. Załóżmy, że $F(t, X(t))$ jest martyngałem względem filtracji $\mathcal{F}_t$. Wówczas $F(t, Z(t))$ jest martyngałem (przy zadanym rozkładzie $\mathbf{P}_X$ na C) względem filtracji $\mathcal{B}_t$.

$\Leftarrow$ Załóżmy, że problem martyngałowy (x, a, b) ma rozwiązanie. Przypuśćmy dodatkowo, że $\sigma(t, y) \neq 0$. Wiemy (Stwierdzenie 9), że

$$N = Z - x - \int b(s, Z(s))ds$$

jest martyngałem takim, że $\langle N \rangle = \int_0^t a(s, Z(s))ds$. Rozważmy martyngał lokalny

$$W(t) := \int_0^t \sigma^{-1}(s, Z(s))dN(s).$$

Mamy równość

$$\langle W \rangle(t) = \int_0^t \frac{1}{\sigma^2} d\langle N \rangle(s) = \int_0^t \frac{1}{a} a ds = t.$$

To oznacza, że W jest procesem Wienera. Mamy równość

$$\int \sigma(s, Z(s))dW(s) = \int \sigma(s, Z(s))\sigma^{-1}(s, Z(s))dN(s) =$$
$$= N(t) = Z(t) - x - \int_0^t b(s, Z(s))ds.$$

Oznacza to, że para (Z, W) jest słabym rozwiązaniem (9.1). Aby pozbyć się założenia $\sigma(t, y) \neq 0$ potrzebujemy konstrukcji, którą nazywa się adjointem procesu.

Lemat 11 *Niech* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ *będzie przestrzenią z filtracją* $\mathcal{F}_t$. *Niech* $M \in \mathcal{M}^{2,c}$, $M(0) = 0$ *oraz*

$$\langle M \rangle(t) = \int_0^t A(s)ds,$$

gdzie A jest ograniczone, prognozowalne $A \geqslant 0$. Niech B będzie prognozowalne takie, że $A = B^2$. Rozważmy teraz drugą przestrzeń probabilistyczną $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbf{P}')$ z filtracją $\mathcal{F}'_t$, na której określony jest proces Wienera W'. Definiujemy

$$\hat{\Omega} = \Omega \times \Omega', \quad \hat{\mathbf{P}} = \mathbf{P} \otimes \mathbf{P}', \quad \hat{\mathcal{F}}_t = \mathcal{F}_t \otimes \mathcal{F}'_t.$$

Kładziemy

$$\hat{M}(\omega, \omega') = M(\omega), \quad \hat{B}(\omega, \omega') = B(\omega), \quad \hat{W}(s, \omega, \omega') = W'(s, \omega').$$

Wówczas istnieje na $(\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{F}}, \hat{\mathbf{P}})$ proces Wienera W względem filtracji $\hat{\mathcal{F}}_t$ taki, że

$$\hat{M} = \int \hat{B} dW.$$

Dowód. Definiujemy

$$D(s) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{A(s)}} & A(s) > 0 \\ 0 & A(s) = 0 \end{cases}$$

Niech teraz

$$V(t) = \int_0^t D(s) d\hat{M}(s) + \int_0^t 1_{\{A(s)=0\}} d\hat{W}(s).$$

Jeśli oznaczymy

$$N_1(t) = \int_0^t D(s) d\hat{M}(s), \quad N_2(t) = \int_0^t 1_{\{A(s)=0\}} d\hat{W}(s),$$

to z definicji

$$\langle V \rangle = \langle N_1 + N_2, N_1 + N_2 \rangle = \langle N_1 \rangle + 2\langle N_1, N_2 \rangle + \langle N_2 \rangle.$$

Ponieważ $N_1 = X dM_1$, $N_2 = \int Y dM$, (gdzie $X(s) = D(s)$, $Y(s) = 1_{\{A(s)=0\}}$, $M_1(s) = \hat{M}(s)$, $M_2(s)$) więc

$$\langle N_1, N_2 \rangle = \int XY d\langle M_1, M_2 \rangle,$$

co oznacza, że $\langle N_1, N_2 \rangle = 0$, gdyż $XY = 0$. Zatem

$$\langle V \rangle = \langle N_1 \rangle + \langle N_2 \rangle = \int_0^t \frac{1}{A(s)} 1_{A(s)>0} A(s) ds + \int_0^t 1_{A(s)=0} ds = t.$$

