Algorytmy i Struktury Danych, 11. ćwiczenia

2019-12-11

Spis treści

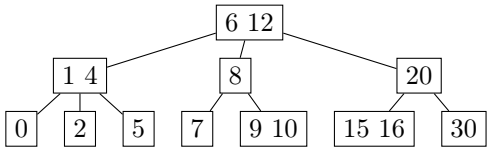
1 Usuwanie z drzew AVL

`http://www.cs.toronto.edu/~toni/Courses/265-2010/handouts/avl.pdf`

2 2-3 drzewa

2-3 drzewa to drzewa zrównoważone o następujących własnościach:

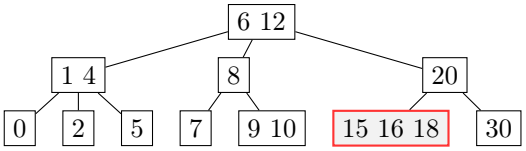
- każdy węzeł przechowuje 1 lub 2 klucze,
- każdy węzeł wewnętrzny (oprócz korzenia) ma 2 lub 3 synów,
- wszystkie liście mają tą samą głębokość,
- zachowany jest porządek kluczy w poddrzewach (mniej więcej jak w drzewach BST),



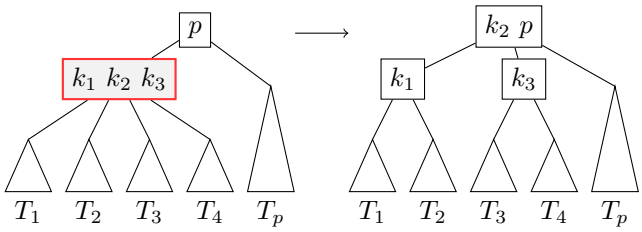
Rysunek 1: Przykładowe 2-3 drzewo

Wstawienia do drzewa:

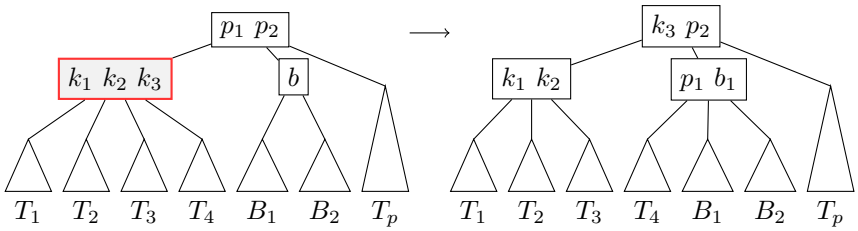
- znajdujemy liść w którym powinien znaleźć się nowy klucz, dodajemy go do węzła (może okazać się, że po tej operacji węzeł posiada 3 klucze). Przykładowo po dodaniu klucza 18 do drzewa z rysunku otrzymamy:



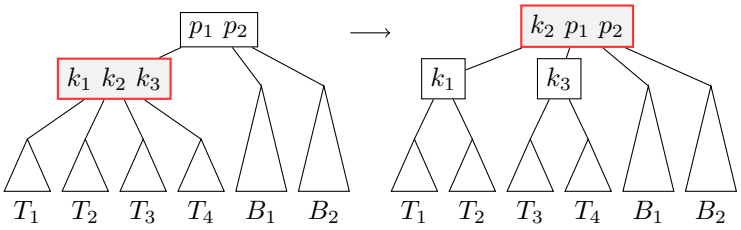
- jeśli przez wstawienie otrzymaliśmy węzeł z 3 kluczami to musimy naprawić drzewo. W trakcie naprawy, drzewo może chwilowo zawierać jeden węzeł z 3 kluczami (oraz 4 synami)
- Naprawianie polega na próbie przeniesienia nadmiarowego klucza do sąsiadujących węzłów
  - jeśli ojciec nadmiarowego węzła ma tylko jeden klucz, to możemy rozbić nadmiarowy węzeł na dwa (zawierające 1 klucz) a 3 (środkowy co do wartości) klucz przenieść do ojca



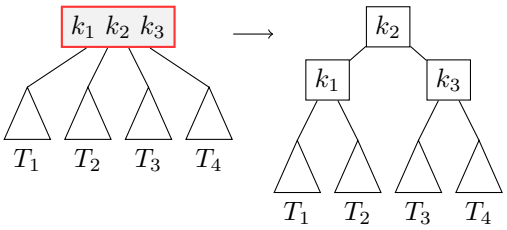
  - jeśli ojciec nadmiarowego węzła ma dwa klucze, ale któryś z braci ma tylko jeden klucz, to możemy przenieść jeden klucz do ojca, a stąd jeden klucz do brata (teoretycznie można sobie poradzić bez tego przypadku, ale dzięki niemu można potencjalnie szybciej zakończyć poprawianie drzewa)



