Zadania z podstaw matematyki dla 1 roku informatyki[1]

Zadania na rozgrzewkę

1. Udowodnić, że $1 + 2 + 4 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$.
2. Udowodnić, że każda liczba naturalna postaci $4^{2n+1} + 3^{2n+1}$ dzieli się przez siedem.
3. Udowodnić, że każda liczba naturalna większa lub równa od 2 jest iloczynem liczb pierwszych lub sama jest pierwsza.
4. Udowodnić, że 2021 dowolnych kwadratów można tak podzielić liniami prostymi, że z otrzymanych kawałków da się złożyć jeden kwadrat.
5. Zaznaczyć na rysunku zbiory:
   (a) $\{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2 \mid (x \cdot x + y \cdot y > 1) \to (y + x > 0)\}$;
   (b) $\{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2 \mid (x \cdot x < 0) \to (x \cdot x > 0)\}$;
   (c) $\{x \in \mathbb{R} \mid \forall x(x^2 > 0)\}$;
   (d) $\{x \in \mathbb{R} \mid \exists z\forall y(y > (x - z)^2)\}$;
   (e) $\{x \in \mathbb{R} \mid \exists z\forall y(x + y^2 > z^2)\}$;
   (f) $\{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 1 \to \exists z(x^2 + (y - z)^2 \leq \frac{1}{4})\}$.
6. Zaznaczyć na rysunku zbiory:
   (a) $\{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2 + y^2 > 1) \to [(x^2 + y^2 \leq 2) \wedge (\neg(x \cdot y = 0) \to |y| = |x|)]\}$;
   (b) $\{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2 \mid ((x^2 + y^2 = 4) \to (y > -1 \wedge y \neq 1)) \to (x^2 + y^2 = 9)\}$;
   (c) $\{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2 \mid \forall x(x^2 + 1 > y) \to (y + x < 0)\}$.
   (d) $\{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2 \mid (x > y) \to (y + x > 0)\}$.
7. Zaznaczyć na rysunku zbiory:
   (a) $\{z \in \mathbb{R} \mid \forall x\exists y\,(\sin(x + y) < z)\}$;

[1] Zadania są zebrane przypadkowo, nie zawsze sprawdzone i bez gwarancji poprawności. Korzystać można na własne ryzyko i odpowiedzialność. Zadania i rozwiązania pochodzą od różnych autorów, między innymi Mikołaja Bojańczyka, Jacka Chrząszcza, Łukasza Czajki, Wojciecha Czerwińskiego, Norberta Dojera, Michała Godziszewskiego, Piotra Hoffmana, Tomasza Kazany, Bartka Klina, Eryka Kopczyńskiego, Agnieszki Kozubek, Sławomira Lasoty, Filipa Murlaka, Linha Anh Nguyena, Damiana Niwińskiego, Pawła Parysa, Marcina Peczarskiego, Marcina Penconka, Wojciecha Plandowskiego, Aleksego Schuberta, Adama Slaskiego, Michała Skrzypczaka, Michała Strojnowskiego, Szymona Toruńczyka, Jerzego Tyszkiewicza, Darii Walukiewicz-Chrząszcz, Piotra Wasilewskiego, Piotra Wilkina. Jednak autorstwo wielu zadań jest trudne do ustalenia. Za wykrycie błędów dziękuję Paniom: Larze Citko, Weronice Kisielińskiej, Agnieszce Kozubek, Annie Pawłowskiej, Aleksandrze Pidde i Patrycji Stępień, oraz Panom: Piotrowi Borowskiemu, Radosławowi Burnemu, Mateuszowi Danowskiemu, Jackowi Chrząszczowi, Michałowi Godziszewskiemu, Resulowi Hangeldiyevowi, Kamilowi Herbie, Januszowi Kudełce, Sławomirowi Lasocie, Mikołajowi Lisikowi, Tomaszowi Kaszlewiczowi, Rafałowi Kołtunowi, Kamilowi Majdanikowi, Rościsławowi Matusiewiczowi, Piotrowi Padlewskiemu, Pawłowi Perzynie, Maciejowi Piekarniakowi, Wojciechowi Przytule, Damianowi Rodziewiczowi, Maciejowi Różańskiemu, Kamilowi Rychlewiczowi, Damianowi Sawickiemu, Aleksemu Schubertowi, Michałowi Sienkiewiczowi, Michałowi Siennickiemu, Grzegorzowi Skoraczyńskiemu, Stanisławowi Solarewiczowi, Adamowi Slaskiemu, Piotrowi Wasilewskiemu, Karolowi Wąsowskiemu, Michałowi Włodarczykowi i Karolowi Wychowańcowi.

(b) $\{z \in \mathbb{R} \mid \exists y \forall x\, (\sin(x+y) < z)\}$.

8. Zaznaczyć na rysunku zbiory:
   (a) $\{z \in \mathbb{R} \mid \forall x \exists x (x = 1)\}$;
   (b) $\{z \in \mathbb{R} \mid \exists x \forall x (x = 1)\}$;
   (c) $\{x \in \mathbb{R} \mid \forall x \exists x (x = 1)\}$;
   (d) $\{x \in \mathbb{R} \mid \exists x \forall x (x = 1)\}$.
9. Zaznaczyć na rysunku zbiory:
   (a) $\{x \in \mathbb{R} \mid \exists y \forall z (y - z^2 < x \wedge x \leq y + \frac{1}{2} \wedge y \geq 1)\}$;
   (b) $\{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2 \mid \forall z (y^2 + (x-z)^2 \neq 1) \to \exists z ((x-z)^2 + (y-z^2)^2 = 1)\}$.

R 10. Zaznaczyć w układzie współrzędnych następujące zbiory:
   (a) $\{\langle x, y\rangle : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \;\mid\; y > |x| \leftrightarrow (x^2 + y^2 \geq 4 \wedge y \leq 3)\}$;
   (b) $\{\langle x, y\rangle \mid \exists z (z \in \mathbb{Z} \wedge \forall w (|w - |z|| = \frac{1}{2} \to |w - y| \leq \frac{1}{2} \wedge |z - x| \leq \frac{1}{2}))\}$.

R 11. Która z następujących równoważności jest prawdziwa dla dowolnego $y \in \mathbb{R}$?
   (a) $y \in \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} \;\Leftrightarrow\; y > 0$?
   (b) $\sin y \in \{\sin x \mid x > 0\} \;\Leftrightarrow\; y > 0$?

12. Co znaczą następujące zdania? Jak je sformułować, żeby nie budziły wątpliwości?
   (a) *Nie wolno pić i grać w karty.*
   (b) *Nie wolno pluć i łapać.*
   (c) *Zabrania się zaśmiecania i zanieczyszczania drogi.*[2]
   (d) *Zabrania się zaśmiecania lub zanieczyszczania drogi.*[3]
   (e) *Zabrania się jedzenia lub picia na terenie laboratorium komputerowego.*
   (f) *Wpisać, gdy osoba ubezpieczona nie posiada numerów identyfikacyjnych NIP lub PESEL.*[4]
   (g) *Podaj przykład liczby, która jest pierwiastkiem pewnego równania kwadratowego o współczynnikach całkowitych i takiej, która nie jest.*
   (h) *Warunek zachodzi dla każdego x i dla pewnego y.*
   (i) *Nierówność $f(x) \leq g(x)$ nie zachodzi dla dowolnego x.*
   (j) *Funkcja częściowa z A do B nie jest na ogół funkcją z A do B.*
   (k) *Każda liczba ma pewien dzielnik pierwszy.*
   (l) *Każdy marynarz zna pewną knajpę.*
13. Sformułować poprawnie zaprzeczenia stwierdzeń:
   (a) *Liczby m i n są pierwsze.*
   (b) *Liczby m i n są względnie pierwsze.*

R 14. Jak brzmi zaprzeczenie zdania:
   (a) *Żaden pies nie goni każdego kota?*
   (b) *Pewien pies nie goni żadnego kota?*

R 15. Czy następujące definicje można lepiej sformułować?

[2] Kodeks Drogowy przed nowelizacją w roku 1997.
[3] Kodeks Drogowy (Art. 45 p. 1(9)) po nowelizacji w roku 1997.
[4] Instrukcja wypełniania formularza ZUS ZCZA (Zgłoszenie danych o członkach rodziny...)

(a) *Zbiór A jest* żółty*, jeśli ma co najmniej 2 elementy.*
(b) *Zbiór A jest* czerwony*, jeśli dla każdego $x \in A$, jeśli x jest parzyste, to x jest podzielne przez 3.*
(c) *Zbiór A jest* zielony*, jeśli dla pewnego $x \in A$, jeśli x jest parzyste, to x jest podzielne przez 3.*

16. Wskazać błąd w rozumowaniu:

(a) *Aby wykazać prawdziwość tezy*
„Dla dowolnego n, jeśli zachodzi warunek $W(n)$ to zachodzi warunek $U(n)$"
załóżmy, że dla dowolnego n zachodzi $W(n)\ldots$
(b) *Aby wykazać prawdziwość tezy*
„Dla pewnego n, jeśli zachodzi warunek $W(n)$ to zachodzi warunek $U(n)$"
załóżmy, że dla pewnego n zachodzi $W(n)\ldots$

R 17. Wskazać błąd logiczny w następującym rozumowaniu:
Udowodnimy, że istnieje największa liczba rzeczywista. W tym celu rozpatrzymy dwa przypadki. Przypadek pierwszy ma miejsce, gdy dla każdego $x \in \mathbb{R}$ i pewnego $y \in \mathbb{R}$ zachodzi $x \leq y$. Wtedy y jest największą liczbą rzeczywistą. Jeśli przypadek pierwszy nie zachodzi, to z prawa De Morgana wynika, że dla pewnego $x \in \mathbb{R}$ i każdego $y \in \mathbb{R}$ nierówność $x \leq y$ jest fałszywa. Wtedy jednak $x > y$, dla każdego $y \in \mathbb{R}$, skąd w szczególności $x > x$, sprzeczność.

18. Jak poprawnie sformułować następujące zadanie z egzaminu z rachunkowości w SGH?
Naliczone odsetki od kredytów bankowych są:
a) stratami nadzwyczajnymi
b) kosztami działalności operacyjnej zasadniczej
c) kosztami pozostałej działalności operacyjnej
d) żadna odpowiedź nie jest prawidłowa

19. Na czym polega błąd w następującym rozumowaniu?
Aby udowodnić, że zbiór A jest zawarty w zbiorze B należy wykazać, że dowolny element zbioru A należy do zbioru B. Udowodnimy, że zbiór liczb rzeczywistych jest zawarty w zbiorze liczb naturalnych. Weźmy więc dowolną liczbę rzeczywistą: niech to będzie zero. Oczywiście zero należy do zbioru $\mathbb{N}$, a zatem $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{N}$.

