Seria 7. Martyngały

1. Załóżmy, że $(\mathcal{F}_n)$ jest filtracją, a (X_n) ciągiem zmiennych adaptowalnych do niej. Niech $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
   - Pokaż, że $\tau_B(1) = \tau_B = \inf\{n : \ X_n \in B\}$ jest m.z.
   - Podobnie $\tau_B(k) = \inf n > \tau_B(k-1) : \ X_n \in B$

2. Dany jest ciąg $(X_k)_{k=1}^{10}$ niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie $\mathbf{P}(X_n = \pm 1) = \frac{1}{2}$. Niech
$$\tau = \inf\{n > 1 : \ X_n > X_{n-1}\}, \ \ \sigma = \sup\{n \geqslant 1 : \ X_n > X_{n-1}\}.$$
(notacja $\inf \emptyset = \sup \emptyset = \infty$). Czy τ, σ są m.z.?

3. Zmienne τ, σ są m.z. w.g. filtracji $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Czy zmienne $\tau^2, \tau+1, \tau+\sigma, \tau-1, \tau \wedge (2\sigma)$ są m.z.?

4. Dany jest ciąg (X_n) niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie $\mathbf{P}(X_n = \pm 1) = \frac{1}{2}$. Niech $S_0 = 0$, $S_n = X_1 + ... + X_n$ dla $n \geqslant 1$, $\mathcal{F}_n$- naturalna filtracja.
   - Udowodnić, że X_n, $X_n^2 - n$ są martyngałami.
   - Wyznaczyć taką wartość a, by ciąg $(a^n \cos X_n)$ był martyngałem.
   - Udowodnić, że $\lambda > 0$ ciąg $(\exp(\lambda X_n - \lambda^2 n/2)$ jest nadmartyngałem.

5. Niech $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie o średniej 0. Niech $Z_0 = 0$,
$$Z_n = X_0X_1 + X_1X_2 + ... + X_{n-1}X_n$$
dla $n \geqslant 1$. Udowodnić, że ciąg (Z_n) jest martyngałem.

6. Pokaż, że jeśli $\mathbf{P}(X_i = 1) = p$, $\mathbf{P}(X_i = -1) = q$, $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, ..., X_n)$ (filtracja naturalna), to $Z_n = (\frac{q}{p})^{X-1+...+X_n}$ jest martyngałem.

7. Zagadnienie ruiny gracza. Niech (X_i) będą o tym samy rozkładzie $\mathbf{P}(X_i = 1) = p$, $\mathbf{P}(X_i = -1) = q$. Niech $S_n = X_1 + ... + X_n$ oraz $\tau = \inf\{n \geqslant 0 : \ S_n \in \{-a, b\}\}$. Oblicz $p_1 = \mathbf{P}(S_\tau = -a)$, $p_2 = \mathbf{P}(S_\tau = b)$.

8. W symetrycznym zagadnieniu ruiny $p = q = \frac{1}{2}$ znajdź $\mathbf{E}\tau$.

9. Pokaż, że czas oczekiwania na wygranie $a > 0$ złotych w grze symetrycznej jest nieskończony.

10. Pokaż, że $(X_n, \mathcal{F}_n)$ jest martyngałem wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnego momentu stopu ograniczonego τ mamy
$$\mathbf{E}X_\tau = \mathbf{E}X_0.$$

11. Dany jest martyngał $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ adaptowalny do filtracji $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pokaż, że $(X_{\tau\wedge n}, \mathcal{F}_n)$ też jest martyngałem.