To oznacza, że V jest procesem Wienera. Zauważmy, że $W = \int \operatorname{sgn} \hat{B}(s) dV(s)$ jest także procesem Wienera. Pokażemy, że ten proces spełnia warunek zadany w Lemacie. Ściślej zachodzi równość

$$\begin{aligned} \int \hat{B} dW &= \int \hat{B} \operatorname{sgn} B dV = \int \sqrt{A} dV = \\ &= \int \sqrt{A} \frac{1}{A} 1_{A>0} d\hat{M} + \int \sqrt{A} 1_{A=0} d\hat{W} = \\ &= \int 1_{A>0} d\hat{M} = \hat{M} - \int 1_{A=0} d\hat{M}. \end{aligned}$$

Zauważmy teraz, że

$$\mathbf{E}(\int_0^t 1_{A(s)=0} d\hat{M}(s))^2 = \mathbf{E}\int_0^t 1_{A(s)=0} d\langle M\rangle(s) =$$
$$= \mathbf{E}\int_0^t 1_{A(s)=0} A(s)ds = 0.$$

Zatem $\int_0^t 1_{A(s)=0} d\hat{M}(s)$ jest nieodróżnialny od zera. Stąd $\hat{M} = \int \hat{B}dW$. To kończy dowód lematu.

■

Wracamy do dowodu Twierdzenia 25. Przypomnijmy, że

$$N = Z - x - \int b(s, Z(s))ds$$

jest martyngałem takim, że $\langle N\rangle = \int_0^t a(s, Z(s))ds$. Korzystamy z Lematu 11 kładąc $M = N$ oraz $A(s) = a(s, Z(s))$, $\sigma(s, Z(s)) = B(s, Z(s))$. Dostajemy, że przestrzeń $(C, \mathcal{B}, \mathbf{P})$ z filtracją $\mathcal{B}_t$ rozszerza się do $(\hat{C}, \hat{\mathcal{B}}, \hat{\mathbf{P}})$ z filtracją $\hat{\mathcal{B}}_t$, a ponadto

$$\hat{N} = \hat{Z} - x + \int b(s, \hat{Z}(s))ds,$$

gdzie $\hat{Z}(\omega, \omega') = Z(\omega)$ ma postać

$$\hat{N} = \int \sigma(s, \hat{Z}(s))dW(s)$$

dla pewnego procesu Wienera na przestrzeni rozszerzonej $(\hat{C}, \hat{\mathcal{B}}, \hat{\mathbf{P}})$ z filtracją $\hat{\mathcal{B}}_t$. Z definicji oznacza to, że $\hat{Z}$ jest rozwiązaniem równania (9.1). Oczywiście rozkład $\hat{Z}$ na C jest równy $\mathbf{P}$, gdyż $\hat{\mathbf{P}} = \mathbf{P}\otimes\mathbf{P}'$.

■

Powyższe twierdzenia przenoszą się na przypadek ogólny (dowolne d, m). Oczywiście dowody mają znacznie bardziej skomplikowany zapis.

Rozdział 10

Istnienie słabych rozwiązań

10.1 Twierdzenie Stroocka-Varadhana

Przypomnijmy klasyczne twierdzenia Prohorowa.

Twierdzenie 26 *Niech E będzie przestrzenią polską (zupełna, metryczna i ośrodkowa). Niech $\mathbf{P}_i$ będzie rodziną mira probabilistycznych na $\mathcal{B}(E)$. taką, że dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje zbiór zwarty $K \subset E$ taki, że*

$$\mathbf{P}_i(K) > 1 - \varepsilon,$$

wówczas z każdego ciągu $i_n \in I$ można wybrać podciąg i_{n_k} taki, że $\mathbf{P}_{i_{n_k}}$ są zbieżne.

Lemat 12 *Niech $M \in \mathcal{M}^{2,c}$ będzie takie, że*

$$|\langle M\rangle(t) - \langle M\rangle(s)| \leqslant K|t - s|,$$

wówczas dla każdego $\delta > 0$, dla każdego $u \geqslant 0$, dla każdego $u \leqslant t \leqslant u + \delta$ zachodzi nierówność

$$\mathbf{P}(\sup_{u \leqslant t \leqslant u+\delta} |M(t) - M(u)| > \alpha) \leqslant 2e^{-\frac{\alpha^2}{2K\delta}}.$$