  - jeśli obaj bracia mają po dwa klucze, to rozdzielamy nadmiarowy węzeł i przenosimy jeden klucz do ojca (który stanie się nadmiarowy)

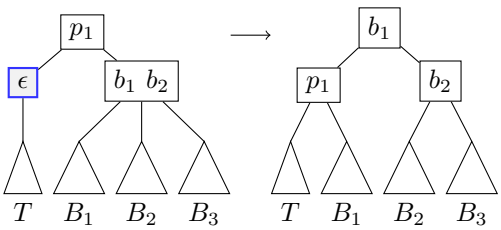


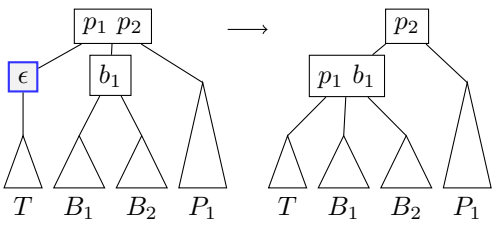
– jeśli korzeń jest nadmiarowy, to rozdzielamy go na trzy węzły (zawierające po jednym kluczu), z których środkowy klucz staje się nowym korzeniem

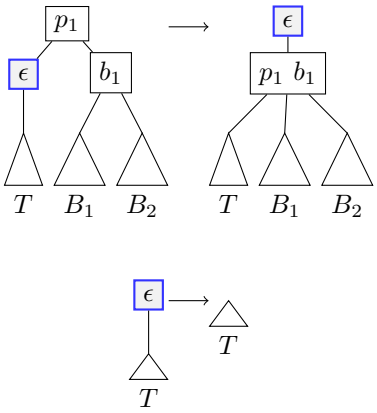


Usuwanie z drzewa:

- jeśli klucz leży w węźle wewnętrznym, to zamieniamy go z następnikiem (lub poprzednikiem), i redukujemy problem do usuwania z liścia,
- jeśli klucz leży w liściu, to usuwamy go z węzła,
- jeśli okazuje się, że jakiś węzeł zawiera 0 kluczy, to poprawiamy drzewo idąc od tego węzła do korzenia i próbując zastąpić puste miejsce kluczem pożyczonym od sąsiadów. W trakcie poprawiania drzewo może zawierać co najwyżej jeden węzł zawierający 0 kluczy i jednego syna.
- możliwe przypadki:

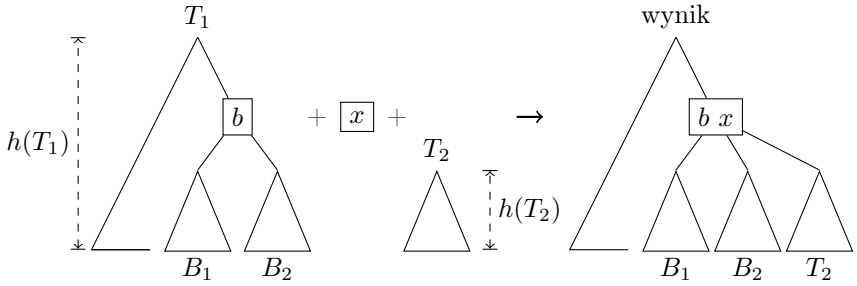






Scalanie $\textsc{Join}(T_1, x, T_2)$:

- jest to operacja, która jako argumenty dostaje 2-3 drzewa T_1 i T_2 oraz klucz x, (przy czym $\max\{y \in T_1\} < x < \min\{y \in T_2\}$), operacja zwraca 2-3 drzewo zawierające wartości $T_1 \cup \{x\} \cup T_2$.
- jeśli $h(T_1) = h(T_2)$, to tworzymy drzewo o korzeniu z kluczem x, oraz lewym poddrzewem T_1, prawym poddrzewem T_2,
- jeśli $h(T_1) > h(T_2)$ (symetryczny przypadek $h(T_1) < h(T_2)$): na skrajnie prawej ścieżce T_1, odnajdujemy węzeł b, leżący w odległości $h(T_1) - h(T_2) - 1$ od korzenia (dzięki temu synowie b mają wysokości $h(T_2)$),
- do węzła b dodajemy klucz x oraz jako skrajnie prawe poddrzewo T_2,



- może to spowodować powstanie węzła o 3 kluczach i w takim wypadku poprawiamy drzewo analogicznie do wstawiania.