20. Na czym polega błąd w następującym rozumowaniu?
Udowodnimy, że każda liczba rzeczywista jest najmniejsza. Niech bowiem x będzie dowolną liczbą rzeczywistą i niech $A = \{y \in \mathbb{R} \mid y < x\}$. Wtedy $A = \varnothing$. Istotnie:
$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in A\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in \{y \in \mathbb{R} \mid y < x\}\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < x\} = \varnothing$.

Rachunek zbiorów

21. Ile elementów mają zbiory $\{1, 2\}$, $\{1, 2, 1\}$, $\{\{1, 2\}, \{2, 1\}, \{1, 2, 1\}\}$, $\{a, b\}$?

22. Wyznaczyć sumę i iloczyn zbiorów A i B, gdy:

(a) $A = \{\varnothing, \{1, 2\}, \{1, 1\}\}$, $B = \{\{2, 2, 1\}, \{3, 1\}\}$;
(b) $A = \{\varnothing, \{\{1, 2\}, \{1, 1\}\}\}$, $B = \{\{\varnothing, \{1, 2\}\}, \{\{1, 1\}\}\}$.

23. Sprawdzić, czy dla dowolnych zbiorów A, B, C zachodzą równości:

(a) $(A \cup B \cup C) - (A \cup B) = C$;
(b) $A = (A \cap B) \cup (A - B)$;

(c) $A - (A - B) = A \cap B$;
(d) $A \cup (A \cap B) = A$;
(e) $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$.

24. Które z następujących zbiorów są równe dla dowolnych A, B i C?
$$(A \cap B) - C, \qquad A \cap (B - C), \qquad (A - C) - (A - B), \qquad (B - C) - (B - A).$$

25. Pokazać, że:

R (a) jeśli $A - B = B - A$, to $A = B$;
(b) jeśli $A - B = \varnothing$, to $A \subseteq B$;
(c) jeśli $A \cup B \subseteq C$, to $A - B \subseteq C - B$;
(d) jeśli $A - B \subseteq C$, to $A \subseteq B \cup C$.
(e) jeśli $A \cup B = C$, to $C - B = A - B$;
(f) jeśli $A \cup B \subseteq A \cap B$, to $A = B$;
(g) jeśli $A \dot{-} B = A \dot{-} C$ to $B = C$.

26. Uzupełnić poniższe zdania, wpisując w miejsce pierwszego wielokropka znak $\in$ lub $\subseteq$, a w miejsce drugiego wielokropka C lub $\bigcup C$.

(a) Jeśli $A \in B \in C$, to $A \ldots \ \ldots$
(b) Jeśli $A \in B \subseteq C$, to $A \ldots \ \ldots$
(c) Jeśli $A \subseteq B \in C$, to $A \ldots \ \ldots$
(d) Jeśli $A \subseteq B \subseteq C$, to $A \ldots \ \ldots$

R 27. Udowodnić, że dla dowolnych zbiorów A, B i C zachodzi następująca równoważność:
$$(A - C) \cup (C - B) \cup (B - A) = C \cup B \quad \Leftrightarrow \quad A \subseteq C \cup B \ \wedge \ A \cap B \cap C = \varnothing.$$

R 28. Które z poniższych implikacji są prawdziwe dla dowolnych zbiorów X i Y:

(a) Jeśli $\mathsf{P}(Y) \subseteq X$, to $Y \subseteq \bigcup X$?
(b) Jeśli $Y \subseteq \bigcup X$, to $\mathsf{P}(Y) \subseteq X$?

R 29. Zbadać, czy poniższe implikacje są prawdziwe dla dowolnych zbiorów A, B, C.

(a) $A \cup C \subseteq B \cup C \to C - B \subseteq C - A$;
(b) $A \cap C \subseteq B \cap C \to C - B \subseteq C - A$.

30. Zbadać, czy dla dowolnych A, B i C zachodzi

(a) $\mathsf{P}(A \cup B) = \mathsf{P}(A) \cup \mathsf{P}(B)$;
(b) $\mathsf{P}(A \cap B) = \mathsf{P}(A) \cap \mathsf{P}(B)$;
(c) $A - (B \cup C) = (A - B) - C$;
(d) $A - (B - C) = (A - B) \cup C$.

31. Udowodnić równoważność $A \cap B \subseteq C \ \leftrightarrow \ A \subseteq -B \cup C$.

R 32. Czy dla dowolnych zbiorów A, B, C zachodzi implikacja
$$A \cap B \cap C = \varnothing \quad \to \quad A \cap B \subseteq (A - C) \cap (B - C)\,?$$

R 33. Czy dla dowolnych zbiorów A, B, C zachodzi równoważność
$$B \subseteq C \quad \leftrightarrow \quad A \cup B \cup C = (A - B) \cup C\,?$$

R 34. Czy dla dowolnych zbiorów A, B, spełniających warunek $A = (A \cup B) - B$, zachodzi równość $A = (A - B) \cup B$?

35. Pokazać, że $A \subseteq B$ zachodzi wtedy i tylko wtedy gdy $\mathsf{P}(A) \subseteq \mathsf{P}(B)$.

R 36. Udowodnić, że dla dowolnych zbiorów A, B zachodzi równoważność:
$$A \cap B = \varnothing \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \mathsf{P}(A) \cap \mathsf{P}(B) = \{\varnothing\}.$$

37. Rodzina zbiorów $\mathcal{A} \subseteq \mathsf{P}(\mathbb{N})$ jest *ciałem zbiorów* wtedy i tylko wtedy, gdy (1) zbiór pusty należy do $\mathcal{A}$; (2) dla dowolnego $X \in \mathcal{A}$ zbiór $-X$ należy do A; (3) dla dowolnych $X, Y \in \mathcal{A}$ zbiory $X \cup Y$ i $X \cap Y$ należą do $\mathcal{A}$.
   (a) Jakie jest najmniejsze i największe ciało zbiorów?
   (b) Ile elementów mają skończone ciała zbiorów?
   (c) Udowodnić, że jeśli $\mathcal{A}$ jest ciałem zbiorów, oraz $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$, to $A_1 \cup \ldots \cup A_n \in \mathcal{A}$ oraz $A_1 \cap \ldots \cap A_n \in \mathcal{A}$.
   (d) Czy jeśli $\mathcal{A}$ jest ciałem zbiorów oraz $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$, to $\bigcup \mathcal{B} \in \mathcal{A}$?
   (e) Czy jeśli $\mathcal{A}$ jest ciałem zbiorów oraz $\varnothing \neq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$, to $\bigcap \mathcal{B} \in \mathcal{A}$?

38. Czy jeśli $A \subseteq B$ to $\bigcup A \subseteq \bigcup B$? Czy jeśli $A \subseteq B$ to $\bigcap B \subseteq \bigcap A$?

39. Czy jeśli $\bigcup A \subseteq \bigcup B$ to $A \subseteq B$? A co jeśli $\bigcap B \subseteq \bigcap A$?

40. Pokazać, że $\bigcup \mathsf{P}(A) = A$, dla dowolnego zbioru A.

R 41. (a) Czy istnieje taka rodzina $\mathcal{A}$, że $\mathsf{P}(\bigcup \mathcal{A}) \subseteq \mathcal{A}$?
   (b) Czy dla każdej rodziny $\mathcal{A}$ zachodzi $\mathsf{P}(\bigcup \mathcal{A}) \subseteq \mathcal{A}$?
   (c) Czy istnieje taka rodzina $\mathcal{A}$, że $\mathsf{P}(\bigcup \mathcal{A}) \supseteq \mathcal{A}$?
   (d) Czy dla każdej rodziny $\mathcal{A}$ zachodzi $\mathsf{P}(\bigcup \mathcal{A}) \supseteq \mathcal{A}$?

42. Niech $\mathcal{A} \in \mathsf{P}(\mathsf{P}(\mathbb{R}))$ będzie rodziną zbiorów spełniającą warunek
$$(\forall B \in \mathcal{A})(\forall C \subseteq \mathbb{R})(C \subseteq B \longrightarrow C \in \mathcal{A}).$$
Pokazać, że $\bigcup \mathcal{A} = \{z \in \mathbb{R} \mid \{z\} \in \mathcal{A}\}$.

R 43. Która z następujących równości
   (a) $\bigcap\{\mathsf{P}(B) \mid B \subseteq A\} = \{\bigcap \mathsf{P}(B) \mid B \subseteq A\}$;
   (b) $\bigcup\{\mathsf{P}(B) \mid B \subseteq A\} = \{\bigcup \mathsf{P}(B) \mid B \subseteq A\}$,

   zachodzi dla dowolnego zbioru A?

R 44. Która z następujących równości
   (a) $\bigcap A \cap \bigcap B = \bigcap (A \cup B)$;
   (b) $\bigcap A \cap \bigcap B = \bigcap (A \cap B)$;
   (c) $\bigcup A \cup \bigcup B = \bigcup (A \cup B)$;
   (d) $\bigcap A \cup \bigcap B = \bigcap (A \cup B)$;
   (e) $\bigcup A \cap \bigcup B = \bigcup (A \cap B)$;
   (f) $\bigcup A \cup \bigcup B = \bigcup (A \cap B)$,

   zachodzi dla dowolnych niepustych rodzin zbiorów A i B o niepustym przecięciu?

45. Niech $T \neq \varnothing$. Która z następujących równoważności zachodzi dla dowolnej rodziny zbiorów $\{A_t\}_{t \in T}$ i dowolnego zbioru B:
   (a) $B \subseteq \bigcap_{t \in T} A_t$ wtedy i tylko wtedy, gdy $B \subseteq A_t$ dla każdego $t \in T$?
   (b) $B \subseteq \bigcup_{t \in T} A_t$ wtedy i tylko wtedy, gdy $B \subseteq A_t$ dla pewnego $t \in T$?

46. Niech $T \neq \varnothing$ i $\varnothing \neq A_t \subseteq \mathsf{P}(\mathbb{N})$, dla $t \in T$. Jakie zawierania zachodzą pomiędzy zbiorami:
   (a) $\bigcup \bigcup_{t \in T} A_t$ i $\bigcup_{t \in T} \bigcup A_t$?
   (b) $\bigcap \bigcup_{t \in T} A_t$ i $\bigcap_{t \in T} \bigcup A_t$?