Dowód. Wiemy, że dla każdego $\lambda \in \mathbb{R}$ $\exp(\lambda M(t) - \frac{1}{2}\lambda^2\langle M\rangle(t))$ jest martyngałem. Ustalmy $u \geqslant 0$, dla $t \geqslant u$, $\lambda > 0$ definiujemy

$$\Phi^\lambda(t) := \exp(\lambda(M(t) - M(u)) - \frac{1}{2}(\langle M\rangle(t) - \langle M\rangle(u))).$$

Proces $\Phi^\lambda(t)$ dla $t \geqslant u$ jest nadmartyngałem. Zatem

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(\sup_{u\leqslant t\leqslant u+\delta}(M(t)-M(u))>\alpha)=\mathbf{P}(\exists_{t\in[u,u+\delta]}(M(t)-M(u))>\alpha)=\\
&=\mathbf{P}(\exists_{t\in[u,u+\delta]}e^{\lambda(M(t)-M(u))-\frac{\lambda^2}{2}(\langle M\rangle(t)-\langle M\rangle(u))}>e^{\lambda\alpha-\frac{\lambda^2}{2}(\langle M\rangle(t)-\langle M\rangle(u))})\leqslant\\
&\leqslant\mathbf{P}(\exists_{t\in[u,u+\delta]}\Phi^\lambda(t)>e^{\lambda\alpha-\frac{\lambda^2}{2}K(t-u)})\leqslant\\
&\leqslant\mathbf{P}(\sup_{t\in[u,u+\delta]}\Phi^\lambda(t)>e^{\lambda\alpha-\frac{\lambda^2}{2}K\delta})\leqslant e^{-\lambda\alpha+\frac{\lambda^2}{2}K\delta}\mathbf{E}\Phi^\lambda(u),
\end{aligned}$$

gdzie w ostatniej lini $\mathbf{E}\Phi^\lambda(u)=1$. Pozostaje zatem zminimalizować po λ wyrażenie $e^{-\lambda\alpha+\frac{\lambda^2}{2}K\delta}$. Łatwo sprawdzić, że $\lambda_{min}=\frac{\alpha}{K\delta}$. Stąd

$$\mathbf{P}(\sup_{u\leqslant t\leqslant u+\delta}(M(t)-M(u))>\alpha)\leqslant e^{-\frac{\alpha^2}{K\delta}+\frac{\alpha^2}{2K\delta}}=e^{-\frac{\alpha^2}{2K\delta}}.$$

Jeśli zauważymy, że $\langle M\rangle=\langle -M\rangle$, zastosujemy powyższe rozumowanie do $-M$ i dodamy uzyskane nierówności stronami, to

$$\mathbf{P}(\sup_{u\leqslant t\leqslant u+\delta}(M(t)-M(u))>\alpha)\leqslant 2e^{-\frac{\alpha^2}{2K\delta}}.$$

■

Lemat 13 *Istnieje ciąg (v_N), $v_N\to 1$, że jeśli M jest jak w Lemacie 11.*

$$\mathbf{P}(\forall_{m\geqslant N}\forall_{p\in\mathbb{N}}\forall_{0\leqslant u\leqslant m}\sup_{u\leqslant s,t\leqslant u+2^{-p}}|M(t)-M(s)|\leqslant\alpha_p)\geqslant v_N,$$

gdzie $\alpha_p=\sqrt{2(\ln 2)mpK2^{-p}}$

Dowód. Zauważmy, że zachodzą nierówności

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(\exists_{m\geqslant N}\exists_{p\in\mathbb{N}}\exists_{0\leqslant u\leqslant m}\sup_{u\leqslant s,t\leqslant u+2^{-p}}|M(t)-M(s)|>\alpha_p)\leqslant\\
&\leqslant\sum_{m=N}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty}\mathbf{P}(\exists_{0\leqslant u\leqslant m}\sup_{u\leqslant s,t\leqslant u+2^{-p}}|M(s)-M(t)|>\alpha_p).
\end{aligned}\tag{10.1}$$

