Seria 10. Łańcuchy Markowa.

1. Niech $\mathcal{X}$ będzie pewnym zbiorem przeliczalnym. Dany jest ciąg $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ niezależnych zmiennych losowych oraz ciąg funkcji f_n, $f_n : \mathcal{X} \times \mathbb{R} \to \mathcal{X}$. Definiujemy ciąg $(Y_n)_{n=1}^{\infty}$

$$Y_{n+1} = f_n(Y_n, X_n), \quad n = 0, 1, 2, ...,$$

gdzie Y_0 jest pewną zmienną losową o wartościach w $\mathcal{X}$. Dowieść, że $(Y_n)_{n=0}^{\infty}$ jest łańcuchem Markowa.

2. Dany jest łańcuch Markowa $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ na pewnej przestrzeni stanów $\mathcal{X}$ oraz różnowartościowa funkcja $f : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$. Wykaż, że $(f(X_n))$ jest łańcuchem Markowa. Co jeśli f nie jest różnowartościowa?

3. Dany jest ciąg $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie $\mathbf{P}(X_n = \pm 1) = \frac{1}{2}$. Rozstrzygnąć, które spośród podanych procesów są łańcuchami Markowa:
   - $U_0 = 0$, $U_n = X_1 + ... + X_n$, $n \geqslant 1$,
   - $W_n = X_0 X_1 ... X_n$, $n \geqslant 0$,
   - $V_n = (-1)^{U_n}$, $n \geqslant 0$,
   - $Y_n = X_n X_{n+1}$, $n \geqslant 0$,
   - $Z_n = \frac{X_n + X_{n+1}}{2}$, $n \geqslant 0$.

4. Dany jest ciąg $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie $\mathbf{P}(X_n = 1) = p$, $\mathbf{P}(X_n = -1) = q$, $p + q = 1$, $p, q > 0$. Niech $S_n = X_1 + ... + X_n$, $n = 1, 2, ...$. Udowodnić, że ciągi

$$Y_n = |S_n|, \quad Z_n = \max_{k \leqslant n} S_k - S_n$$

są łańcuchami Markowa.

5. Rzucamy symetryczną monetą aż do momentu, gdy wyrzucimy serię 4 orłów. Oblicz wartość oczekiwaną liczby przeprowadzonych rzutów.

6. Rzucamy kostką tak długo aż pojawi się 16 lub 66. Jakie jest p-stwo że 16 pojawi się wcześniej?

7. Wykazać, że dla stanu chwilowego x zachodzi wzór

$$\mathbf{P}_x(\tau_x < \infty) = \frac{U(x,x)}{1 + U(x,x)}.$$

8. Wykazać, że jeśli stan y jest powracający oraz $x \to y$, to $\sum_{n=1}^{\infty} P^n(x,y) = \infty$.

9. Wykazać, że jeśli y jest stanem chwilowym, to $\sum_{n=1}^{\infty} P^n(x,y) < \infty$ dla dowolnego stanu x. W szczególności $\lim_n P^n(x,y) = 0$.

10. Udowodnić, że dla skończonego łańcucha Markowa y jest stanem chwilowym wtedy i tylko wtedy, gdy jest stanem nieistotnym.