(c) $\bigcap\bigcup_{t\in T} A_t$ i $\bigcup_{t\in T}\bigcap A_t$?
(d) $\bigcap\bigcup_{t\in T} A_t$ i $\bigcap_{t\in T}\bigcap A_t$?

R 47. Zaznaczyć w układzie współrzędnych zbiór $\bigcup_{n\in\mathbb{N}-\{0\}} A_n$, gdzie

$$A_n = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > \tfrac{1}{n^2} \to n(y - x^2 - 1) \geq 1\}.$$

Brzegi obszarów zawarte w zbiorze proszę zaznaczyć pogrubioną linią, brzegi nie zawierające się w zbiorze – linią przerywaną.

R 48. Znaleźć $\bigcup_{t\in\mathbb{R}_+} A_t$ i $\bigcap_{t\in\mathbb{R}_+} A_t$, gdzie:

(a) $A_t = (1 - \frac{1}{t}, 2 + \sqrt{t})$, dla $t \in \mathbb{R}_+$;
(b) $A_t = [\sqrt{t}, \sqrt{2t}]$, dla $t \in \mathbb{R}_+$.

49. Znaleźć $\bigcup_{t\in\mathbb{R}} A_t$, gdzie $A_t = \{\langle x, y\rangle : \mathbb{R}^2 \mid |x - t| + |y| \leq 1\}$, dla $t : \mathbb{R}$.

50. Niech $A_{n,m} = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{n-1}{m+1} \leq x < n + m\}$, dla $m, n \in \mathbb{N}$. Znaleźć zbiory:
(a) $\bigcup_n \bigcap_m A_{n,m}$ (b) $\bigcap_n \bigcup_m A_{n,m}$.

51. Określić taką rodzinę $\{A_{i,j} \mid i, j \in I\}$, żeby wszystkie poniższe zbiory były różne:

$$\bigcup_i \bigcap_j A_{i,j},\quad \bigcap_i \bigcup_j A_{i,j},\quad \bigcup_i \bigcup_j A_{i,j},\quad \bigcap_i \bigcap_j A_{i,j},\quad \bigcup_j \bigcap_i A_{i,j},\quad \bigcap_j \bigcup_i A_{i,j}\,.$$

52. Niech $T = \bigcup_{s\in S} T_s$ i niech $\mathcal{K}$ będzie rodziną wszystkich podzbiorów T, które z każdym ze zbiorów T_s mają przynajmniej jeden element wspólny. Udowodnić, że jeśli $\mathcal{K} \neq \varnothing$, to dla dowolnej rodziny $\{A_t\}_{t\in T}$ zachodzi równość: $\bigcup_{s\in S}\bigcap_{t\in T_s} A_t = \bigcap_{Y\in\mathcal{K}}\bigcup_{t\in Y} A_t$.

53. Czy $\bigcup_{i\in\mathbb{N}}\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_{i,j}$ to to samo, co $\bigcup\bigcup\{A_{i,j} \mid i, j \in \mathbb{N}\}$?

54. W aksjomatycznej teorii mnogości definiuje się parę uporządkowaną $\langle a, b\rangle$ jako zbiór $<a, b> = \{\{a\}, \{a, b\}\}$. Jakiego typu jest $<a, b>$, jeśli a i b są typu $\mathcal{D}$? Udowodnić, że tak zdefiniowane pary spełniają warunek $<a, b> = <x, y>$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a = x$ i $b = y$.

55. Jakie elementy i jakie podzbiory ma iloczyn kartezjański $A \times B$, jeżeli:

(a) $A = \{0\}$ i $B = \{1\}$?
(b) $A = \varnothing$ i $B = \varnothing$?
(c) $A = \varnothing$ i $B = \{1\}$?
(d) $A = \{0, 1\}$ i $B = \{1\}$?

R 56. Czy następujące równości zachodzą dla dowolnych niepustych rodzin A i B?

(a) $\bigcap A \times \bigcap B = \bigcap\{\alpha \times \beta \mid \alpha \in A \wedge \beta \in B\}$;
(b) $\bigcup A \times \bigcup B = \bigcup\{\alpha \times \beta \mid \alpha \in A \wedge \beta \in B\}$.

57. Która z następujących równości

(a) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A_n \times B_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \times \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$;
(b) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(A_n \times B_n) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \times \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n$,;

zachodzi dla dowolnych rodzin $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$?

58. Która z następujących równości

(a) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(\bigcup A_n \times \bigcup B_n) = \bigcup\{u \times w \mid \langle u, w\rangle \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A_n \times B_n)\}$;
(b) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(\bigcap A_n \times \bigcap B_n) = \bigcap\{u \times w \mid \langle u, w\rangle \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}}(A_n \times B_n)\}$;
(c) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(\bigcap A_n \times \bigcap B_n) = \bigcap\{u \times w \mid \langle u, w\rangle \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A_n \times B_n)\}$;
(d) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(\bigcap A_n \times \bigcap B_n) = \bigcap\{u \times w \mid \langle u, w\rangle \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \times \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\}$,

zachodzi dla dowolnych rodzin $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, gdzie zbiory $A_n, B_n \subseteq \mathsf{P}(\mathbb{N})$ są niepuste oraz iloczyn $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(A_n \times B_n)$ też jest niepusty?

59. Udowodnić, że dla dowolnych niepustych zbiorów A, B, X, Y zachodzi równoważność:
$$A \times B \subseteq X \times Y \quad \Leftrightarrow \quad A \subseteq X \wedge B \subseteq Y.$$
Czy założenie o niepustości jest istotne?

R 60. Udowodnić, że dla dowolnej rodziny $\mathcal{A}$ zachodzi:
$$\mathsf{P}(\bigcup\mathcal{A}) = \{\varnothing\} \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \mathcal{A} = \varnothing \text{ lub } \mathcal{A} = \{\varnothing\}$$

R 61. Które z poniższych zawierań zachodzą dla dowolnych niepustych rodzin $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$?
   (a) $\bigcup\bigcap\bigcup\mathsf{P}(\mathcal{A}) \subseteq \bigcap\bigcup\mathcal{A}$
   (b) $\bigcap\bigcup\mathcal{A} \subseteq \bigcup\bigcap\bigcup\mathsf{P}(\mathcal{A})$
   (c) $\bigcap\mathsf{P}(\bigcup\mathcal{A}) \subseteq \bigcap\mathcal{A}$
   (d) $\bigcup\mathcal{A} \times \bigcap\mathcal{B} \subseteq \bigcup\{a \times b \mid a \in \mathcal{A} \wedge b \in \mathcal{B}\}$

R 62. Czy dla dowolnej niepustej rodziny $\mathcal{X} \subseteq P(\mathbb{R})$ zachodzi równość $\bigcup -\mathcal{X} = -\bigcup\mathcal{X}$? A równość $\bigcup -\mathcal{X} = -\bigcap\mathcal{X}$?

R 63. Czy dla dowolnej niepustej rodziny niepustych zbiorów $\mathcal{Z}$ zachodzą równości:
   (a) $\bigcup\{\{a\} \times A \mid a \in A \wedge A \in \mathcal{Z}\} = \bigcup\{A \times \{a\} \mid a \in A \wedge A \in \mathcal{Z}\}$?
   (b) $\bigcap\{\{a\} \times A \mid a \in A \wedge A \in \mathcal{Z}\} = \bigcap\{A \times \{a\} \mid a \in A \wedge A \in \mathcal{Z}\}$?

64. Niech $A, B \neq \varnothing$. Udowodnić, że jeśli $(A \times B) \cup (B \times A) = (C \times D) \cup (D \times C)$, to albo $A = C$ i $B = D$, albo $A = D$ i $B = C$.

65. Rodzina zbiorów $\mathcal{A}$ jest *łańcuchem*, gdy dla każdych $X, Y \in \mathcal{A}$ zachodzi $X \subseteq Y$ lub $Y \subseteq X$. Udowodnić, że:
   (a) Iloczyn dowolnej niepustej rodziny łańcuchów jest łańcuchem,
   (b) Suma dowolnego łańcucha łańcuchów jest łańcuchem.

R 66. Niech $L \subseteq \mathsf{P}(\mathbb{R})$ będzie łańcuchem zbiorów.
   (a) Udowodnić, że jeśli $L = L_1 \cup L_2$, to albo $\bigcup L = \bigcup L_1$ albo $\bigcup L = \bigcup L_2$.
   (b) Czy jeśli $L = \bigcup\mathcal{L}$, gdzie $\mathcal{L}$ jest łańcuchem łańcuchów, to $\bigcup L = \bigcup X$ dla pewnego łańcucha $X \in \mathcal{L}$?

R 67. Rodzina $\mathcal{R} \subseteq \mathsf{P}(\mathbb{R})$ jest *łańcuchowo zamknięta* wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego łańcucha zbiorów $\mathcal{L}$, z tego, że $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{R}$ wynika, że $\bigcup\mathcal{L} \in \mathcal{R}$.
   (a) Udowodnić, że jeśli Θ jest niepustą rodziną rodzin łańcuchowo zamkniętych, to jej iloczyn $\bigcap\Theta$ jest rodziną łańcuchowo zamkniętą.
   (b) Udowodnić, że jeśli $\mathcal{R}, \mathcal{S} \subseteq \mathsf{P}(\mathbb{R})$ są łańcuchowo zamknięte, to ich suma $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$ jest łańcuchowo zamknięta.
   (c) Czy suma łańcucha rodzin łańcuchowo zamkniętych musi być łańcuchowo zamknięta?

68. Udowodnić, że dla dowolnej rodziny zbiorów $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, zachodzi równość
$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n,$$
gdzie $B_n = A_n - \bigcup_{i<n} A_i$, dla $n \in \mathbb{N}$.

69. Udowodnić, że jeśli $A_n \subseteq A_{n+1}$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$, to $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in H} A_n$, dla dowolnego nieskończonego $H \subseteq \mathbb{N}$.

R 70.* Dla dowolnego zbioru A, przez $\mathsf{P}_2(A)$ oznaczymy rodzinę wszystkich dwuelementowych podzbiorów zbioru A. Niech $\{X, Y\}$ będzie podziałem zbioru $\mathsf{P}_2(\mathbb{N})$, tj. niech $X \cap Y = \varnothing$ oraz $X \cup Y = \mathsf{P}_2(\mathbb{N})$. Pokazać, że istnieje taki nieskończony zbiór $A \subseteq \mathbb{N}$, że $\mathsf{P}_2(A) \subseteq X$ lub $\mathsf{P}_2(A) \subseteq Y$.