Podobnie

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(\exists_{0\leqslant u\leqslant m}\sup_{u\leqslant s,t\leqslant u+2^{-p}}|M(s)-M(t)|>\alpha_p)\leqslant\\
&\leqslant\sum_{j=0}^{m2^p}\sum_{x\in\{s,t\}}(\mathbf{P}(\exists_{j2^{-p}\leqslant x\leqslant(j+1)2^{-p}}|M(s)-M(j2^{-p})|>\alpha_p)+\\
&+\mathbf{P}(\exists_{(j-1)2^{-p}\leqslant x\leqslant j2^{-p}}|M(s)-M((j-1)2^{-p})|>\alpha_p))\leqslant\\
&\leqslant 8\sum_{j=0}^{m2^p}e^{-\frac{\alpha^2}{2K}2^p}=8(m2^p+1)2^{-mp}\leqslant 8(m+1)2^{p-mp}.
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Wstawiając to oszacowanie do (10.1) otrzymujemy

$$\mathbf{P}(\exists_{m\geqslant N}\exists_{p\in\mathbb{N}}\exists_{0\leqslant u\leqslant m}\sup_{u\leqslant s,t\leqslant u+2^{-p}}|M(t)-M(s)|>\alpha_p)\leqslant$$
$$\leqslant 16\sum_{m=N}^{\infty}(m+1)2^{-m+1}=1-v_N, \tag{10.2}$$

gdzie w ostatniej lini definiujemy ciąg (v_N) taki, że $v_N\to 1$.

Twierdzenie 27 *Niech $\mathcal{S}$ będzie zbiorem miar probabilistycznych na przestrzeni kanonicznej $(C(\mathbb{R}_+),\mathcal{B})$. Załóżmy, że*

1. *istnieje $B\subset\mathbb{R}$ zwarty taki, ze dla każdej miary $\mathbf{P}\in\mathcal{S}$ mamy $\mathbf{P}(Z(0)\in B)=1$;*
2. *dla każdego $\mathbf{P}\in\mathcal{S}$ istnieje V ciągły adaptowalny proces V o wahaniu ograniczonym taki, że $V(0)=0$ oraz $M:=Z-V$ jest $\mathbf{P}$ martyngałem;*
3. *$|\langle M\rangle(t)-\langle M\rangle(s)|\leqslant K|t-s|$, $|V(t)-V(s)|\leqslant K|t-s|$, gdzie K nie zależy od $\mathbf{P}\in\mathcal{S}$,*

wówczas $\mathcal{S}$ jest relatywnie zwarty.

Dowód. Zauważmy, że $C(\mathbb{R}_+)$ jest przestrzenią polską (metryczną, ośrodkową i zupełną). Wystarczy pokazać, że $\mathcal{S}$ jest ciasny. Definiujemy

$$\Gamma_N:=\{\forall_{m\geqslant N}\forall_{p\in\mathbb{N}}\forall_{0\leqslant u\leqslant m}\sup_{u\leqslant s,t\leqslant u+2^{-p}}|M(t)-M(s)|\leqslant\alpha_p\}.$$

Z Lematu 13 wynika, że $\mathbf{P}(\Gamma_N)\geqslant v_N$. Zatem istnieje N takie, że $\mathbf{P}(\Gamma_N)>1-\varepsilon$ dla każdego $\mathbf{P}\in\mathcal{S}$. Zauważmy teraz, że

$$|Z(t)-Z(s)|\leqslant|M(t)-M(s)|+|V(t)-V(s)|.$$

Stąd i z założenia 3

$$\sup_{u\leqslant s,t\leqslant u+2^{-p}}|Z(t)-Z(s)|\leqslant\sup_{u\leqslant s,t\leqslant u+2^{-p}}|M(t)-M(s)|+$$
$$+\sup_{u\leqslant s,t\leqslant u+2^{-p}}|V(t)-V(s)|\leqslant\sup_{u\leqslant s,t\leqslant u+2^{-p}}|M(t)-M(s)|+K2^{-p}.$$

Niech teraz

$$\Gamma'_N:=\{\forall_{m\geqslant N}\forall_{p\in\mathbb{N}}\forall_{0\leqslant u\leqslant m}\sup_{u\leqslant s,t\leqslant u+2^{-p}}|Z(t)-Z(s)|\leqslant K2^{-p}+\alpha_p\}.$$

Oczywiście $\Gamma_N \subset \Gamma'_N$. Zauważmy teraz, że

$$\mathbf{P}(\{Z_0 \in B\} \cap \Gamma_N) \geqslant 1 - \varepsilon.$$

Zbiór $\{Z_0 \in B\} \cap \Gamma_N$ jest domknięty w $C(\mathbb{R}_+)$. Funkcje, które należą do tego zbioru są wspólnie ograniczone i jednakowo ciągłe na każdym przedziale zwartym $[0, n]$. Przypomnijmy, że jednakowa ciągłość funkcji ze zbioru F (postaci $f : T \to S$, gdzie (T, d) (S, ρ) są przestrzeniami metrycznymi) oznacza, że

$$\forall_\varepsilon \exists_\delta \forall_{f \in F} d(s,t) < \delta \Rightarrow \rho(f(s), f(t)) < \varepsilon.$$

W naszym przypadku oznacza to po prostu, że $\sup_{|x-y|<\delta} |f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Na mocy twierdzenia Ascoli-Arzeli oraz definicji topologii w $C(\mathbb{R}_+)$ oznacza to, że zbiór $\{Z_0 \in B\} \cap \Gamma_N$ jest zwarty. Korzystając z Twierdzenia 26 dostajemy tezę Twierdzenia.

