

Algorytmy i Struktury Danych, 3. ćwiczenia, rozwiązania zadań z serii 3

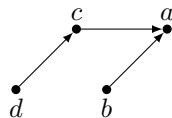
2025-10-22

Zadanie 3.1

a) Zaproponuj algorytm sortujący ciągi 5-elementowe, optymalny ze względu na porównania (wykonujący możliwie najmniej porównań w pesymistycznym przypadku). Udowodnij poprawność swojego rozwiązania.

Rozwiązanie: Niech $A = (a, b, c, d, e)$.

- $compare(a, b)$, (bez straty ogólności, niech $a < b$)
- $compare(c, d)$, (niech $c < d$)
- $compare(a, c)$, (niech $a < c$)



- teraz wsortowujemy, e pomiędzy a, c, d ,
if ($c > e$) then $compare(e, a)$ else $compare(e, d)$
- możemy otrzymać jeden z następujących częściowych porządków:



każdy z nich można posortować używając 2 porównań.

b) Zaproponuj optymalny ze względu na porównania algorytm sortujący 6 różnych liczb a, b, c, d, e, f , o których wiadomo, że $a < b$ oraz $c < d$.

Rozwiązanie: Wszystkich ciągów spełniających warunki zadania jest $6!/4 = 180$ (z każdej permutacji z $a < b$ i $c < d$ możemy wygenerować 3 inne zamieniając wartości a/b lub c/d lub a/b i c/d).

Algorytm sortujący: zastosuj schemat dla optymalnego sortowania 5-elementów (a, b, c, d, e) z pominięciem dwóch pierwszych porównań (znamy już ich wynik z założenia zadania) — 5 porównań. Następnie wsortuj f do uporządkowanego

ciągu 5-elementowego — 3 porównania. Razem wykonaliśmy 8 porównań, jest to optymalna liczba ponieważ $\lceil \log_2 180 \rceil = 8$.

c) Udowodnij, że do scalania dwóch ciągów uporządkowanych o długościach 2 i 5 potrzeba i wystarcza 5 porównań.

Rozwiązanie: Wszystkich permutacji spełniających warunki zadania jest $\binom{7}{2} = 21$ (spośród 7 liczb wybieramy 2 należące do krótszego ciągu).

Algorytm: Niech pierwszy ciąg to a_1, a_2 a drugi to b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 . Wsortujemy a_1 do ciągu b rozpoczynając od porównania z b_2 . Następnie wsortowujemy a_2 do pozostałej części ciągu b . W sumie potrzebujemy 5 porównań (jeśli $a_1 < b_2$ to 2+3 porównania, wpp, 3+2 porównania). Jest to również dolna granica, ponieważ $\lceil \log_2 21 \rceil = 5$.

Zadanie 3.2

W tym zadaniu badamy algorytmy (turnieje), które polegają na wykonaniu ciągu porównań na elementach danych. Każde takie porównanie nazywamy pojedyńkiem, a o elemencie większym w pojedynku mówimy, że jest jego zwycięzcą.

a) Udowodnij, że każdy algorytm znajdujący przez porównania największy element w zbiorze n -elementowym, wykonuje w pesymistycznym przypadku co najmniej $n-1$ pojedynków

Rozwiązanie: Dla dowolnego algorytmu A , za każdym razem, gdy porównywane są dwa elementy, to łączymy je krawędzią. Jeśli A użył mniej niż $n-1$ porównań, to istnieją co najmniej dwie spójne składowe, więc i dwa elementy które nie są ze sobą porównywalne.

b) Udowodnij, że w każdym algorytmie wyznaczania elementu największego w zbiorze n -elementowym, element największy musi w pesymistycznym przypadku rozegrać co najmniej $\log n$ pojedynków.

c) Udowodnij, że optymalny algorytm wyznaczania 2-go elementu co do wielkości wykonuje w pesymistycznym przypadku co najmniej $n + \lceil \log n \rceil - 2$ pojedynków, $n > 1$.