Funkcje

71. Ile elementów mają zbiory: $\varnothing^{\varnothing}$, $\varnothing^{A}$, $A^{\varnothing}$, jeżeli $A \neq \varnothing$?
72. Udowodnić, że:
    (a) jeśli $f : A \to B$, $g : B \to C$ i $h : C \to D$, to $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$;
    (b) jeśli $f : A \xrightarrow[\text{na}]{1-1} B$, to $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A$ oraz $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_B$;
    (c) jeśli $f : A \to B$, to $f \circ \mathrm{id}_A = f = \mathrm{id}_B \circ f$.
73. Udowodnić, że:
    (a) jeśli $f : A \xrightarrow{1-1} B$ oraz $g : B \xrightarrow{1-1} C$ to $g \circ f : A \xrightarrow{1-1} C$;
    (b) jeśli $f : A \xrightarrow{\text{na}} B$ oraz $g : B \xrightarrow{\text{na}} C$ to $g \circ f : A \xrightarrow{\text{na}} C$.
74. Znaleźć obraz prostej o równaniu $3x - 2y = 1$ i przeciwobraz okręgu o równaniu $x^2 + y^2 = 1$ przy przekształceniu $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ danym wzorem $f(x, y) = \langle 2x + y, x - y\rangle$.
75. Znaleźć obraz kwadratu $[0, 1) \times (0, 1]$ i przeciwobraz odcinka $[1, 2]$ przy przekształceniu $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ danym wzorem: (a) $f(x, y) = \frac{x+2}{2}$; (b) $f(x, y) = x - 2y$.
76. Niech $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \multimap\!\!\to \mathbb{R}$ będzie taka, że $f(x, y) = \frac{x}{y}$. Znaleźć przeciwobrazy $f^{-1}(\{1\})$ i $f^{-1}([1, 2])$ oraz obraz kwadratu $(1, 2) \times (3, 4)$.
77. Niech $\varphi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ będzie taka, że $\varphi(\langle n, k\rangle) = nk$, dla dowolnych $n, k \in \mathbb{N}$. Zbadać, czy φ jest różnowartościowa i czy jest na $\mathbb{N}$. Znaleźć $\varphi(\mathcal{P}\mathrm{r} \times (\mathbb{N} - \mathcal{P}\mathrm{r}))$, $\varphi^{-1}(\{10\})$, $\varphi^{-1}(\mathbb{N} - \mathcal{P}\mathrm{r})$, $\varphi^{-1}(\{2^n : n \in \mathbb{N} - \{0\}\})$, gdzie $\mathcal{P}\mathrm{r}$ oznacza zbiór liczb parzystych.
78. Niech $f : \mathsf{P}(\mathbb{N}) \times \mathsf{P}(\mathbb{N}) \to \mathsf{P}(\mathbb{N})$ będzie taka, że $f(\langle C, D\rangle) = C \cap D$, dla dowolnych $C, D \subseteq \mathbb{N}$, i niech $B \subseteq \mathbb{N}$. Czy f jest różnowartościowa i czy jest na $\mathsf{P}(\mathbb{N})$? Znaleźć obraz zbioru $\mathsf{P}(B) \times \mathsf{P}(B)$ i przeciwobraz zbioru $\{\mathbb{N}\}$, przy przekształceniu f.
79. Niech $f : (\mathsf{P}(\mathbb{N}) - \{\varnothing\}) \times (\mathsf{P}(\mathbb{N}) - \{\varnothing\}) \to \mathsf{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ będzie taka, że $f(\langle C, D\rangle) = C \times D$, dla dowolnych $C, D \subseteq \mathbb{N}$. Czy f jest różnowartościowa i czy jest na zbiór $\mathsf{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$? Czy zbiorem wartości funkcji f jest $\mathsf{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) - \{\varnothing\}$? Znaleźć $f^{-1}(\mathsf{P}(\mathcal{P}\mathrm{r} \times \mathcal{P}\mathrm{r}))$, gdzie $\mathcal{P}\mathrm{r}$ oznacza zbiór wszystkich liczb parzystych.
80. Niech $f : \mathsf{P}(\mathbb{N}) \times \mathsf{P}(\mathbb{N}) \to \mathsf{P}(\mathbb{N})$ będzie taka, że $f(\langle C, D\rangle) = C - D$, dla dowolnych $C, D \subseteq \mathbb{N}$. Czy f jest różnowartościowa i czy jest na $\mathsf{P}(\mathbb{N})$? Znaleźć obraz zbioru $\mathsf{P}(\mathcal{P}\mathrm{r}) \times \mathsf{P}_\infty(\mathbb{N})$ i przeciwobraz zbioru $\{\varnothing\}$ przy przekształceniu f, gdzie $\mathcal{P}\mathrm{r}$ to zbiór wszystkich liczb naturalnych parzystych, a $\mathsf{P}_\infty(\mathbb{N})$ oznacza zbiór wszystkich nieskończonych podzbiorów zbioru $\mathbb{N}$.

R 81. Funkcja $F : (\mathbb{N} \to \mathsf{P}(\mathbb{N})) \to \mathsf{P}(\mathbb{N})$ jest określona warunkiem $F(x) = \bigcup\{x(i) \mid i \in \mathbb{N}\}$.
    (a) Czy F jest funkcją różnowartościową?
    (b) Czy F jest na $\mathsf{P}(\mathbb{N})$?
    (c) Czy istnieje taki zbiór $A \subseteq \mathbb{N}$, że $F^{-1}(\{A\})$ jest zbiorem jednoelementowym?
    (d) Czy istnieje taki zbiór $A \subseteq \mathbb{N}$, że $F^{-1}(\{A\})$ jest zbiorem czteroelementowym?

R 82. Niech $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją zadaną wzorem $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

(a) Jaki jest obraz zbioru $A = [2,4] \times [-1,3]$ przy przekształceniu f?
(b) Ile elementów ma zbiór $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \cap f^{-1}((-3,3) \cup \{5\})$?

83. Podać przykład funkcji f i takich zbiorów A, B, C, D, że
$$f^{-1}(f(A)) \neq A, \qquad f(f^{-1}(B)) \neq B, \qquad f(C \cap D) \neq f(C) \cap f(D).$$

84. Które z poniższych zdań są prawdziwe, a które fałszywe?
(a) $\forall f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\, \exists B \subseteq \mathbb{N} (f^{-1}(B) \neq \varnothing \wedge B \neq \mathbb{N})$;
(b) $\exists B \subseteq \mathbb{N}\, \forall f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} (f^{-1}(B) \neq \varnothing \wedge B \neq \mathbb{N})$;
(c) $\exists f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\, \forall B \subseteq \mathbb{N} (f^{-1}(B) \neq \varnothing \to B = \mathbb{N})$;
(d) $\forall B \subseteq \mathbb{N}\, \exists f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} (f^{-1}(B) \neq \varnothing \to B = \mathbb{N})$.

85. Niech $f : A \to B$. Udowodnić, że f jest różnowartościowa wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego C i dowolnych $g, h : C \to A$ zachodzi implikacja $f \circ g = f \circ h \to g = h$.

86. Niech $f : A \to B$. Udowodnić, że f jest na B wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego C i dowolnych $g, h : B \to C$ zachodzi implikacja $g \circ f = h \circ f \to g = h$.

87. Niech $f : A \to B$ i $g : B \to A$ będą takie, że $g \circ f = \mathrm{id}_A$. Pokazać, że f jest różnowartościowa, a g jest na A.

88. Niech $f : A \to B$ i $g : B \to A$. Udowodnić, że jeśli $f \circ g = \mathrm{id}_A$ oraz $g \circ f = \mathrm{id}_B$, to funkcje f i g są wzajemnie odwrotnymi bijekcjami.

89. Niech $f, g : A \to A$. Czy z tego, że dla dowolnego $x \in A$ zachodzi $f(g(x)) = g(f(x))$ wynika, że f i g są wzajemnie odwrotne?

R 90. Przypuśćmy, że $(\mathbb{N} \to \mathsf{P}(\mathbb{N})) = \bigcup\{\mathcal{F}_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Udowodnić, że istnieje taka liczba n, że $\{f(n) \mid f \in \mathcal{F}_n\} = \mathsf{P}(\mathbb{N})$.

91. Funkcja $f : \mathsf{P}(A) \to \mathsf{P}(A)$ jest *addytywna*, gdy $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$, dla dowolnych zbiorów $X, Y \subseteq A$. Czy każda funkcja addytywna ma własność $f(X) = \bigcup_{x \in X} f(\{x\})$?

R 92. Podać przykład pary funkcji $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ spełniającej wszystkie poniższe warunki:
(a) $\forall x\; g(x) \neq x$;
(b) $g \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$;
(c) $f \circ g = f$;
(d) f jest funkcją na $\mathbb{N}$;
(e) obrazem zbioru liczb naturalnych parzystych przy odwzorowaniu g jest zbiór liczb naturalnych nieparzystych.

R 93. Niech $c : \mathsf{P}(A) \to A$ będzie taką funkcją, że dla dowolnego niepustego zbioru $D \subseteq A$ zachodzi $c(D) \in D$ i niech $f, g : A \xrightarrow{\text{na}} B$. Pokazać, że istnieje taka funkcja $h : A \to A$, że $f \circ h = g$.

R 94. Dla dowolnych $X, Y \subseteq \mathbb{Z}$, niech $X + Y$ oznacza zbiór $\{x + y \mid x \in X,\ y \in Y\}$ i niech funkcja $F : \mathsf{P}(\mathbb{Z}) \to \mathsf{P}(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ będzie zdefiniowana następująco:
$$F(A) = (A \times (A + \mathbb{N})) \cup ((A + \mathbb{N}) \times A).$$
(a) Czy F jest różnowartościowa?
(b) Czy F jest „na”?
(c) Wyznaczyć $F^{-1}(\{\mathbb{N} \times \mathbb{N}\})$.
(d) Wyznaczyć $F^{-1}(\{\mathcal{B} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid \mathbf{1}_{\mathbb{Z}} \subseteq \mathcal{B}\})$, gdzie $\mathbf{1}_{\mathbb{Z}}$ to relacja identycznościowa w $\mathbb{Z}$.