$\blacksquare$

Twierdzenie 28 *(Stroocka-Varadhana) Załóżmy, że b, σ są ograniczone mierzalne, b, a-ciągłe ($a = \sigma^2$). Równanie (9.1) ma słabe rozwiązanie.*

Dowód. Pokażemy, że rozwiązanie problemu martyngałowego ma rozwiązanie. Załóżmy, że $|b| \leqslant K$, $|a| \leqslant K$. Istnieją ciągi funkcji b_n, σ_n spełniające warunek Lipschitza i takie, że $b_n \to b$, $\sigma_n^2 \to a$ w sensie zbieżności jednostajnej na zbiorach ograniczonych. Wiemy, że równanie

$$dX = b_n(s, X(s))ds + \sigma_n(s, X(s))dW(s), \quad X_0 = x$$

ma dla każdego $n \in \mathbb{N}$ dokładnie jedno mocne rozwiązanie (jednoznaczne w sensie trajektorii). Zatem problem martyngałowy (x, a_n, b_n) ma również dokładnie jedno rozwiązanie, które oznaczmy $\mathbf{P}_n$. Pokażemy, że zbiór $\{\mathbf{P}_n : n \in \mathbb{N}\}$ jest relatywnie zwarty. Jest jasne, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ $\mathbf{P}_n(Z(0) = x) = 1$. Zatem jako zbiór zwarty B w Twierdzeniu 27 weźmiemy $B = \{x\}$ Definiujemy

$$V_n(t) = \int_0^t b_n(s, Z(s))ds.$$

Ze Stwierdzenia 9 wiemy, że

$$M_n := Z - \int b_n(s, Z(s))ds = Z - V$$

jest $\mathbf{P}_n$ martyngałem, którego nawias skośny jest równy $\int a_n(s, Z(s))ds$. Na mocy ograniczoności b, a (a więc również b_n, a_n) dostajemy, że także założenie 3 w Twierdzeniu 27 jest spełnione. To oznacza, że z ciągu miar $\mathbf{P}_n$ możemy wybrać podciąg zbieżny do pewnego $\mathbf{P}$. Pokażmy, ze $\mathbf{P}$ jest rozwiązaniem problemu martyngałowego (x, a, b). Ustalmy dowolne $f \in C_0^2(\mathbb{R})$. Chcemy pokazać, że

$$f(Z) - \int \mathcal{L}_u f(Z(u))du$$

jest $\mathbf{P}$ martyngałem, gdzie

$$\mathcal{L}_u f(y) = b(u, y)f'(y) = \frac{1}{2}a(u, y)f''(y).$$

Niech $s < t$. Wystarczy pokazać, że dla każdego $\Gamma \in \mathcal{B}_s$ ($\mathcal{B}_s$ filtracja na $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$)

$$\mathbf{E}(1_\Gamma(f(Z(t)) - \int_0^t \mathcal{L}_u f(Z(u))du) = \mathbf{E}(1_\Gamma(f(Z(s)) - \int_0^s \mathcal{L}_u f(Z(u))du),$$

co jest równoważne

$$\mathbf{E}(1_{Gamma}(f(Z(t)) - f(Z(s)))) = \mathbf{E}(1_\Gamma \int_s^t \mathcal{L}_u f(Z(u))du).$$

Jeszcze prościej, wystarczy udowodnić, że dla dowolnej funkcji ciągłej $\mathcal{B}_s$ mierzalnej ograniczonej $\varphi : C(\mathbb{R}_+) \to \mathbb{R}$ mamy

$$\mathbf{E}(\varphi(Z)(f(Z(t)) - f(Z(s)))) = \mathbf{E}(\varphi(Z) \int_s^t \mathcal{L}_u f(Z(u))du).$$

