Seria 12. Łańcuchy Markowa.

1. Pokaż, że jeśli łańcuch jest nieredukowalny i chwilowy to nie istnieje rozkład stacjonarny dla tego łańcucha.

2. Niech $X_1, X_2, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o wartościach w zbiorze $\{1, 2, \ldots\}$. Niech $p(j) = \mathbf{P}(X_1 = j)$ oraz $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$. Definiujemy

$$V_n = \inf\{S_m - n : \quad S_m > n\}.$$

Pokaż, że V_n jest łańcuchem Markowa i znajdź macierz przejścia. Czy ten łańcuch jest nieredukowalny? Czy jest powracalny? Kiedy istnieje rozkład stacjonarny dla tego łańcucha?

3. Niech α będzie ustaloną liczbą dodatnią. Dany jest łańcuch Markowa na $E = \{1, 2, \ldots\}$ startujący z 1 o następujących własnościach.

$$P(k, 1) = (k+1)^{-\alpha}, \quad \mathbf{P}(k, k+1) = 1 - (k+1)^{-\alpha}.$$

Czy łańcuch jest okresowy? Czy jest nieredukowalny. Dla jakich α jest powracalny? Dla jakich α istnieje rozkład stacjonarny?

4. Dany jest spójny graf (W, K) o skończonej liczbie wierzchołków oraz łańcuch Markowa o wartościach w W taki,że z każdego wierzchołka $x \in W$ można w jednym kroku dojść do jednego z wierzchołków sąsiadujących z x. Niech $n(x)$ oznacza liczbę sąsiadów x. Pokaż, że $\pi(x) = n(x)/(2|K|)$ jest rozkładem stacjonarnym.

5. Niech $S \subset \mathcal{X}$. Definiujemy

$$p_S(x) = \mathbf{P}(\{\exists n \geqslant 0 : \ X_n \in S\} | X_0 = x)$$

Nadto niech

$$m_S(x) = \mathbf{E}(\inf\{n \geqslant 0 : \ X_n \in S\} | X_0 = x)$$

Pokaż, że $p_S(x) = 1$, $m_S(x) = 0$ dla $x \in S$ oraz

$$p_S(x) = \sum_{y \in \mathcal{X}} P(x, y) p_S(y)$$
$$m_S(x) = 1 + \sum_{y \notin S} P(x, y) m_S(y).$$

6. Pokaż, że $p_S(x) = 0$ jeśli $P^n(x, y)$ dla wszystkich $y \in S$ oraz $n \geqslant 0$.

7. Pokaż, że $m_S(x) = \infty$ jeśli $p_S(x) < 1$

8. Niech stany $\{1, 2, \ldots, m\}$ będą pochłaniające. Niech stany $\{m+1, \ldots, k\}$ będą nieistotne. Nadto niech macierz przejścia P ma postać

$$P = \left\{ \begin{array}{ll} \overbrace{\quad m \quad} & \overbrace{k-m} \\ I & 0 \\ R & Q \end{array} \right\}.$$

Pokaż, że oznaczając przez macierz $A = A(i, j)$, gdzie $i \in \{1, 2, \ldots, k-m\}$, $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ tablicę wartości $A(i, j) = p_{\{j\}}(i + m)$ dostajemy równość

$$A = (I - Q)^{-1} R.$$

9. Pchła porusza się między psem, kotem, człowiekiem i podłogą. Niezależnie od tego, gdzie jest teraz, wybiera następne miejsce pobytu z równymi p-stwami. Swoją wędrówkę zaczyna od podłogi. Na psie i kocie może się pożywić, na człowieku ginie, a na podłodze głoduje.
   (a) Ile średnio skoków wykona pchła przed śmiercią?
   (b) Jaka jest średnia liczba posiłków pchły przed śmiercią?
   (c) Jakie jest p-stwo, że pchła zginie na czczo?
10. Pokaż, że jeśli łańcuch Markowa ma jeden stan pochłaniający, a wszystkie pozostałe stany komunikują się i nie tworzą zbioru zamkniętego, to są one stanami chwilowymi.