Seria 2. Zbieżność miar

1. Udowodnij, że z faktu iż $\mu_n \xrightarrow{d} \mu$ nie wynika, że $\lim_{n\to\infty} \mu_n(B) = \mu(B)$ dla każdego $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

2. Pokaż, że jeśli $X_n \xrightarrow{d} X$, $Y_n \xrightarrow{d} c$, to $X_n + Y_n \xrightarrow{d} X + c$.

3. Pokaż, że jeśli ciąg funkcji (f_n) zbiega jednostajnie do f- funkcji ciągłej ograniczonej nadto $\mu_n \xrightarrow{d} \mu$, to $\lim_{n\to\infty} \mu_n(f_n) = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu_n = \int f d\mu = \mu(f)$.

4. Pokaż, że z faktu iż $X_n \xrightarrow{d} X$, $Y_n \xrightarrow{d} Y$ nie wynika, że $X_n + Y_n \xrightarrow{d} X + Y$. Pokaż, że implikacja jest prawdziwa w sytuacji gdy rodziny zmiennych $(X_n), X$, $(Y_n), Y$ są niezależne.

5. Pokaż, że jeśli dla każdego n zmienne X_n, Y_n są niezależne, nadto (X_n, Y_n) zbiega słabo do zmiennej (X, Y), to zmienne X i Y są niezależne nadto dla dowolnej funkcji ciągłej $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zachodzi $f(X_n, Y_n) \to f(X, Y)$. W zadaniu wystarczy, że zbiór punktów nieciągłości f ma miarę zero względem rozkładu wektora (X, Y).

6. Niech $X_n \xrightarrow{d} X$ oraz $\lim_{n\to\infty} t_n = t$, gdzie punkt t jest punktem ciągłości dystrybuanty F_X. Udowodnij, że $\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(t_n) = F_X(t)$.

7. Pokaż, że jeśli $X_n \xrightarrow{d} X$, $Y_n \xrightarrow{d} c$, to $X_n Y_n \xrightarrow{d} cX$.

8. Udowodnij, że jeśli $X_n Y_n \xrightarrow{d} X$, $Y_n \xrightarrow{d} 0$, f jest różniczkowalne w zerze, to $X_n(f(Y_n) - f(0)) \xrightarrow{d} f'(0)X$.

9. Wykaż twierdzenie Diniego. Pokaż, że jeśli ciąg dystrybuant (F_n) zbiega punktowo do dystrybuanty ciągłej F, to zbieżność ta jest jednostajna.

10. Metryka Levy'ego. Pokaż, że między dystrybuantami można określić następującą metrykę

$$d(F, G) = \inf\{\varphi \geqslant 0 : \; G(x - \varphi) - \varphi \leqslant F(x) \leqslant G(x + \varphi) + \varphi\}.$$

    Udowodnij, że $F_n \xrightarrow{d} F$ wtedy i tyko wtedy, gdy $\lim_{n\to\infty} d(F_n, F) = 0$.

11. Niech (X_n) będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie jednostajnym $\mathcal{U}(0, 1)$, nadto $Y_n = n \min(X_1, ..., X_n)$. Znajdź słabą granicę ciągu (Y_n).