Rozwiązanie:

- budujemy drzewo turniejowe (porównujemy sąsiednie elementy, dalej przechodzi wygrany) — ten krok zabiera $n-1$ porównań,
- niech S zbiór elementów które przegrały z liderem, $|S| = \lceil \log n \rceil$
- wybierz lidera wśród elementów S — ten krok zabiera $|S| - 1 = \lceil \log n \rceil - 1$ porównań.
- razem $n + \lceil \log n \rceil - 2$

Dowód, że algorytm jest optymalny. Knuth, tom III, 5.3.3. strona 221.

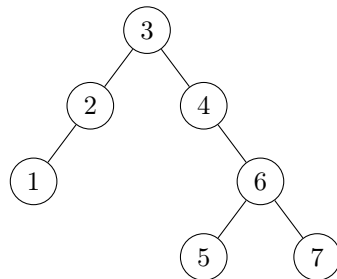
d) Zaproponuj metodę wyznaczania k -tego elementu co do wielkości ($1 < k \leq n/2$), w której w pesymistycznym przypadku wykonuje się co najwyżej $n - k + (k - 1)\lceil \log(n - k + 2) \rceil$ pojedynków. Wskazówka: zauważ, że element największy w podzbiorze $(n-k+2)$ -elementowym nie może być k -tym co do wielkości.

Rozwiązanie:

- zbuduj drzewo turniejowe T dla $A[1..n - (k - 2)]$ elementów,
- dla każdego z elementu x z $A[(n - (k - 2) + 1)..n]$ ($k - 2$ elementów), kolejno:
 - dodaj $\max(T)$ do Y ,
 - zastąp $\max(T)$ przez x (to wymaga $\lceil \log(n - k + 2) \rceil$ pojedynków)
- dodaj $\max(T)$ do Y (aktualny $\max(T)$ w drzewie turniejowym jest jednym z $(k - 1)$ największych elementów),
- niech L to lista $\lceil \log(n - k + 2) \rceil$ elementów w drzewie turniejowym, które przegrały pojedynek z $\max(T)$
- k -ty element to maksymalny element z L i możemy go wyznaczyć używając $|L| - 1 = \lceil \log(n - k + 2) \rceil - 1$ porównań
- zauważmy, że $|Y| = k - 1$ i Y to $k - 1$ największych elementów w A .

Zadanie 3.3 - Quicksort (opcjonalnie)

Rozważmy rekurencyjny algorytm Quick Sort sortujący różnowartościowe ciągi liczbowe w taki sposób, że elementem dzielącym jest zawsze pierwszy element sortowanego ciągu, a względny porządek elementów w sortowanych rekurencyjnie podciągach jest taki sam, jak w całym ciągu. Dla ustalonego ciągu, sortowanie można przedstawić w postaci drzewa binarnego, w którego węzłach są zapisywane elementy dzielące, a dla każdego węzła lewe poddrzewo zawiera elementy mniejsze od elementu dzielącego, natomiast prawe poddrzewo - elementy większe. Takie drzewo nazywamy drzewem QS. Oto drzewo QS dla ciągu 3,4,2,1,6,7,5 (wysokość tego drzewa wynosi 3):



- Ile jest permutacji liczb 1, 2, 3, 4, 5, dla których drzewo QS ma wysokość 3?
- Zaprojektuj efektywny algorytm, który dla danych: dodatniej liczby całkowitej n , różnowartościowego ciągu liczb całkowitych o długości n oraz liczby naturalnej k , $1 \leq k \leq n$, wyznaczy liczbę porównań w algorytmie Quick Sort, w których bierze udział k -ty element ciągu. W przykładzie powyżej, 5-tym elementem ciągu jest 6 i bierze on udział w 4 porównaniach.
- Zaprojektuj algorytm, który dla danej permutacji liczb $1, 2, \dots, n$ obliczy w czasie liniowym liczbę porównań wykonywanych przez algorytm Quick Sort przy sortowaniu tej permutacji.

Rozwiązanie: Zauważmy, że jeśli zbudujemy drzewo rekurencji algorytmu QS , to dla dowolnego elementu x , liczba porównań w których x bierze udział możemy podzielić na:

- $size(x) - 1$ – porównania w których x jest pivotem,
- $h(x)$ – porównania w których x jest porównywany ze wcześniejszymi pivotami (przodkami x w drzewie rekurencji).

