Seria 8. Martyngały

1. Niech τ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie $\mathcal{U}([0,1])$. Niech $\tau = \inf\{n \geqslant 1 : X_1 + ... + X_n \geqslant 1\}$. Wyznaczyć $\mathbf{E}\tau$.

2. Rzucamy kostką tak długo aż wyrzucimy wszystkie oczka. Znaleźć średnią wartość uzyskanej sumy oczek.

3. Niech $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem Bernoulliego. Niech $\mathcal{F}_n = \sigma(U_1, ..., U_n)$ oraz
$$Z_n = \exp(\alpha(U_1 + ... + U_n) - n\alpha^2/2).$$
Pokaż, że Z_n jest nadmartyngałem. Zbadaj zbieżność p.n. i w L_1.

4. Udowodnij, że dla zmiennych Bernoulliego $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zachodzi
$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|U_1 + ... + U_n|}{\sqrt{2n\log n}} \leqslant 1, \quad \text{p.n.}$$

5. Tożsamość Walda $\mathbf{E}(X_1 + ... + X_\tau) = \mathbf{E}X_1\mathbf{E}\tau$, jeśli $X_1, ..., X_n$ są niezależne o tej samej średniej.

6. Niech (X_n) niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie, przy czym $X_n \geqslant 0$ p.n. oraz $\mathbf{E}X_n = 1$. Dodatkowo, załóżmy, że X_n nie są skoncentrowane w 1. Udowodnić, że $X_1X_2...X_n \to 0$ p.n.

7. (Model Polya) Urna zawiera b kul białych i c czarnych. Losujemy kulę i zwracając dokładamy m kul tego samego koloru. Niech b_n, c_n oznaczają liczbę białych kul i liczbę czarnych. Niech X_n oznacza fakcję kul czarnych $\frac{c_n}{b_n+c_n}$, natomiast $Y_n = 1$ jeśli w n-tym losowaniu wyciągnięto czarną kulę, 0 jeśli białą (dodatkowo $Y_0 = 1$). Pokaż, że (X_n) jest martyngałem względem filtracji $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_0, ..., Y_n)$. Wykaż, że X_n jest zbieżny do zmiennej granicznej X oraz udowodnij, że $\mathbf{E}X = \frac{c}{b+c}$.

8. W pojemniku jest znajduje się m cząstek. W każdej sekundzie każda z cząstek, niezależnie od pozostałych, może albo zniknąć z prawdopodobieństwem $\frac{2}{3}$, albo podzielić się na trzy cząstki z prawdopodobieństwem $\frac{1}{3}$. Udowodnić, że z prawdopodobieństwem jeden, po pewnym czasie nie będzie w pojemniku ani jednej cząstki.

9. Niech $-\mathbb{N} = \{0, -1, -2, ...\}$. Niech $(X_{-n})_{-n\in-\mathbb{N}}$, będzie nadmartyngałem względem pewnej filtracji $(\mathcal{F}_{-n})_{-n\in-\mathbb{N}}$ takim, że
$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}X_{-n} < \infty.$$
Pokaż, że $(X_{-n})_{-n\in-\mathbb{N}}$ jest rodziną jednostajnie całkowalną. W szczególności każdy martyngał z czasem odwróconym jest zbieżny p.n.

10. Pokaż, że w sytuacji poprzedniego zadania $(X_{-n})_{n\to\infty}$ jest zbieżny p.n. do X nadto
$$X = \mathbf{E}(X_0| \bigcap_{k=0}^{\infty} \mathcal{F}_{-n}).$$