R 95. Funkcja $F : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{\mathsf{P}(\mathbb{N})}$ określona jest, dla $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ i $A \subseteq \mathbb{N}$, wzorem

$$F(f)(A) = \text{if } A = \varnothing \text{ then } 0 \text{ else } \min f(A).$$

(a) Czy funkcja F jest na $\mathbb{N}^{\mathsf{P}(\mathbb{N})}$?
(b) Czy funkcja F jest różnowartościowa?
(c) Wyznaczyć $F^{-1}(L)$, gdzie $L = \{\alpha : \mathsf{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{N} \mid \alpha^{-1}(\{0\}) \neq \varnothing\}$.
(d) Wyznaczyć przeciwobraz zbioru wszystkich funkcji stałych z $\mathsf{P}(\mathbb{N})$ do $\mathbb{N}$.

96. Funkcja F jest taka, jak w zadaniu 95. Dla jakich f funkcja $F(f)$ jest różnowartościowa? (Por. 95b.)

R 97. Funkcja $F : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{\mathsf{P}_+(\mathbb{N})}$, gdzie $\mathsf{P}_+(A) = \mathsf{P}(A) - \{\varnothing\}$, określona jest, dla $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ i niepustych $A \subseteq \mathbb{N}$, wzorem $F(f)(A) = \min f(A)$.

(a) Czy funkcja F jest na $\mathbb{N}^{\mathsf{P}_+(\mathbb{N})}$?
(b) Czy funkcja F jest różnowartościowa?
(c) Wyznaczyć $F^{-1}(L)$, gdzie $L = \{\alpha : \mathsf{P}_+(\mathbb{N}) \to \mathbb{N} \mid \alpha^{-1}(\{0\}) \neq \varnothing\}$.
(d) Wyznaczyć przeciwobraz zbioru wszystkich funkcji stałych z $\mathsf{P}_+(\mathbb{N})$ do $\mathbb{N}$.

98. Niech $f : \mathsf{P}(\mathbb{R}) \to \mathsf{P}(\mathsf{P}(\mathbb{R}))$ będzie taka, że $f(A) = \mathsf{P}(A)$, dla $A \subseteq \mathbb{R}$. Czy f jest różnowartościowa i czy jest „na”? Znaleźć $f^{-1}(\mathsf{P}(\mathsf{P}(\mathbb{Q})))$ oraz $\bigcup f(\mathsf{P}(\mathbb{Q}))$ i $\bigcap f(\mathsf{P}(\mathbb{Q}))$.

99. Niech $f : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathsf{P}(\mathbb{N})$ będzie taka, że $f(\varphi) = \varphi(\mathbb{N})$. Czy f jest różnowartościowa i czy jest na $\mathsf{P}(\mathbb{N})$? Znaleźć $f^{-1}(\mathcal{B})$, gdzie $\mathcal{B}$ oznacza zbiór wszystkich jednoelementowych podzbiorów $\mathbb{N}$.

R 100. Niech $\varphi : (\mathbb{N} \to \mathbb{N}) \to \mathsf{P}(\mathbb{N})$ będzie funkcją określoną wzorem $\varphi(f) = f(\mathcal{P})$, gdzie $\mathcal{P}$ to zbiór wszystkich liczb pierwszych.

(a) Czy φ jest na $\mathsf{P}(\mathbb{N})$?
(b) Czy φ jest różnowartościowa?
(c) Dla dowolnych $A, B \subseteq \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ określamy zbiór $A \bullet B = \{f \circ g \mid f \in A \wedge g \in B\}$. Niech $C = \varphi^{-1}(\mathsf{P}(\mathcal{P}))$. Udowodnić, że $C \bullet C = C$.

R 101. Zdefiniujmy funkcję $F : (\mathbb{N} \to \mathbb{N}) \to (\mathsf{P}(\mathbb{N}) \to \mathsf{P}(\mathbb{N}))$ wzorem $F(f)(X) = f(X)$, gdzie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Czy F jest „na”? Czy jest 1-1?

R 102. Niech $\mathbb{IQ} = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ i niech $\psi : \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \to \mathsf{P}(\mathbb{R}) - \{\varnothing\}$ będzie taka, że $\psi(f) = f(\mathbb{IQ})$. Zbadać, czy funkcja ψ jest różnowartościowa i czy jest na $\mathsf{P}(\mathbb{R}) - \{\varnothing\}$.

103. Niech $F : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathsf{P}(\mathbb{N})$ będzie taka, że $F(f) = f^{-1}(\{1\})$. Czy F jest różnowartościowa i czy jest na $\mathsf{P}(\mathbb{N})$? Znaleźć obraz zbioru wszystkich funkcji stałych i przeciwobraz zbioru $\{\{10\}\}$ przy przekształceniu F.

R 104. Niech $\varphi : (\mathbb{R} \to \mathbb{R}) \to \mathsf{P}(\mathbb{R})$ będzie określona następująco: $\varphi(f) = f^{-1}(\mathbb{IQ})$, gdzie $\mathbb{IQ} = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Zbadać, czy funkcja φ jest różnowartościowa i czy jest na $\mathsf{P}(\mathbb{R})$. Znaleźć obraz zbioru wszystkich funkcji stałych i przeciwobraz zbioru $\mathsf{P}(\mathbb{IQ})$ przy przekształceniu φ.

105. Niech $f : A \to B$ i niech $\Phi : \mathsf{P}(B) \to \mathsf{P}(A)$ będzie taka, że $\Phi(Y) = f^{-1}(Y)$, dla $Y \subseteq B$.

(a) Pokazać, że funkcja f jest różnowartościowa (odpowiednio na) wtedy i tylko wtedy, gdy Φ jest „na” (odpowiednio różnowartościowa).
R (b) Udowodnić, że jeśli $\mathcal{R} \subseteq \mathrm{Rg}(\Phi)$, to $\Phi(\bigcup \Phi^{-1}(\mathcal{R})) = \bigcup \mathcal{R}$.

106. Niech $\varphi : (\mathbb{N} \to \mathbb{N}) \to (\mathsf{P}(\mathbb{N}) \to \mathsf{P}(\mathbb{N}))$ będzie określona tak: $\varphi(f)(A) = f^{-1}(A)$.

(a) Czy funkcja φ jest różnowartościowa?
(b) Czy funkcja φ jest „na”?
(c) Znaleźć $\varphi^{-1}(\{\mathrm{id}_{\mathsf{P}(\mathbb{N})}\})$.

(d) Czy istnieje funkcja $G \in \mathrm{Rg}(\varphi)$, która jest różnowartościowa?
(e) Czy każda funkcja $G \in \mathrm{Rg}(\varphi)$ jest różnowartościowa?

R107. Niech $\mathcal{C}_{X,Y} \colon (X \to Y) \to (\mathsf{P}(Y) \to \mathsf{P}(X))$ dana będzie wzorem $\mathcal{C}_{X,Y}(f)(A) = f^{-1}(A)$, gdzie $f \colon X \to Y$ i $A \subseteq Y$. Czy dla dowolnych niepustych X i Y:

(a) funkcja $\mathcal{C}_{X,Y}$ jest różnowartościowa?
(b) funkcja $\mathcal{C}_{X,Y}$ jest „na"?
(c) jeśli $f \colon X \xrightarrow{1-1} Y$, to $\mathcal{C}_{X,Y}(f)$ też jest różnowartościowa?
(d) jeśli $f \colon X \xrightarrow{\text{na}} Y$, to $\mathcal{C}_{X,Y}(f)$ też jest „na"?
(e) jeśli $f \colon X \xrightarrow{1-1} Y$, to $\mathcal{C}_{X,Y}(f)$ jest „na"?
(f) jeśli $f \colon X \xrightarrow{\text{na}} Y$, to $\mathcal{C}_{X,Y}(f)$ jest różnowartościowa?

108. Niech funkcja $\varphi : \mathsf{P}(\mathbb{N})^{\mathbb{N}} \to \mathsf{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ będzie określona następująco:
$$\varphi(f) = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x \in f(y) \text{ lub } y \in f(x)\}.$$

(a) Czy funkcja φ jest różnowartościowa?
(b) Czy funkcja φ jest na $\mathsf{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$?
(c) Znaleźć $\varphi^{-1}(A)$, gdzie $A = \{R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid R = R^{-1}\}$.
(d) Znaleźć $\varphi(\{f : \mathbb{N} \to \mathsf{P}(\mathbb{N}) \mid (\forall x \in \mathbb{N}.\, x \in f(x)) \text{ oraz } f(\mathbb{N}) \text{ jest podziałem zbioru } \mathbb{N}\})$.
(e) Dla $f, g : \mathbb{N} \to \mathsf{P}(\mathbb{N})$ niech $f \cap g = \lambda n.\, f(n) \cap g(n)$. Czy $\varphi(f \cap g) = \varphi(f) \cap \varphi(g)$?
(f) Podać przykład takiej funkcji $f : \mathbb{N} \to \mathsf{P}(\mathbb{N})$, że zbiór $f(n)$ jest skończony dla każdego $n \in \mathbb{N}$ oraz $\varphi(f) = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

R109. Niech funkcja $f : \mathsf{P}(\mathbb{N}) \to (\mathbb{N} \to \mathbb{N})$ będzie taka, że $f(S)(n) = \max\{x \in S \cup \{0\} \mid x \leq n\}$, dla wszystkich $S \subseteq \mathbb{N}$ i wszystkich $n \in \mathbb{N}$.

(a) Czy funkcja f jest różnowartościowa?
(b) Czy funkcja f jest na $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$?
(c) Udowodnić, że $f(\mathbb{N})(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$.
(d) Udowodnić, że dla dowolnego $S \subseteq \mathbb{N}$ zachodzi równoważność:
$$f(S)^{-1}(S) = \mathbb{N} \quad \Leftrightarrow \quad 0 \in S.$$
(e) Udowodnić, że $f^{-1}(\mathcal{C}) = \{\varnothing, \{0\}\}$, gdzie $\mathcal{C}$ to zbiór wszystkich funkcji stałych.

R110. Funkcja $\varphi : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ jest określona następująco:[5]
$$\varphi(\langle f, g\rangle)(n) = \begin{cases} f(n), & \text{jeśli } g(n) = 0; \\ \mathrm{card}\{i \in \mathbb{N} \mid 0 \leq i \leq n \wedge g(i) = 1\}, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

(a) Czy funkcja φ jest różnowartościowa?
(b) Czy jest ona na $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$?
(c) Dla jakich k zbiór $\varphi^{-1}(\{\lambda n.k\})$ jest nieskończony?
(d) Udowodnić, że $\varphi(\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \{g \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \mid \overline{\overline{g^{-1}(\{1\})}} = 1\}) = \{h \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid 1 \in \mathrm{Rg}(h)\}$.