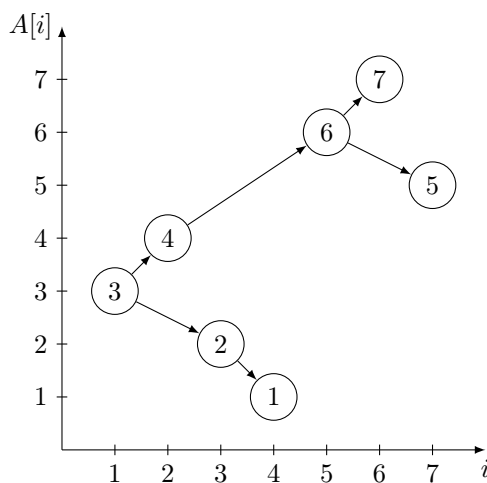
Obie wartości $size$ i h możemy łatwo policzyć znając kształt drzewa.

Założmy, że dane wejściowe zostały zapisane w tablicy $A[1, \dots, n]$. Ponieważ zakładamy, że wejściowy ciąg jest permutacją $1, \dots, n$ stąd możemy zdefiniować A^{-1} :

$$A^{-1}[j] = \{i : A[i] = j\}$$

Czyli A^{-1} dla każdej wartości zawiera odpowiadający jej indeks w tablicy A .

Zanim przejdziemy do rozwiązania, rozrysujmy drzewa QS (dla przykładowej permutacji) w trochę inny sposób:



Możemy zasymulować algorytm i wygenerować drzewo QS używając następującego algorytmu:

Algorytm 1: Calc-QS-Tree($A[1, \dots, n]$)

Function $CALC(S)$:

```
p = L[1]
L = {x : x ∈ S[2, ..., |S|] oraz x < p}
R = {x : x ∈ S[2, ..., |S|] oraz x > p}
if L ≠ ∅ then
    lp = CALC(L)
    PARENT[lp] = p
if R ≠ ∅ then
    rp = CALC(R)
    PARENT[rp] = p
return p
```

PARENT[v] = NULL (dla $v \in 1, \dots, n$)CALC($A[1, \dots, n]$)

Niestety takie rozwiązanie ma dokładnie taką samą złożoność jak Quick-Sort czyli pesymistycznie kwadratową (np. dla posortowanego ciągu).

Rozwiązanie brutalne:

Skorzystajmy z następującego lematu (więcej szczegółów można przeczytać na stronie https://www.mimuw.edu.pl/~rytter/TEACHING/JA0/radoszowski_delta.pdf):

Lemat 1. Dla zadanej tablicy liczb całkowitych $X[1, \dots, n]$, po liniowym pre-processingu, możemy odpowiadać w czasie stałym na dowolne zapytania postaci:

$$RMQ(X, l, r) = \min(X[l, \dots, r])$$

Zauważmy, że wartości rozważane w $CALC(S)$ zawsze są spójnymi przedziałami zakresu $1, \dots, n$, stąd możemy przepisać nasz algorytm w następujący sposób:

Algorytm 2: Calc-QS-Tree-2($A[1, \dots, n]$)

Input: A : permutacja liczb $1, \dots, n$ **Function** $CALC(l, r)$:

```
i = RMQ( $A^{-1}$ , l, r)
p = A[i]
if l < p then
    lp = CALC(l, p - 1)
    PARENT[lp] = pivot
if p < r then
    rp = CALC(p + 1, r)
    PARENT[rp] = p
return p
```

PARENT[v] = NULL (dla $v \in 1, \dots, n$)przygotuj tablicę A^{-1} do zapytań RMQ CALC(1, n)

Rozwiązanie eleganckie:

Dla ustalonej tablicy $A[1, \dots, n]$ zdefiniujmy następujące wartości:

$$LPred[i] = \max\{x : x \in A[1, \dots, (i - 1)] \text{ oraz } x < A[i]\}$$

$$LSucc[i] = \min\{x : x \in A[1, \dots, (i-1)] \text{ oraz } x > A[i]\}$$

Dla pewnych indeksów niektóre wartości mogą nie być zdefiniowane – gdy np. obliczamy min lub max po pustych zbiorach.

