

WPI - gramatyki bezkontekstowe

16 listopada 2021

1 Gramatyki bezkontekstowe

Zadanie 1. Podaj gramatykę języka $L = \{w \in \{a, b\}^* : \#(a, w) = \#(b, w)\}$.

Rozwiązanie zadania 1.

$$S ::= \langle \text{eps} \rangle \mid aSbS \mid bSaS$$

Zadanie 2. Podaj gramatykę języka $L = \{w \in \{a, b\}^* : \#(a, w) \neq \#(b, w)\}$.

Rozwiązanie zadania 2.

$$\begin{aligned} S &::= A \mid B \\ A &::= RaA \mid RaR \\ B &::= RbB \mid RbR \\ R &::= \langle \text{eps} \rangle \mid aRbR \mid bRaR \end{aligned}$$

Zadanie 3. Podaj gramatykę języka $L = \{w \in \{a, b\}^* : \#(a, w) = 2\#(b, w)\}$.

Rozwiązanie zadania 3.

$$S ::= \langle \text{eps} \rangle \mid SbSaSaS \mid SaSbSaS \mid SaSaSbS$$

Zadanie 4. Podaj gramatykę języka L poprawnych wyrażeń nawiasowych $()$.

Rozwiązanie zadania 4.

$$S ::= (S)S \mid \langle \text{eps} \rangle$$

lub niejednoznaczana wersja:

$$S ::= (S) \mid SS \mid \langle \text{eps} \rangle$$

Zadanie 5. Podaj gramatykę języka L poprawnych wyrażeń nawiasowych $() []$, przy czym nawiasy kwadratowe nie mogą być zawarte w okrągłych.

Rozwiązanie zadania 5.

$S ::= [S]S \mid (P)S \mid \langle \text{eps} \rangle$
 $P ::= (P)P \mid \langle \text{eps} \rangle$

Zadanie 6. Podaj gramatykę języka $L = \{w = a^n b^k c^m : n + k = m\}$.

Rozwiązanie zadania 6.

$S ::= aSc \mid X$
 $X ::= bXc \mid \langle \text{eps} \rangle$

Zadanie 7. Podaj gramatykę języka $L = \{w = a^n b^k c^m : n + m = k\}$.

Rozwiązanie zadania 7.

$S ::= XY$
 $X ::= aXb \mid \langle \text{eps} \rangle$
 $Y ::= bYc \mid \langle \text{eps} \rangle$

Zadanie 8. Podaj gramatykę języka $L = \{w = a^n b^k c^m : n + m = k + 1\}$.

Rozwiązanie zadania 8.

$S ::= aXY \mid XYc$
 $X ::= aXb \mid \langle \text{eps} \rangle$
 $Y ::= bYc \mid \langle \text{eps} \rangle$

Zadanie 9. Podaj gramatykę języka $L = \{w = a^n b^k c^m : n + m \neq k\}$.

Rozwiązanie zadania 9.

$S ::= XBY \mid AX Y \mid XYC \mid AX YC$
 $X ::= aXb \mid \langle \text{eps} \rangle$
 $Y ::= bYc \mid \langle \text{eps} \rangle$
 $A ::= aA \mid a$
 $B ::= bB \mid b$
 $C ::= cC \mid c$

Zadanie 10. Podaj gramatykę języka $L = \{w = a^n b^k c^m : n + 2m = k + 2\}$.

Rozwiązanie zadania 10. $S ::= aaXY \mid XYc$ $X ::= aXb \mid \langle \text{eps} \rangle$ $Y ::= bbYc \mid \langle \text{eps} \rangle$

Zadanie 11. Wyrażenia arytmetyczne z prawostronnie łącznym potęgowaniem, czyli że np. $x * y^{z^v}$ parsuje się jako $x * (y^{(z^v)})$

Rozwiązanie zadania 11.

$W ::= S \mid -S \mid W+S \mid W-S$
 $S ::= C \mid S*C \mid S \text{ div } C \mid S \text{ mod } C$
 $C ::= P \mid P^C$
 $P ::= L \mid (W)$
 $L ::= [1-9][0-9]^* \mid 0$

Zadanie 12. Podaj gramatykę języka $L = \{w \in \{a, b\}^* : \#(a, w) = 2k, k \geq 0\}$.

Rozwiązanie zadania 12.

$S ::= aBaS \mid bS \mid \langle \text{eps} \rangle$
 $B ::= bB \mid \langle \text{eps} \rangle$

Zadanie 13. Podaj gramatykę języka $L = \{w \in \{a, b\}^* : w \neq abababb\}$.

Rozwiązanie zadania 13.