Złożoność czasowa: $O(|h(T_1) - h(T_2)| + 1)$.

Podział drzewa $\textsc{Split}(x, T)$:

- operacja usuwa klucz x z drzewa i tworzy dwa 2-3 drzewa, $T_1 = \{y \in T : y < x\}$ oraz $T_2 = \{y \in T : y > x\}$
- szukamy ścieżki od korzenia do węzła zawierającego x (bez straty ogólności możemy założyć, że $x \in T$, w przeciwnym przypadku możemy go sztucznie dodać), węzły na tej ścieżce oznaczamy przez $V = v_0 = root(T), v_1, \ldots, v_k$,

- gdybyśmy usunęli ścieżkę V z drzewa T, to rozpadnie się ono na $O(\log |T|)$ 2-3 drzew, każde z nich będzie w całości albo zawierało klucze większe od x lub mniejsze od x
- niech L to maksymalna kolekcja poddrzew T spoza ścieżki V, zawierająca klucze mniejsze od x:

$$L = \{T_v : v \in T \text{ oraz } v \notin V \text{ oraz } \mathit{parent}(v) \in V \text{ oraz } \max(T_v) < x\}$$

- analogicznie definiujemy R (zawierające poddrzewa o wartościach większych od x)

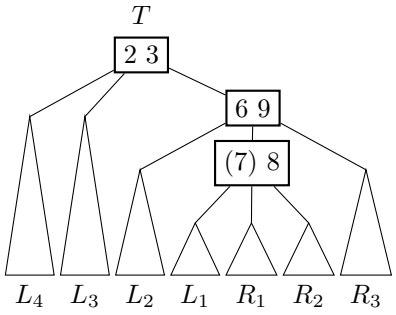
$$R = \{T_v : v \in T \text{ oraz } v \notin V \text{ oraz } \mathit{parent}(v) \in V \text{ oraz } \min(T_v) > x\}$$

- analogicznie dzielimy klucze ze ścieżki V:

$$X_L = \{y : \mathit{keys}(V) \text{ oraz } y < x\}$$
$$X_R = \{y : \mathit{keys}(V) \text{ oraz } y > x\}$$

- żeby otrzymać drzewo T_1 scalamy poddrzewa z L (wg rosnących wysokości) używając kluczy z X_L jako elementów separujących,
- analogicznie, żeby otrzymać drzewo T_2 scalamy poddrzewa z R (wg rosnących wysokości) używając kluczy z X_R jako elementów separujących.

Złożoność czasowa: $O(|h(T)|) = O(\log n)$. Dzięki temu, że scalamy drzewa wg. rosnących wysokości i obserwacji, że scalanie wymaga czasu $O(|h_1| - |h_2|)$ suma składa się teleskopowo.
Przykład $\textsc{Split}(7, T)$:



- $V = (\{2\ 3\}, \{6\ 9\}, \{7\ 8\})$,
- $L = (L_4, L_3, L_2, L_1)$,
- $R = (R_1, R_2, R_3)$,
- $X_L = \{2, 3, 6\}$, $X_R = \{8, 9\}$,
- $T_1 = \textsc{Join}(L_4, 2, \textsc{Join}(L_3, 3, \textsc{Join}(L_2, 6, L_1)))$
- $T_2 = \textsc{Join}(\textsc{Join}(R_1, 8, R_2), 9, R_3)$

3 Join i Split na 2–3–4 drzewach

`http://courses.csail.mit.edu/6.046/spring04/handouts/ps5-sol.pdf`
Ogólnie o 2–3–4 drzewach:
`https://www.cs.purdue.edu/homes/ayg/CS251/slides/chap13b.pdf`

4 Przejście z 2–3–4 drzew na czerwono-czarne

- węzeł z jednym kluczem zamieniany jest na: czarny węzeł,
- węzeł z dwoma kluczami zamieniany jest na dwa węzły: czarny i jego czerwonego syna (możemy dowolnie wybrać lewy czy prawy),
- węzeł z trzema kluczami jest zamieniany na trzy węzły: czarny węzeł z dwoma czerwonymi synami.

5 ASD Zadania — wzbogacanie struktur danych

Zadanie 3.24

Zaprojektuj strukturę danych umożliwiającą wykonywanie w czasie $O(\log n)$ następujących operacji na zbiorze S:

- $makeset(S)$ :: $S := \emptyset$
- $insert((x, y), S)$ :: $S := S \cup \{(x, y)\}$
- $minx(S)$ :: usunięcie z S pary (x, y) o najmniejszej pierwszej składowej,
- $miny(S)$ :: usunięcie z S pary (x, y) o najmniejszej drugiej składowej,
- $searchx(x, S)$ :: wyznaczenie takiej pary $(a, b) \in S$, że $x = a$,
- $searchy(y, S)$ :: wyznaczenie takiej pary $(a, b) \in S$, że $y = b$.