Przykład:

i	1	2	3	4	5	6	7
$A[i]$	3	4	2	1	6	7	5
$LPred[i]$	-	3	-	-	4	6	4
$LSucc[i]$	-	-	3	2	-	-	6

Wartości $LPred$ (i analogicznie $LSucc$) możemy obliczyć w czasie $O(n)$ korzystając z bardzo prostych struktur danych:

Algorytm 3: obliczanie $LPred$

```

S = pusty stos
foreach j ∈ {1, ..., n} do
    // niezmiennik: stos zawiera indeksy i1, ..., ik (Top(S)=ik)
    // i1 < i2 < ... < ik oraz A[i1] < A[i2] < ... < A[ik] < j
    i = A-1[j]                                     /* czyli A[i] = j */
    while |S| > 0 and Top(S) > i do
        Pop(S)
    if |S| > 0 then
        LPred[i] = A[Top(S)]
    else
        LPred[i] = -
    Push(i)

```

Lemat 2. Niech $A[i] = j$, $LPred[i] = p$, $LSucc = s$, wartość $parent[j]$ jest równa:

- jeśli $p \neq -$ i $s \neq -$ to odpowiedzią jest wartość, która jest bardziej na prawo, czyli: jeśli $A^{-1}[p] > A^{-1}[s]$ to $parent[j] = p$ w przeciwnym przypadku $parent[j] = s$,
- jeśli $p \neq -$ i $s = -$ to $parent[j] = p$
- jeśli $p = -$ i $s \neq -$ to $parent[j] = s$
- jeśli $p = -$ i $s = -$ to $parent[j] = NULL$.

Jeszcze ładniejsze rozwiązanie:

Drzewo QS ma kształt dokładnie taki jak Cartesian Tree (https://en.wikipedia.org/wiki/Cartesian_tree) tablicy A^{-1} . A takie drzewo można zbudować w czasie $O(n)$.

Zadanie 3.4

Powiemy, że dwa napisy są podobne wtedy i tylko wtedy, gdy zawierają jednakowe liczby wystąpień tych samych znaków. Danych jest n napisów nad alfabetem

m -znakowym $\{1, 2, \dots, m\}$. Zaproponuj algorytm, który stwierdza, ile jest wśród nich różnych klas napisów podobnych. Twój algorytm powinien działać w czasie $O(R + m)$, gdzie R jest sumą długości wszystkich napisów.

Rozwiązanie: Podstawowa idea:

- dla każdego słowa w_i oblicz jego kod $code(w_i) = sorted(w_i)$, gdzie $sorted(w)$ oznacza słowo w z uporządkowanymi niemalejącymi znakami (np. $sorted(adbacab) = aaabbed$)
- posortuj słowa $code(w_1), \dots, code(w_n)$ używając algorytmu z ćwiczeń (sortowanie leksykograficzne słów różnej długości)
- usuń duplikaty z posortowanej listy.

Kroki drugi i trzeci w oczywisty sposób zajmą czas $O(R + m)$. Niestety jeśli pierwszy krok tego algorytmu zaimplementujemy naiwnie, to może się okazać, że obliczenie $code(w_i)$ zajmie nam czas $O(|w_i| + m)$, co w sumie może dać $O(R + nm)$.

Na szczęście możemy wygenerować kody słów w efektywniejszy sposób. Każdy znak z $w_1, \dots, w_n$ zastępujemy przez trójkę (c, i, j) oznaczającą że $w_i[j] = c$. Sortujemy wszystkie trójki w jednym kroku. Teraz dzięki tej posortowanej liście mamy uporządkowane wszystkie litery z całego zbioru słów i możemy je kolejno dopisywać do kodów słów:

```

Input: lista słów  $w_1, \dots, w_n$ 
 $T :=$  pusta lista
foreach  $w_i \in w_1, \dots, w_n$  do
    foreach  $j \in 1, \dots, |w_i|$  do
         $\lfloor$  dodaj  $(w_i[j], i, j)$  do  $T$ 
     $\rfloor$ 
posortuj leksykograficznie trójki z  $T$ 
foreach  $i \in 1, \dots, n$  do
     $\lfloor$   $code[w_i] = \epsilon$  (pusty napis)
foreach  $(c, i, j) \in T$  do
     $\lfloor$   $code[w_i] += c$ 

```

Dzięki “zbiorniczemu” sortowaniu listy T udało się obliczyć kody wszystkich słów w w czasie $O(R + m)$.

