Seria 11. Łańcuchy Markowa.

1. Po wierzchołkach pięciokąta $ABCDE$ porusza się pionek. W chwili początkowej znajduje się w punkcie A, a w każdym kolejnym ruchu przesuwa się w sposób niezależny od poprzednich ruchów z p-stwem $1/2$ do jednego z sąsiednich wierzchołków. Obliczyć
   - p-stwo, że pionek powróci do punkt A przed dotarciem do punktu C,
   - wartość oczekiwaną liczby ruchów, jakie wykona pionek przed powrotem do punktu A.
2. Udowodnić, że w zagadnieniu ruiny średni czas oczekiwania wynosi ab.
3. Naukowiec mający r parasoli wędruje między domem a biurem, zabierając ze sobą parasol (jeśli jest on pod ręką) wtedy, gdy pada (p-stwo p), lecz nie przy bezdeszczowej pogodzie (p-stwo $q = 1-p$). Niech stanem łańcucha będzie liczba parasoli znajdujących się pod ręką bez względu na to, czy naukowiec jest w domu, czy w miejscu pracy. Skonstruować macierz przejścia i znaleźć rozkład stacjonarny. Znaleźć przybliżone p-stwo, że naukowiec zmoknie w danym (odległym) dniu, a następnie wykazać, że 5 parasoli zabezpiecza w (95%) przed zmoknięciem.
4. Udowodnić, że jeśli łańcuch Markowa jest powracający, to $\mathbf{P}_x(\tau_y < \infty) = 1$ dla każdych stanów x, y.
5. Niech łańcuch Markowa o przestrzeni stanów $S = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ ma macierz przejścia postaci $P(0,1) = p_0$, $P(0,0) = 1 - p_0$, $P(n, n+1) = p_n$, $P(n, 0) = 1 - p_n$. Kiedy ten łańcuch jest powracający, a kiedy chwilowy?
6. Czy łańcuch Markowa o macierzy przejścia

$$\left\{\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right\}, \quad \left\{\begin{array}{cccc} 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right\}$$

   jest łańcuchem okresowym?
7. Udowodnić, że jeśli dla macierzy przejścia nieprzywiedlnego łańcucha Markowa istnieje x takie, że $P(x,x) > 0$, to łańcuch nie jest okresowy.
8. W pudełku A jest 6 kul ponumerowanych liczbami od 1 do 6, w pudełku B ani jednej. Wykonano 100000 rzutów kostką i po każdym rzucie przekładano kule z wylosowanym numerem do drugiego pudełka. Jaka jest mniej więcej szansa, że pudełko B jest puste?
9. Znaleźć wszystkie rozkłady stacjonarne dla łańcucha Markowa o macierzy przejścia

$$P = \left\{\begin{array}{cccc} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right\}$$

10. Udowodnić, że jeśli π jest rozkładem stacjonarnym oraz x nie jest stanem powracającym dodatnim, to $\pi(x) = 0$.
11. W grze planszowej (o stanach $1, 2, 3$) macierz przejścia zadana jest wzorem

$$P = \left\{\begin{array}{ccc} \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right\}$$

   Ile średnio trzeba gier by przejść ze stanu 1 do stanu 2.

12. Czy jeśli $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ jest łańcuchem Markowa, to dla dowolnych zbiorów $A_n, ..., A_0 \in \mathcal{B}$ zachodzi

$$\mathbf{P}(X_n \in A_n | X_{n-1} \in A_{n-1}, ...X_0 \in A_0) = \mathbf{P}(X_n \in A_n | X_{n-1} \in A_{n-1}).$$

13. Dany jest łańcuch Markowa o macierzy przejścia w której wszystkie wiersze są identyczne. Pokaż, że zmienne $X_0, X_1, X_2, ...$ są niezależne.

14. Dla łańcucha Markowa $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ startującego z x pokazać, że $\tau = \inf\{n \geqslant 1 : \ X_n \neq i\}$. Udowodnić, że τ ma rozkład geometryczny.

15. Rozważmy błądzenie pod Z^2. Z każdego stanu można przejść do sąsiada z p-stwem $\frac{1}{4}$. Pokazać, że jest to łańcuch powracalny, znaleźć jego miarę stacjonarną i udowodnić, że nie istnieje rozkład stacjonarny.

16. W modelu dyfuzji z $n = 20$ załóżmy, że w chwili początkowej 0 nie ma żadnej cząstki w pojemniku I. Wyznaczyć przybliżone p-stwo, że w chwili 10000 nie będzie żadnej cząstki pojemniku I.