Seria 3. Zbieżność miar

1. Niech X_i będą niezależne o tym samy rozkładzie jednostajnym na odcinku $[a,b]$, $b<\infty$. Czy ciąg $Y_n = \max(X_1, ..., X_n)$ jest słabo zbieżny?

2. Pokaż, że jeśli $\mu_n \xrightarrow{d} \mu$, to istnieje model przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ oraz zmienne losowe X_n, X takie, że X_n ma rozkład μ_n dla każdego n, zmienna X ma rozkład μ nadto zmienne X_n zbiegają prawie na pewno do zmiennej X.

3. Wykaż, że jeśli $X_n \xrightarrow{d} X$, to $\mathbf{E}|X| \leqslant \liminf_{n\to\infty} \mathbf{E}|X_n|$.

4. Pokaż, że jeśli zmienne X_n są jednostajnie całkowalne nadto $X_n \xrightarrow{d} X$, to X ma wartość oczekiwaną i $\liminf_{n\to\infty} \mathbf{E}X_n = \mathbf{E}X$.

5. Niech zmienna X będzie ograniczona nadto niech zmienne X_n mają wszystkie momenty. Pokaz, że jeśli $\mathbf{E}X_n^r \to \mathbf{E}X^r$ dla każdego $r = 1, 2, ...$, to $X_n \xrightarrow{d} X$.

6. Pokaż, że jeśli $X_n \xrightarrow{d} X$ oraz $\sup_{n\to\infty} \mathbf{E}|X_n|^{p+\varepsilon} < \infty$, dla pewnego $p > 0$ i $\varepsilon > 0$, to $\mathbf{E}|X|^p < \infty$ oraz $\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}|X_n|^p = \mathbf{E}|X|^p$