Algorytmy i Struktury Danych, 12. ćwiczenia

2023-01-18 (wersja 1.01)

Implementacja struktury Find-Union

Algorithm 1: Init(n)

```
foreach i ∈ {1..n} do
    p[i] = −1
    size[i] = 1
```

Algorithm 2: Find(i)

```
if p[i] = −1 then
    return i
else
    p[i] := Find(p[i])
    return p[i]
```

Algorithm 3: Union(i, j)

```
i = Find(i)
j = Find(j)
if i ≠ j then
    if size[j] > size[i] then
        (i, j) = (j, i)
    p[j] = i
    size[i] = size[i] + size[j]
```

Zadanie 12.1

(w nowym wydaniu Cormena, problem na numer 21–2)

Dany jest las $\mathcal{F} = \{T_i\}$ ukorzenionych drzew z trzema operacjami:

- Make-Tree(v) tworzy drzewo składające się z węzła v,
- Find-Depth(v) zwraca głębokość węzła v w jego drzewie
- Graft(r,v) ustawia jako ojca węzła r węzeł v (zakładamy, że r jest korzeniem swojego drzewa T, oraz $v \notin T$)

W naszym rozwiązaniu do reprezentacji lasu ukorzenionych drzew będziemy utrzymywać strukturę Find-Union. W strukturze Find-Union wskaźniki $p[v]$ nie muszą odpowiadać strukturze lasu, jednak za pomocą dodatkowego atrybutu $d[v]$ (pseudo-głębokość) będziemy mogli zapewnić obliczanie Find-Depth(v).

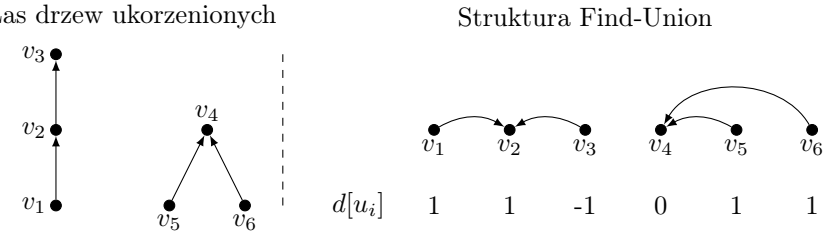
W trakcie działania algorytmu utrzymujemy następujący niezmiennik: jeśli wierzchołek v ma w lesie ukorzenionych drzew głębokość h (czyli Find-Depth(v)=h), a w strukturze Find-Union mamy następującą ścieżkę:

$$p_0 = v, p_1 = p[v], p_2 = p[p[v]], \ldots, p_k = p[p_{k-1}], p_{k+1} = p[p_k] = \text{nil}$$

to

$$h = \sum_{i=0}^{k} d[p_i].$$

Przykładowy stan lasu i struktury Find-Union:



Algorithm 4: Make-Tree(v)

Make-Set(v) (czyli $link[v] = nil$, $size[v] = 1$)
$parent[v]$=nil (ojciec wierzchołka v w lesie $\mathcal{F}$)
$d[v]$=0 (pseudo-głębokość v)

Algorithm 5: Find-Depth(v)

(symulujemy $Find(v)$ i sumujemy wartości $d[v]$ na ścieżce wyznaczonej przez wskaźniki $link$)
if $link[v] = nil$ **then**
  return $d[v]$
else
  niech $u = link[v]$
  $d_1 =$ Find-Depth(u)
  if $link[u] \neq nil$ **then**
    $d[v] += d[u]$
    $link[v] = link[u]$

Algorithm 6: Graft(r, v)

$parent[r] = v$
$h =$ Find-Depth(v)
$r' = Find(r)$
$v' = Find(v)$
$d[r'] += h + 1$
if $size[r'] \leq size[v']$ **then**
    $link[r'] = v'$
    $size[v'] += size[r']$
else
    (w Find-Union podłączamy węzły odwrotnie niż w lesie)
    $link[v'] = r'$
    $size[r'] += size[v']$
    $d[v'] = d[v'] - d[r']$

Zadanie 12.2

Zaproponuj implementację struktury danych udostępniającej operacje struktury Find-Union dla elementów 1..n z przypisanymi całkowitoliczbowymi wartościami (początkowo same zera) oraz dwie nowe operacje:

Add(i, a) :: do wartości wszystkich elementów ze zbioru zawierającego element i dodaj wartość a

Value(i) :: podaj aktualną wartość przypisaną elementowi i

Rozwiązanie: Do każdego węzła drzewa find-union dodaj dodatkowy atrybut Δ początkowo wypełniony wartościami 0.

$Value(i)$ zaimplementowana jest jako zwrócenie sumy wartości Δ na ścieżce od węzła i do korzenia zbioru.

$Add(i, a)$ lokalizuje korzeń zbioru zawierający element i i dodaje do niego wartość a.

Dla standardowych operacji Find-Union, należy uważać na:

- kompresje ścieżek (trzeba aktualizować wartości Δ w węzłach),
- Union (trzeba zapewnić własność, że wartości elementów podłączanego drzewa nie zmienią się).

Zadanie 12.3

Mamy n kul ponumerowanych od 1 do n. Na początku wszystkie kule są zielone. Na kulach wykonujemy następujące operacje:

Pokoloruj(a, b, kol): $1 \leq a \leq b \leq n$, $kol \in \{\text{zielony}, \text{czerwony}\}$ — pokoloruj kule o numerach od a do b na kolor kol,

Kolor(a): $1 \leq a \leq n$ — podaj kolor kuli o numerze a.

a) Zaproponuj strukturę danych, która umożliwi efektywne wykonywanie ciągu operacji Pokoloruj i Kolor.

b) Załóżmy, że na początku wykonujemy $m \geq n$ z góry znanych operacji Pokoloruj, a następnie pytamy o kolor każdej kuli. Zaproponuj efektywny algorytm obliczający kolory kul po wykonaniu wszystkich operacji Pokoloruj.