$S ::= aA \mid bX \mid \langle \text{eps} \rangle$
 $A ::= bB \mid aX \mid \langle \text{eps} \rangle$
 $B ::= aC \mid bX \mid \langle \text{eps} \rangle$
 $C ::= bD \mid aX \mid \langle \text{eps} \rangle$
 $D ::= aE \mid bX \mid \langle \text{eps} \rangle$
 $E ::= bF \mid aX \mid \langle \text{eps} \rangle$
 $F ::= bG \mid aX \mid \langle \text{eps} \rangle$
 $G ::= aX \mid bX$
 $X ::= aX \mid bX \mid \langle \text{eps} \rangle$

Zadanie 14. Podaj gramatykę języka $L = \{w \in \{a, b\}^* : w \text{ nie zawiera } aa\}$.

Rozwiązanie zadania 14.

$S ::= aB \mid B$
 $B ::= bS \mid \langle \text{eps} \rangle$

Zadanie 15. Podaj gramatykę języka $L = \{w \in \{a, b\}^* : w \text{ nie zawiera } aaa\}$.

Rozwiązanie zadania 15.

$S ::= aaB \mid aB \mid B$
 $B ::= bS \mid \langle \text{eps} \rangle$

Zadanie 16. Podaj gramatykę języka $L = \{w \in \{a, b\}^* : w \text{ nie zawiera } abaab\}$.

Rozwiązanie zadania 16.

$S ::= a S_1 \mid b S \mid \langle \text{eps} \rangle$
 $S_1 ::= b S_2 \mid a S_1 \mid \langle \text{eps} \rangle$
 $S_2 ::= a S_3 \mid b S \mid \langle \text{eps} \rangle$
 $S_3 ::= a S_4 \mid b S_2 \mid \langle \text{eps} \rangle$
 $S_4 ::= a S_1 \mid \langle \text{eps} \rangle$

Zadanie 17. Podaj gramatykę języka $L = \{w \in \{a, b\}^* : w \neq a^n b^n a^n\}$.

Rozwiązanie zadania 17.

$S ::= A \mid AB \mid APQ \mid PBQ \mid PQB \mid ABABX \mid BX$
 $P ::= aPb \mid ab$
 $Q ::= bQa \mid ba$
 $A ::= aA \mid a$
 $B ::= bB \mid b$
 $X ::= aX \mid bX \mid \langle \text{eps} \rangle$
 $Y ::= aX \mid bX$

Zadanie 18. Przez segment słowa $v \in A^*$ składający się z tych samych liter x nazwiemy takie słowo $w = x^k$ dla pewnego $x \in A$ oraz $k \in \mathbb{N}^+$, że $v = w'ww''$ dla pewnych $w', w'' \in A^*$. Segment taki jest maksymalny, jeśli ani w' nie kończy się na x , ani w'' nie zaczyna się od x . Napisz gramatykę generującą wszystkie słowa v nad alfabetem $\{a, b, c\}$ o tej właściwości, że każdy maksymalny segment złożony z samych liter b w słowie v musi być bezpośrednio poprzedzony przez dłuższy segment złożony z samych liter a .

Rozwiązanie zadania 18.

$S ::= \langle \text{eps} \rangle \mid CS \mid TS$
 $T ::= A \mid aTb$
 $A ::= a \mid aA$
 $C ::= c \mid cC$

Zadanie 19. Podaj gramatykę, która wygeneruje słowa nad alfabetem $0, 1$, które mają tyle samo jedynek na pozycjach parzystych co na pozycjach nieparzystych.

Rozwiązanie zadania 19.

$S ::= X \mid X0 \mid X01X1$
 $X ::= \langle \text{eps} \rangle \mid NX \mid AXBX \mid BXA X$
 $N ::= 00 \mid 10$
 $A ::= 01$
 $B ::= 10$

Zadanie 20. Napisz gramatykę generującą język takich słów nad alfabetem $\{0, 1, 2\}$, w których pomiędzy każdymi dwoma zerami występuje jedynka, pomiędzy każdymi dwoma jedynkami występuje zero, (dwójki mogą występować dowolnie), np. 1, 1010, 0221021.

Rozwiązanie zadania 20.

$S ::= 2S \mid 0Y \mid 1X \mid \langle \text{eps} \rangle$
 $X ::= 2X \mid 0Y \mid \langle \text{eps} \rangle$
 $Y ::= 2Y \mid 1X \mid \langle \text{eps} \rangle$

Zadanie 21. Podaj gramatykę, która wygeneruje słowa nad alfabetem a, b , zawierające parzystą liczbę liter a i nieparzystą liczbę liter b .

Rozwiązanie zadania 21.

```
S ::= aZ | bX           // parzyste a, nieparzyste b
X ::= aY | bS | <eps>  // parzyste a, parzyste b
Y ::= aX | bZ           // nieparzyste a, parzyste b
Z ::= aS | bY           // nieparzyste a, nieparzyste b
```