Wiemy, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ $f(Z) - \int \mathcal{L}_u^n f(Z(u))du$ jest $\mathbf{P}_n$ martyngałem. Zatem

$$\mathbf{E}^n(\varphi(Z)(f(Z(t)) - f(Z(s)))) = \mathbf{E}^n(\varphi(Z) \int_s^t \mathcal{L}_u^n f(Z(u))du).$$

Ponieważ $\mathbf{P}_n \to \mathbf{P}$, więc dla każdej funkcji $F : C(\mathbb{R}_+) \to \mathbb{R}$ ciągłej ograniczonej zachodzi $\mathbf{E}^n(F(Z)) \to \mathbf{E}(F(Z))$. Funkcja $F_1(g) = \varphi(g)(g(t) - g(s))$ jest taką funkcją, zatem

$$\mathbf{E}^n(\varphi(Z)(f(Z(t)) - f(Z(s)))) \to \mathbf{E}(\varphi(Z)(f(Z(t)) - f(Z(s)))).$$

Z drugiej strony

$$|\mathbf{E}^n(\varphi(Z) \int_s^t \mathcal{L}_u^n f(Z(u))du) - \mathbf{E}(\varphi(Z) \int_s^t \mathcal{L}_u f(Z(u))du)| \leqslant$$
$$\leqslant |\mathbf{E}^n(\varphi(Z) \int_s^t \mathcal{L}_u f(Z(u))du) - \mathbf{E}(\varphi(Z) \int_s^t \mathcal{L}_u f(Z(u))du)| +$$
$$+|\mathbf{E}^n(\varphi(Z) \int_s^t \mathcal{L}_u^n f(Z(u)) - \mathcal{L}_u f(Z(u))du)|.$$

Funkcja $F_2(g) = \varphi(g) \int_s^t \mathcal{L}_u f(g(u))du$ jest ciągła i ograniczona. Zatem

$$\mathbf{E}^n(\varphi(Z) \int_s^t \mathcal{L}_u f(Z(u))du) \to \mathbf{E}(\varphi(Z) \int_s^t \mathcal{L}_u f(Z(u))du).$$

Pozostaje zauważyć, że

$$\begin{aligned}&|\mathbf{E}^n(\varphi(Z) \int_s^t \mathcal{L}_u^n f(Z(u)) - \mathcal{L}_u f(Z(u))du)| \leqslant \\ &\leqslant \sup_Z |\varphi(Z)|(t-s) \sup_{u\in[s,t]} \sup_{y\in \mathrm{supp} f} |\mathcal{L}^n f(y) - \mathcal{L} f(y)|.\end{aligned}$$

Ponieważ supp$f$ jest zwarty, a $b_n \to b$, $a_n \to a$ na jednostajnie zbiorach zwartych, więc

$$\sup_{y\in \mathrm{supp} f} |\mathcal{L}^n f(y) - \mathcal{L} f(y)| \to 0.$$

To kończy dowód twierdzenia.

■

Powyższe twierdzenie daje istnienie mocnych rozwiązań przy znacznie słabszych założeniach na współczynnik dyfuzji.

Twierdzenie 29 *(Yamada-Watanabe) Niech b, σ będą ograniczone. Jeśli istnieją stała $L > 0$, i funkcja $\delta : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ takie, że*

1. *δ jest niemalejąca oraz $\int_0^1 \frac{1}{\delta^2(x)}dx = \infty$;*
2. *$b(t,x) - b(t,y) \leqslant L|x-y|$;*
3. *$|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leqslant \delta(|x-y|)$ na $[0,T]$,*

to równanie (9.1) ma mocne rozwiązanie, jednoznaczne w sensie trajektorii.

Bibliografia

[1] ELLIOT, R. (1982) Stochastic calculus and applications. *Applications of Mathematics*, **18**, viii+302 pp., Springer, New York

[2] KARATZAS, I. AND SHREVE, S. (1988). Brownian Motion and Stochastic Calculus *Graduate Texts in Mathematics*, **113**, xxiii+470 pp., Springer, New York.

[3] WENTZEL, A.D. (1980). Wykłady z teorii procesów stochastycznych. *Podręcznik akademicki*, 383 pp., PWN, Warszawa.

[4] REVUZ, D. AND YOR, M. (1999) Continuous Martingales and Brownian Motion *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*, **293**, 599 pp., Springer, New York.

[5] WATANABE, S. AND IKEDA, N. (1981) Stochastic differential equations and diffusion processes. *North-Holland Mathematical Library*, **24**, xiv+464 pp., Kodansha, North-Holland.