Rozwiązanie: Punkt a) zadanie "Malowanie Autostrady" z laboratorium – drzewo przedziałowe, wszystkie operacje w czasie $O(\log n)$.

Punkt b) Tworzymy strukturę Find-Union, która dodatkowo dla każdego zbioru przechowuje: min, max, vis (początkowo false). Dodatkowo utrzymujemy tablicę KOL$[1, \ldots, n]$ (początkowo wypełnioną kolorem zielonym).

Następnie wykonujemy operacje Pokoloruj od ostatniej do pierwszej (przy czym nasza implementacja koloruje tylko jeszcze niepokolorowane elementy):

Algorithm 7: Pokoloruj(a,b,kol)

```
s = Find(a)
while max(s) ≤ b do
    ▷ niezmiennik: size(s) = 1 lub vis(s) = True
    if vis[max(s)] = False then
        KOL[max(s)] = kol
        vis[max(s)] = True
    s = Find(max(s) + 1)
s = Find(a)
while max(s) < b do
    s := Union(s, max(s) + 1)
```

Zadanie 12.4

Dany ciąg operacji INSERT(x) ($x \in 1, \ldots, n$, każda wartość jest dodawana co najwyżej 1 raz). oraz EXTRACT-MIN. Należy obliczyć rezultaty poszczególnych operacji EXTRACT-MIN (należy pamiętać, że cały ciąg operacji jest z góry dany).
Przykład:

$$4, 8, E, 3, E, 9, 2, 6, E, E, E, 1, 7, E, 5$$

Rozwiązanie: Rozbijamy ciąg wywołań na podciągi jednorodne:

$$I_1, E, I_2, \ldots, I_m, E, I_{m+1}$$

Gdzie każdy zbiór I_j to jakiś podzbiór kluczy (być może pusty!).

Algorithm 8: Off-Line-Minimum

for $i \in 1, \ldots, n$ **do**
  wyznacz j takie, że $i \in I_j$
  if $j \neq m+1$ **then**
    $extracted[j]=i$
    niech l będzie najmniejszą wartością wiekszą niż j, dla której zbiór I_l istnieje
    $I_l = I_j \cup I_l$ (zbiór I_j zostaje zniszczony)

Zadanie 12.5

Dokonaj analizy rozwiązania problemu Find-Union ze zrównoważaniem drzew i kompresją ścieżek, przy założeniu że operacje Find wykonywane są dopiero po wykonaniu wszystkich operacji Union.

Rozwiązanie: Zakładam, że dla wszystkich operacji Union argumenty wskazują na reprezentantów zbiorów (więc czas wykonania pojedynczej operacji to $O(1)$). Gdyby było inaczej można symulować operacje Find za pomocą $Union(i, i)$.

Teraz pozostaje nam pokazać, że dowolny ciąg m operacji $Find$ na n zbiorach nie zajmie więcej niż $O(n+m)$.

Pokolorujmy krawędzie lasu Find-Union na dwa kolory, zielony jeśli krawędź prowadzi do reprezentanta zbioru i niebieski wpp. Zauważmy, że lesie Find-Union jest co najwyżej $n-2$ krawędzi niebieskich. Jeśli operacja Find przechodzi po k krawędziach, to oznacza, że przechodzi o $k-1$ krawędziach niebieskich i 1 zielonej. Ze względu na kompresję ścieżki, każda krawędź niebieska jest zamieniana na zieloną. Ponieważ mamy ograniczoną liczbę krawędzi niebieskich i po każdej jesteśmy w stanie przejść tylko raz, stąd całkowity czas wykonania operacji Find to $O(n+m)$.

Off-line LCA

(w nowym wydaniu Cormena, problem na numer 21–3)

Dane jest drzewo T, oraz ciąg P, zapytań postaci $LCA(x, y)$ — pytanie o najniższego wspólnego przodka węzłów x i y.

Algorithm 9: LCA(u)

Make-Set(u)
$ancestor$[Find-Set(u)]=u
for $v \in adj(u)$ **do**
  LCA(v)
  UNION(u, v)
  $ancestor$[Find-Set(u)]=u
$color$[(u)]=CZARNY
for $v : \{u, v\} \in P$ **do**
  if $color[v]=CZARNY$ **then**
    najniższym wspólnym przodkiem u i v jest $ancestor$[Find-Set(v)]

Trzeba uzasadnić:

- dla każdej pary $(u, v) \in P$ udzielona zostanie dokładnie jedna odpowiedź,
- poprawnosć algorytmu,

System różnych reprezentantów

Dana jest rodzina I, n niepustych podzbiorów zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$, z których każdy to całkowitoliczbowy przedział postaci $[i, j]$, $i \leq j$. Zaprojektuj efektywny algorytm sprawdzania, czy zadana rodzina posiada system różnych reprezentantów, a jeśli tak, to podaje jeden z nich.

Algorithm 10: SystemRóżnychReprezentantów(I)

```
for i ∈ 1, ..., n + 1 do
    Make-Set(i)
    Last[i] = i
posortuj przedziały I wg. drugiej i pierwszej współrzędnej
for [l, r] ∈ I do
    i = Last[Find-Set(l)]
    if i ≤ r then
        przypisz i jako reprezentanta [l, r]
        i' = Last[Find-Set(i + 1)]
        Union(i, i')
        Last[Find-Set(i')] = i'
    else
        BRAK ROZWIĄZANIA
```