111. Udowodnić, że $\bigcap_{i \in I} \bigcup_{j \in J} A_{i,j} = \bigcup_{f : I \to J} \bigcap_{i \in I} A_{i,f(i)}$.

112. Udowodnić, że $\bigcup_{i \in I} \bigcap_{j \in J} A_{i,j} = \bigcap_{f : I \to J} \bigcup_{i \in I} A_{i,f(i)}$.

113. Niech $\varphi : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to (\mathsf{P}(\mathbb{N}) - \{\varnothing\})^{\mathbb{N}}$ będzie funkcją określoną następująco:
$$\varphi(f) = \lambda n\, \{f^k(n) \mid k \in \mathbb{N} - \{0\}\}.$$

[5] Napis „card A" oznacza to samo, co „$\overline{\overline{A}}$", czyli liczbę elementów zbioru A.

(a) Niech $g = \lambda n.\,(n+1) \bmod 2$, $s = \lambda n.\, n+1$. Które z funkcji $\varphi(g)$, $\varphi(s)$ są stałe, a które różnowartościowe?

(b) Które ze zbiorów $G = \varphi^{-1}(\{\varphi(g)\})$, $S = \varphi^{-1}(\{\varphi(s)\})$, $E = \varphi^{-1}(\{\lambda n.\mathbb{N}\})$, są jednoelementowe, które puste, a które nieskończone?

(c) Czy funkcja φ jest różnowartościowa? Czy jest na $(\mathsf{P}(\mathbb{N}) - \{\varnothing\})^{\mathbb{N}}$?

(d) Udowodnić, że $\bigcup \varphi(f)(\varphi(f)(n)) \subseteq \varphi(f)(n)$, dla dowolnej funkcji $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ i dowolnej liczby naturalnej n.

R114. Przypomnijmy, że dla funkcji $f : A \to B$, zbiór $W(f) = \{\langle a, f(a)\rangle \mid a \in \mathrm{Dom}(f)\}$ nazywamy *wykresem* funkcji f. Niech $F \subseteq (A \to B)$. Udowodnić, że następujące warunki są równoważne:

(a) Istnieje taki zbiór $X \subseteq A \times B$, że $F = \{f : A \to B \mid W(f) \subseteq X\}$;

(b) Dla dowolnej funkcji $g : A \to B$, jeśli $W(g) \subseteq \bigcup\{W(f) \mid f \in F\}$, to $g \in F$.

115. Niech $f : A \to B$ i niech $Z \subseteq A$, $T \subseteq B$. Pokazać, że $Z \subseteq f^{-1}(T)$ wtedy i tylko wtedy gdy $f(Z) \subseteq T$.

116. Niech $f : A \to A$. Udowodnić, że dla dowolnego $x \in A$ istnieje najmniejszy zbiór $Z \subseteq A$ taki, że $x \in Z$ oraz $f^{-1}(Z) \subseteq Z$.

117. Udowodnić, że rodzina $\{A_t \mid t \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathsf{P}(\mathbb{R})$ spełnia warunki

$$\textstyle\bigcap_{t\in\mathbb{R}} A_t = \varnothing, \qquad \bigcup_{t\in\mathbb{R}} A_t = \mathbb{R}, \qquad \forall t \in \mathbb{R}(A_t = \bigcup_{s<t} A_s)$$

wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, że $A_t = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) < t\}$ dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$.

118. Które z poniższych stwierdzeń są równoważne dla każdej funkcji f:

(a) f jest różnowartościowa;

(b) dla każdego $x \in \mathrm{Dom}(f)$, zbiór $f(\{x\})$ jest jednoelementowy;

(c) dla każdego $x \in \mathrm{Rg}(f)$, zbiór $f^{-1}(\{x\})$ jest jednoelementowy?

119. Znaleźć takie $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, że dla dowolnego $x \in \mathbb{N}$, przeciwobraz $f^{-1}(\{x\})$ jest dwuelementowy, a przeciwobraz $g^{-1}(\{x\})$ jest nieskończony.

120. Znaleźć takie $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, że dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$, przeciwobraz $f^{-1}(\{x\})$ jest dwuelementowy, a przeciwobraz $g^{-1}(\{x\})$ jest nieskończony.

121. Pokazać, że jeśli $f : \mathcal{D} \xrightarrow{1-1} \mathcal{E}$ oraz $A \subseteq \mathcal{E}$ to przeciwobraz A przy przekształceniu f jest tym samym, co obraz A przy przekształceniu f^{-1}.

122. Skonstruować:

- bijekcję $f : \mathcal{D} \times (\mathcal{E} \oplus \mathcal{H}) \xrightarrow[\text{na}]{1-1} (\mathcal{D} \times \mathcal{E}) \oplus (\mathcal{D} \times \mathcal{H})$;
- włożenie $g : \mathcal{D} \oplus (\mathcal{E} \times \mathcal{H}) \xrightarrow{1-1} (\mathcal{D} \oplus \mathcal{E}) \times (\mathcal{D} \oplus \mathcal{H})$.

123. Niech $\alpha : C \to A$ i $\beta : C \to B$. Pokazać, że istnieje dokładnie jedna taka funkcja $\gamma : C \to A \times B$, że $\pi_1 \circ \gamma = \alpha$ i $\pi_2 \circ \gamma = \beta$.

124. Niech $\alpha : A \to C$ i $\beta : B \to C$. Pokazać, że istnieje dokładnie jedna taka funkcja $\gamma : A \oplus B \to C$, że $\gamma \circ \mathsf{in}_1 = \alpha$ i $\gamma \circ \mathsf{in}_2 = \beta$.

125. Udowodnić, że każdy ciąg liczb naturalnych ma podciąg wstępujący. Inaczej: dla każdej funkcji $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ istnieje taka funkcja $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, że

- funkcja g jest rosnąca, tj. $\forall i, j(i < j \to g(i) < g(j))$;
- funkcja $f \circ g$ jest niemalejąca (tj. $\forall i, j(i \leq j \to f(g(i)) \leq f(g(j)))$).

126. Niech $f : T \to T$. Udowodnić, że $f \circ f = f$ wtedy i tylko wtedy gdy $f|_{Rg(f)} = \mathrm{id}_{Rg(f)}$.
127. Niech $n \geq 1$. Udowodnić, ze funkcja $f : A \to A$ jest różnowartościowa wtedy i tylko wtedy, gdy f^n jest różnowartościowa.[6]
128. Niech $f : T \to T$ i niech $g = f|_{Rg(f)}$. Udowodnić, że $f^3 = f$ wtedy i tylko wtedy, gdy $g^2 = \mathrm{id}_{Rg(f)}$.
129. Niech A będzie zbiorem skończonym i niech $f : A \xrightarrow[\text{na}]{1-1} A$. Udowodnić, że $f^n = \mathrm{id}_A$ dla pewnego n.

R130. Niech A będzie zbiorem skończonym i niech $f : A \to A$. Pokazać, że $f^n \circ f^n = f^n$, dla pewnego n. *Wskazówka:* Można skorzystać z zadań 126 i 129.

131. Niech $f : A \to A$ i niech $f^n = f$ dla pewnego $n \geq 2$. Udowodnić, że $f(\mathrm{Rg}(f)) = \mathrm{Rg}(f)$ oraz że $Rg(f^m) = Rg(f)$ dla wszystkich $m \geq 2$.
132. Niech $\Phi : \mathbb{C}_\infty([0, 1]) \to \mathbb{C}_\infty([0, 1])$ będzie taka, że $\Phi(f) = f'$. Czy Φ jest różnowartościowa i na $\mathbb{C}_\infty([0, 1])$? Znaleźć przeciwobraz zbioru wielomianów.
133. Niech $I_\alpha = (\alpha, 4 + \alpha)$, dla $\alpha \in \mathbb{R}$ i niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, będzie określona przez równanie $f(x) = \frac{1}{2}x$. Jakimi przedziałami są zbiory:
$\bigcup_{\alpha\in(0,2)} f(I_\alpha)$ oraz $\bigcap_{\alpha\in(0,1)} f^{-1}(I_{f(\alpha)})$?
134. Niech $\varphi : B \to C$ i niech $\Phi : A^C \to A^B$ będzie taka, że $\Phi(f) = f \circ \varphi$ dla wszystkich f. Zakładając, że A ma co najmniej dwa elementy, pokazać, że
    (a) Φ jest różnowartościowa wtedy i tylko wtedy, gdy φ jest „na";
    (b) Φ jest „na" wtedy i tylko wtedy, gdy φ jest różnowartościowa.
135. Dla $a \in \mathbb{N}$ określamy $a^* : (\mathbb{N} \to \mathbb{N}) \to \mathbb{N}$ wzorem $a^* = \lambda f.\, f(a)$. Czy funkcja $\lambda a{:}\mathbb{N}.\, a^*$ jest różnowartościowa i czy jest na $(\mathbb{N} \to \mathbb{N}) \to \mathbb{N}$?

R136. Zbiór $T \subseteq \mathsf{P}(\mathbb{N}) \times \mathbb{N}$ jest *dobry*, wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych a, b, x:

z tego, że $\langle a, x\rangle \in T$ i $\langle b, x\rangle \in T$ oraz $a \subseteq b$ wynika $a = b$.

Funkcja $\Phi : \{T \subseteq \mathsf{P}(\mathbb{N}) \times \mathbb{N} \mid T \text{ jest dobry}\} \to (\mathsf{P}(\mathbb{N}) \to \mathsf{P}(\mathbb{N}))$ jest określona tak:

$$\Phi(T)(a) = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists b\, (b \subseteq a \wedge \langle b, x\rangle \in T)\}.$$

(a) Czy Φ jest na $\mathsf{P}(\mathbb{N}) \to \mathsf{P}(\mathbb{N})$?
(b) Czy istnieje takie T, że
    i. $\Phi(T) = \mathrm{id}_{\mathsf{P}(\mathbb{N})}$?
    ii. $\Phi(T)$ jest funkcją stałą?
(c) Czy Φ jest funkcją różnowartościową?

R137. Podać przykład takiej funkcji $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ i zbioru $X \subseteq \mathbb{N}$, aby funkcja $g : \mathbb{N} \to \mathsf{P}(\mathbb{N})$, określona wzorem $g(i) = (f^i)^{-1}(X)$, była różnowartościowa.

R138. Czy istnieje taka bijekcja $f\colon \mathbb{N} \xrightarrow[\text{na}]{1-1} \mathbb{N}$, że dla dowolnych $n, m \in \mathbb{N}$ jeśli $n \geq 1$, to $f^n(m) \neq m$?

R139. Dla $A \subseteq \mathbb{N}$ przyjmijmy oznaczenie $A^\# = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid f^{-1}(A) = \varnothing\}$.