Rozwiązanie: dwa drzewa AVL (jedno ze współrzędnymi x, drugie ze współrzędnymi y), dodatkowo każdy węzeł trzyma dowiązanie do odpowiadającego mu węzła w drugim drzewie.

Zadanie 3.25

Zaprojektuj strukturę danych umożliwiającą wykonywanie w czasie $O(\log n)$ następujących operacji na zbiorze S:

- $construct(S)$ :: utworzenie ciągu pustego S,
- $insert(S, x)$ :: $S := S \cup \{(x)\}$,
- $delete(S, x)$ :: $S := S - \{(x)\}$,
- $search(S, x)$ :: sprawdzenie, czy x znajduje się w zbiorze S,
- $elem(S, i)$ :: wyznaczenie i–tego co do wielkości elementu zbioru S,

- $numb(S, x)$ :: wyznaczenie numeru elementu x w zbiorze S (względem wielkości).

Rozwiązanie: drzewo AVL z atrybutami rozmiar poddrzewa.

Zadanie 3.26

Zaprojektuj strukturę danych do wykonywania ciągów następujących operacji (dla elementów x pochodzących z dowolnego zbioru liniowo uporządkowanego):

- $initialization$ :: $S_i = \emptyset$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$,
- $insert(S_i, x)$ :: $S_i := S_i \cup \{(x)\}$, pod warunkiem, że x nie występuje w żadnym zbiorze S_j, $1 \leq j \leq n$,
- $deletemin(S_i)$ :: usunięcie ze zbioru S_i najmniejszego elementu,
- $find(x)$ :: wyznaczenie numeru zbioru do którego należy element x.

Rozwiązanie: S_i jako zwykłe kopce, dodatków utrzymujemy słownik par $(x, numerzbioru)$

Zadanie 3.27

Zaprojektuj strukturę danych umożliwiającą wykonywanie w czasie $O(\log n)$ następujących operacji na ciągu S:

- $construct(S)$ :: utworzenie ciągu pustego S,
- $insert(S, i, x)$ :: wstawienie x na i-te miejsce w ciągu S, tzn. $S_i = x$ pod warunkiem, że $i \leq |S| + 1$,
- $sum(S, i, j)$ :: obliczenie sumy $\sum_{k=i}^{j} S_k$,

Rozwiązanie: AVL z dodatkowym atrybutem suma elementów poddrzewa.

Zadanie 3.28

Rozwiązanie: AVL z atrybutem rozmiar poddrzewa.

Zadanie 3.29

Zaprojektuj strukturę danych umożliwiającą wykonywanie w czasie $O(\log n)$ następujących operacji na zbiorze S zawierającym przedziały liczb rzeczywistych $[l, r]$:

- $empty(S)$ :: $S = \emptyset$,
- $add(S, I)$ :: $S = S \cup \{I\}$,
- $delete(S, I)$ :: $S = S - \{I\}$,
- $is(S, x)$ :: sprawdzenie czy element x należy do jakiegoś przedziału w zbioru S;

- $intersect(S, I)$ :: sprawdzenie czy przedział I ma niepuste przecięcie z jakimś przedziałem należącym do S.

Rozwiązanie: Utrzymujemy słownik z parami (x, z) (gdzie x to liczba rzeczywista, a z $+1$ lub -1). Dodatkowo każdy węzeł ma dodatkowy atrybut *suma* oznaczający sumę wartości z w poddrzewie. Możemy w takim drzewie w czasie $O(\log n)$ obliczyć $sum(q)$ oznaczającą sumę wszystkich atrybutów z par (x, z), takich, że $x \leq q$.

- $add(S, I)$ – dodajemy do słownika pary $(l, +1)$ i $(r, -1)$,
- $delete(S, I)$ – usuwamy ze słownika pary $(l, +1)$ i $(r, -1)$,
- $is(S, x)$ – jeśli słownik zawiera pary $(x, +1)$ lub $(x, -1)$ to zwracamy $true$, wpp. obliczamy $sum(x)$ i jeśli suma jest > 0 to zwracamy $true$, jeśli $sum(x) \leq 0$, to zwracamy $false$.
- $intersect(S, I)$, jeśli $is(S, l)$ lub $is(S, r)$ to zwracamy $true$, jeśli istnieje w słowniu para (x, z), t.że $l \leq x \leq r$, to zwracamy $true$, wpp zwracamy $false$.