Przykład:

```

w_1 = aba
w_2 = ba
w_3 = caa
w_4 = ab

T = [
    (a, 1, 1), (b, 1, 2), (a, 1, 3),
    (b, 2, 1), (a, 2, 2),
    (c, 3, 1), (a, 3, 2), (a, 3, 3),
    (a, 4, 1), (b, 4, 2)
]
```

```
posortowane T = [
    (a, 1, 1), (a, 1, 3), (a, 2, 2), (a, 3, 2), (a, 3, 3), (a, 4, 1),
    (b, 1, 2), (b, 2, 1), (b, 4, 2),
    (c, 3, 1)
]

code(w_1) = aab
code(w_2) = ab
code(w_3) = aac
code(w_4) = ab
```

Zadanie 3.5

Dana jest tablica liczb całkowitych $a[1..n]$, o której wiadomo, że dla każdego $i = 1, 2, \dots, n$,

$$|\{j : |a[j] - a[i]| \leq n\}| > n/2020.$$

Zaproponuj liniowy algorytm sortowania tablicy a .

Rozwiązanie:

Algorytm 4: Sort(a)

```
wynik = ∅
while a ≠ ∅ do
    m = min(a)
    wybierz elementy z zakresu [m, m + 2n] ∈ a i zapisz je w tablicy b
    usuń elementy należące do b z a
    posortuj b używając algorytmu CountingSort
    dodaj posortowaną tablicę b na koniec tablicy wynik
```

Możemy zauważyć, że dla tablic spełniających warunki zadania, pętla **while** wykona się $O(1)$ razy.

Niech $adj(x) = \{j : |x - a[j]| \leq n\}$, z założenia zadania wiemy, że dla $x \in a$, mamy $|adj(x)| > n/2020$.

Niech $m_1, \dots, m_k$ to ciąg minimów wybranych przez algorytm. Z warunku wyboru tablicy b mamy $|m_i - m_j| > 2n$ dla $i \neq j$. Stąd jeśli popatrzymy na zbioru $adj(m_i)$ i $adj(m_j)$ są one parami rozłączne. Czyli, jeśli algorytm wykona k iteracji, to $|\bigcup_{1 \leq i \leq k} adj(m_i)| > \frac{kn}{2020}$.

Zadanie 3.6 (opcjonalnie)

W tym zadaniu rozważamy drzewa ukorzenione o n wierzchołkach $1, 2, \dots, n$. Korzeniem drzewa jest zawsze wierzchołek 1.

W takim drzewie jest jednoznacznie określona funkcja $f : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, n\}$, która każdemu wierzchołkowi i , różnemu od korzenia, przyporządkowuje wierzchołek $f(i) = \text{ojciec } i$ w drzewie; $f(1)$ jest zawsze równe 0.

Dwa n -wierzchołkowe drzewa T_1 i T_2 , zadane odpowiednio przez funkcje f_1 i f_2 , są izomorficzne wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka różnowartościowa

funkcja $g : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$, że dla każdego $i = 1, 2, \dots, n$, $g(f_1(i)) = f_2(g(i))$.

Zaproponuj algorytm, który w czasie $O(n)$ sprawdzi, czy dwa ukorzenione drzewa T_1 i T_2 są izomorficzne.

Rozwiązanie:

Algorytm 5: TreeIsomorphism($T_1, T_2, depth$)

```

if  $T_1.height > depth$  then
    | return  $T_1.height == T_2.height$ ;
if not TreeIsomorphism( $T_1, T_2, depth + 1$ ) then
    | return false;
foreach  $v \in T_1.nodes[depth + 1] \cup T_2.nodes[depth + 1]$  do
    | (w porządku rosnących etykiet)
    | dodaj  $value(v)$  do listy wierzchołka  $parent(v)$ 
posortuj leksykograficznie listy  $value(v)$  dla  $v \in T_1.nodes[depth]$ 
posortuj leksykograficznie listy  $value(v)$  dla  $v \in T_2.nodes[depth]$ 
porównaj czy listy są identyczne, jeśli nie to return false
zamień etykiety  $value(v)$  na liczby z zakresu  $1, \dots, n$ 
return true;

```