(a) Udowodnić, że $A \subseteq B$ wtedy i tylko wtedy, gdy $B^\# \subseteq A^\#$.
(b) Która z poniższych równości zachodzi dla dowolnej niepustej rodziny $\{D_t \mid t \in T\}$:
(i) $\bigcap_{t\in T} D_t^\# = (\bigcup_{t\in T} D_t)^\#$? (ii) $\bigcup_{t\in T} D_t^\# = (\bigcap_{t\in T} D_t)^\#$?

[6] Jeśli $f\colon A \to A$, to $f^0 = \mathrm{id}_X$ i $f^{n+1} = f^n \circ f$.

R140. Dla $A \subseteq \mathbb{Z}$ przyjmijmy oznaczenie $A^! = \{f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \mid f^{-1}(\mathbb{N}) \subseteq A\}$.

(a) Udowodnić, że $A \subseteq B$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A^! \subseteq B^!$.

(b) Która z poniższych równości zachodzi dla dowolnej niepustej rodziny $\{D_t \mid t \in T\}$:
(i) $\bigcap_{t\in T} D_t^! = (\bigcap_{t\in T} D_t)^!$? (ii) $\bigcup_{t\in T} D_t^! = (\bigcup_{t\in T} D_t)^!$?

R141. Dla $A, B \subseteq \mathbb{N}$, niech $[A \Rightarrow B] = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid A \subseteq f^{-1}(B)\}$. Udowodnić, że jeśli $B, C \neq \varnothing$ i $D \neq \mathbb{N}$, to zawieranie $[A \Rightarrow B] \subseteq [C \Rightarrow D]$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $C \subseteq A$ i $B \subseteq D$.

R142. Dla $A, B \subseteq \mathbb{N}$, niech $B \Rrightarrow A = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid f^{-1}(B) \subseteq A\}$. Udowodnić, że jeśli $A, B, C, D \neq \varnothing$ i $A, B, C, D \neq \mathbb{N}$, to

$$B \Rrightarrow A \subseteq D \Rrightarrow C \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad A \subseteq C \text{ i } D \subseteq B.$$

R143. Określimy funkcję $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, przyjmując

$$f(n) = \langle k, l\rangle, \text{ gdzie liczby } k, l \text{ są takie, że } n = k^2 + l \text{ oraz } (k+1)^2 > n.$$

(a) Czy to jest dobrze określona funkcja?[7]

(b) Czy ta funkcja jest „na”?

(c) Czy ta funkcja jest różnowartościowa?

(d) Jaki jest obraz zbioru $A = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N}. n = \Sigma_{i=0}^{k} 2i\}$?

(e) Jaki jest przeciwobraz zbioru $B = \{\langle n_1, n_2\rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid n_2 = 2n_1\}$?

R144. Niech X, Y będą dowolnymi zbiorami. Zdefiniujemy funkcję $\Phi : Y^X \to (Y^X)^{(X^X)}$ przyjmując dla $h : X \to Y, f : X \to X$:

$$\Phi(h)(f) = h \circ f, \qquad \text{dla } h \in Y^X, f \in X^X.$$

(Zauważmy, że $\Phi(h) : X^X \to Y^X$ dla $h : X \to Y$).

(a) Pokazać, że funkcja Φ jest różnowartościowa.

(b) Niech $I = \{F : X^X \to Y^X \mid \forall f, g : X \to X.\ F(f \circ g) = F(f) \circ g\}$. Pokazać, że zbiór wartości funkcji Φ jest równy zbiorowi I.

R145. *Permutacją* zbioru X nazywamy dowolną bijekcję $\pi : X \xrightarrow[\text{na}]{1-1} X$. Powiemy, że funkcja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jest *niezmiennnicza ze względu na permutacje*, jeżeli dla każdej permutacji π zbioru $\mathbb{N}$ oraz dla każdej liczby $n \in \mathbb{N}$, zachodzi równość $f(\pi(n)) = \pi(f(n))$. Znaleźć zbiór wszystkich funkcji niezmienniczych ze względu na permutacje.

R146. Pokazać, że dla każdej funkcji $F : \mathsf{P}(\mathbb{N}) \to \mathsf{P}(\mathbb{N})$ spełniającej warunki:

(a) $F(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$;

(b) $F(\varnothing) = \varnothing$;

(c) $F(\bigcup \mathcal{X}) = \bigcup \{F(X) \mid X \in \mathcal{X}\}$, dla dowolnego $\mathcal{X} \subseteq \mathsf{P}(\mathbb{N})$;

(d) $F(X \cap Y) = F(X) \cap F(Y)$, dla dowolnych $X, Y \subseteq \mathbb{N}$,

istnieje dokładnie jedna taka funkcja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, że $F(X) = f^{-1}(X)$ dla dowolnego zbioru $X \subseteq \mathbb{N}$. *Wskazówka:* $X = \bigcup \{\{x\} \mid x \in X\}$.

R147. Czy dla każdej funkcji $f : A \to A$ istnieje taka funkcja $g : A \to A$, że $f = g \circ g$? Czy istnieje takie g jeżeli $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ to funkcja następnika?

R148. Niech $U = [0, \infty)$. Dla $C \subseteq U$ przyjmijmy, że $C^1 = C$ i $C^0 = U - C$. Niech teraz $\mathcal{C} = \{C_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, gdzie $C_i = [0, 2i + 1)$, dla wszystkich $i \in \mathbb{N}$. *Uogólnioną składową nad rodziną* $\mathcal{C}$ nazywamy dowolny iloczyn postaci $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} C_i^{s(i)}$, gdzie $s : \mathbb{N} \longrightarrow \{0, 1\}$. Mówimy

[7] Tj. czy dla każdego n istnieje dokładnie jedna taka para $\langle k, l\rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, że $n = k^2 + l$ oraz $(k+1)^2 > n$?

o takiej składowej, że jest *wyznaczona* przez funkcję s. Rodzinę wszystkich niepustych uogólnionych składowych nad rodziną $\mathcal{C}$ oznaczamy przez $\prod_{\mathcal{C}}^{+}$.

(a) Jakie uogólnione składowe wyznaczają funkcje stałe $\lambda i.0$ i $\lambda i.1$?

(b) Znaleźć funkcję, która nie jest stała i wyznacza pustą uogólnioną składową, oraz funkcję, która nie jest stała i wyznacza niepustą uogólnioną składową.

(c) Znaleźć bijekcję między zbiorami $\prod_{\mathcal{C}}^{+}$ i $\mathbb{N}$.

149. Niech $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Zbiór $X \subseteq \mathbb{N}$ jest *zamknięty ze względu na operację* f (w skrócie „jest f-*zamknięty*"), gdy dla dowolnych $x, y \in X$ zachodzi $f(x, y) \in X$.

(a) Czy iloczyn dowolnej niepustej rodziny zbiorów f-zamkniętych jest f-zamknięty?

(b) Czy suma łańcucha zbiorów f-zamkniętych musi być f-zamknięta?

(c) Czy dla każdego $B \subseteq \mathbb{N}$ istnieje najmniejszy f-zamknięty zbiór zawierający B?

R150. Niech $F : \mathsf{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}$. Uogólniając definicję z zadania 149, zbiór $X \subseteq \mathbb{N}$ nazwiemy F-*zamkniętym*,gdy dla dowolnego $A \subseteq X$ zachodzi $F(A) \in X$.

(a) Czy iloczyn dowolnej niepustej rodziny zbiorów F-zamkniętych jest F-zamknięty?

(b) Czy suma łańcucha zbiorów F-zamkniętych musi być F-zamknięta?

(c) Udowodnić, że dla każdego $B \subseteq \mathbb{N}$ istnieje najmniejszy F-zamknięty zbiór zawierający B.

(d) Dla $B \subseteq \mathbb{N}$, niech $B_0 = B$ oraz $B_{n+1} = B_n \cup \{F(D) \mid D \subseteq B_n\}$ dla $n \in \mathbb{N}$. Czy zbiór $B_\omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ jest F-zamknięty?

R151. Dla dowolnej funkcji $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiujemy zbiór $C(f) = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid f(A) \subseteq A\}$. W ten sposób określamy funkcję $C : (\mathbb{N} \to \mathbb{N}) \to \mathsf{P}(\mathsf{P}(\mathbb{N}))$.

(a) Czym jest $C(s)$ i $C(p)$, gdzie s jest funkcją następnika $s(n) = n + 1$, a p taką funkcją, że $p(n) = \mathsf{if}\ n = 0\ \mathsf{then}\ 1\ \mathsf{else}\ n - 1$?

(b) Czy funkcja C jest różnowartościowa? Czy jest to funkcja na $\mathsf{P}(\mathsf{P}(\mathbb{N}))$?

(c) Udowodnić, że rodzina $C(f)$ jest zamknięta ze względu na dowolne sumy i iloczyny.[8]

(d) Czy jeśli $\mathcal{Z} \subseteq \mathsf{P}(\mathbb{N})$ jest rodziną zamkniętą ze względu na dowolne sumy i iloczyny, oraz $\varnothing, \mathbb{N} \in \mathcal{Z}$, to $\mathcal{Z} = C(f)$ dla pewnego $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$?

R152. Określamy funkcję $\varphi : \mathsf{P}(\mathbb{N}) \to ((\mathsf{P}(\mathbb{N}) \to \mathsf{P}(\mathbb{N})) \to (\mathsf{P}(\mathbb{N}) \to \mathsf{P}(\mathbb{N})))$ następująco:

$$\varphi(A) = \lambda f \lambda X. f(X \cap A) \cap A,$$

dla $A \subseteq \mathbb{N}$. Inaczej, jeśli $f : \mathsf{P}(\mathbb{N}) \to \mathsf{P}(\mathbb{N})$ i $X \subseteq \mathbb{N}$, to $\varphi(A)(f)(X) = f(X \cap A) \cap A$.

(a) Czy φ jest różnowartościowa?

(b) Czy φ jest na $(\mathsf{P}(\mathbb{N}) \to \mathsf{P}(\mathbb{N})) \to (\mathsf{P}(\mathbb{N}) \to \mathsf{P}(\mathbb{N}))$?

(c) Niech $\mathcal{B}$ oznacza zbiór wszystkich bijekcji z $\mathsf{P}(\mathbb{N}) \to \mathsf{P}(\mathbb{N})$ do $\mathsf{P}(\mathbb{N}) \to \mathsf{P}(\mathbb{N})$. Proszę wyznaczyć zbiór $\varphi^{-1}(\mathcal{B})$.

R153. Niech $F : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathsf{P}_{+}(\mathbb{N}) \to \mathsf{P}(\mathbb{N})$, gdzie $\mathsf{P}_{+}(\mathbb{N}) = \mathsf{P}(\mathbb{N}) - \{\varnothing\}$, będzie zdefiniowana tak:

$$F(f, A) = f(A) \cap f^{-1}(A).$$

(a) Czy funkcja F jest różnowartościowa?

(b) Czy F jest na zbiór $\mathsf{P}(\mathbb{N})$?

(c) Niech $\mathcal{C}$ oznacza zbiór wszystkich funkcji stałych z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{N}$. Znaleźć obraz iloczynu kartezjańskiego $\mathcal{C} \times \mathsf{P}_{+}(\mathbb{N})$ przy przekształceniu F i wyznaczyć jego moc.

[8]Rodzina $\mathcal{Z} \subseteq \mathsf{P}(\mathbb{N})$ jest *zamknięta ze względu na dowolne sumy i iloczyny*, gdy suma dowolnej podrodziny $\mathcal{Z}' \subseteq \mathcal{Z}$ należy do $\mathcal{Z}$ oraz iloczyn dowolnej niepustej podrodziny $\mathcal{Z}' \subseteq \mathcal{Z}$ należy do $\mathcal{Z}$.

(d) Dla jakich funkcji $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ równość $F(f, A) = A$ jest spełniona przez wszystkie zbiory $A \in \mathsf{P}_+(\mathbb{N})$?

(e) Jaka jest moc zbioru $F^{-1}(\{\mathbb{N}\})$?

R154. Niech $G : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathsf{P}_+(\mathbb{N}) \to \mathsf{P}(\mathbb{N})$, gdzie $\mathsf{P}_+(\mathbb{N}) = \mathsf{P}(\mathbb{N}) - \{\varnothing\}$, będzie zdefiniowana tak:

$$G(f, A) = f^{-1}(f(A)).$$

(a) Czy funkcja G jest różnowartościowa?

(b) Czy G jest na zbiór $\mathsf{P}(\mathbb{N})$?

(c) Niech $\mathcal{C}$ oznacza zbiór wszystkich funkcji stałych z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{N}$. Znaleźć obraz zbioru $\mathcal{C} \times \mathsf{P}_+(\mathbb{N})$ przy przekształceniu G i wyznaczyć jego moc.

(d) Wyznaczyć moc zbioru $G^{-1}(\{\mathbb{N}\})$.

(e) Wyznaczyć moc zbioru $G^{-1}(\textsc{Sin})$, gdzie $\textsc{Sin}$ to rodzina wszystkich singletonów.

R155. Niech $\psi : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathsf{P}(\mathbb{N})$ będzie funkcją określoną następująco:

$$\psi(f) = \{n \in \mathbb{N} \mid f^{-1}(\{n\}) \text{ jest nieskończony}\}.$$

(a) Czy funkcja ψ jest różnowartościowa?

(b) Czy zbiór $\psi^{-1}(\{\mathbb{N}\})$ jest niepusty?

(c) Czy funkcja ψ jest „na”?

R156. Funkcja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jest *małolepka*, gdy dla każdego $a \in \mathbb{N}$ zbiór $f^{-1}(\{f(a)\})$ jest skończony.

(a) Czy istnieje różnowartościowa funkcja małolepka, która nie jest bijekcją?

(b) Czy istnieje funkcja małolepka, która jest „na”, ale nie jest bijekcją?

(c) Jaka jest moc zbioru wszystkich funkcji małolepkich?

(d) Znaleźć wszystkie liczby kardynalne postaci $\overline{\overline{\mathrm{Rg}(f)}}$, gdzie f jest małolepka.

Produkt uogólniony

157. Niech $f : T \to T$ będzie bijekcją. Czy zawsze zachodzą równości

$$\bigcup_{t \in T} A_t = \bigcup_{t \in T} A_{f(t)} \quad \text{i} \quad \prod_{t \in T} A_t = \prod_{t \in T} A_{f(t)}?$$

158. Która z następujących równości zachodzi dla dowolnych zbiorów $A_{t,s}$, gdzie $t \in T$, $s \in S$:

$$\bigcup_{t \in T} \prod_{s \in S} A_{t,s} = \prod_{s \in S} \bigcup_{t \in T} A_{t,s}? \qquad \bigcap_{t \in T} \prod_{s \in S} A_{t,s} = \prod_{s \in S} \bigcap_{t \in T} A_{t,s}?$$

159. *Krakowskim produktem* rodziny zbiorów $\mathcal{R} \subseteq \mathsf{P}(\mathcal{D})$ nazywamy zbiór

$$\mathbf{K}\mathcal{R} = \{f : \mathcal{R} \to \bigcup \mathcal{R} \mid \forall A (A \in \mathcal{R} \to f(A) \in A)\}.$$

Jeśli $\mathcal{R} = \{A, B\}$ to zamiast $\mathbf{K}\mathcal{R}$ piszemy $A \circleddash B$. Przypuśćmy, że zbiór A ma n elementów. Ile elementów mają zbiory $A \circleddash A$, $A \circleddash (A \circleddash A)$, $(A \circleddash A) \circleddash (A \circleddash A)$, $A \circleddash (A \circleddash (A \circleddash A))$?

160. Jakiego typu jest produkt $\prod_{t : \mathcal{T}} A_t$, jeśli $A_t : \mathsf{P}(\mathcal{D})$ dla $t : \mathcal{T}$?

Równoliczność

161. Określić bijekcje pomiędzy następującymi zbiorami:

(a) Odcinek otwarty $(0, 1)$ i cała prosta $\mathbb{R}$;

(b) Odcinek otwarty $(0, 1)$ i odcinek domknięty $[0, 2]$;

(c) Zbiory $\mathbb{N}$ i $\{0, 1\}^*$;

(d) Płaszczyzna $\mathbb{R}^2$ i sfera $\{\langle x, y, z \rangle \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$;

(e) Koło $\{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 1\}$ i kwadrat $\{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \le 2\}$.

162. Udowodnić, że $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$, korzystając z funkcji $f = \lambda mn.\, 2^m(2n + 1) - 1$.

163. Udowodnić, że jeśli $A \sim B$, to $\mathsf{P}(A) \sim \mathsf{P}(B)$.

164. Czy jeśli $A \sim B$ to $A - B \sim B - A$? A czy jeśli $A - B \sim B - A$ to $A \sim B$?

R165. Udowodnić, że jeśli A i B są równoliczne, to $\mathsf{P}(A) \times \mathsf{P}(B) \sim \{0, 1, 2, 3\}^A$.

R166. Niech $\alpha : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \xrightarrow[\text{na}]{1-1} \mathbb{N}$ i niech $g : \mathsf{P}(\mathbb{N}) \to (\mathbb{N} \to \mathsf{P}(\mathbb{N}))$ będzie taką funkcją, że $g(A)(n) = \{i \in \mathbb{N} \mid \alpha(n, i) \in A\}$. Udowodnić, że funkcja g jest bijekcją.

167. Pokazać, że funkcja $\varphi : \mathsf{P}(A)^B \to \mathsf{P}(A \times B)$, taka że dla dowolnego $f \in \mathsf{P}(A)^B$,
$$\varphi(f) = \{\langle a, b\rangle \in A \times B \mid a \in f(b)\},$$
jest różnowartościowa i na $\mathsf{P}(A \times B)$.

168. Pokazać, że funkcja $\varphi : \mathsf{P}(A\times B) \to \mathsf{P}(A)^B$, taka że dla dowolnych $\Delta \in \mathsf{P}(A\times B)$, $b \in B$,
$$\varphi(\Delta)(b) = \{a \in A \mid \langle a, b\rangle \in \Delta\},$$
jest różnowartościowa i na $\mathsf{P}(A)^B$.

169. Udowodnić, że $(A^B)^C \sim A^{C\times B}$ dla dowolnych zbiorów A, B, C.

170. Niech $(p_m)_{m\in\mathbb{N}}$ będzie nieskończonym ciągiem różnych liczb pierwszych. Dla dowolnej funkcji $f : \mathbb{N} \to \mathsf{P}(\mathbb{N})$, niech $\alpha(f) = \{p_m^{k+1} \mid k \in f(m)\}$. Udowodnić, że funkcja $\alpha : \mathsf{P}(\mathbb{N})^{\mathbb{N}} \to \mathsf{P}(\mathbb{N})$ jest injekcją.

171. Udowodnić, że $\mathsf{P}(\mathbb{N})^{\mathbb{N}} \sim \mathsf{P}(\mathbb{N})$.

R172. Ile jest nieskończonych ciągów liczb rzeczywistych?

Moce zbiorów

173. Udowodnić, że zbiór wszystkich skończonych podzbiorów zbioru $\mathbb{N}$ jest przeliczalny.

174. Jakiej mocy jest zbiór punktów leżących na powierzchni kuli?

175. Jakiej mocy jest zbiór punktów leżących na powierzchni bocznej stożka?

176. Jakiej mocy jest podzbiór płaszczyzny ograniczony krzywymi o równaniach $y = x^2$ i $y = 1 - x^2$?

177. Jakiej mocy jest zbiór wszystkich prostych na płaszczyźnie?

178. Jakiej mocy jest zbiór wszystkich prostych w $\mathbb{R}^3$ skośnych do osi X?

R179. Jakiej mocy jest zbiór wszystkich trójkątów[9] na płaszczyźnie? A jakiej mocy jest zbiór wszystkich tych trójkątów, których każdy wierzchołek ma obie współrzędne wymierne? Jak zmienią się odpowiedzi, jeśli ograniczymy się do trójkątów:
(a) równoramiennych? (b) równobocznych?

180. Jakiej mocy jest suma $\bigcup_{t\in T} A_t$, jeśli zbiór T i wszystkie zbiory A_t są mocy $\mathfrak{C}$?

181. Udowodnić, że zbiór A jest nieskończony wtedy i tylko wtedy gdy
$$\forall f \in A^A\, \exists B \in \mathsf{P}(A)\ ((B \neq \varnothing) \wedge (B \neq A) \wedge (f(B) \subseteq B)).$$

182. Udowodnić, że jeśli A jest dowolnym zbiorem parami rozłącznych przedziałów na prostej, to $\overline{\overline{A}} \le \aleph_0$.

183. Niech $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Udowodnić, że dla pewnego $x \in \mathbb{R}$ zbiór $f^{-1}(\{x\})$ nie zawiera żadnej kuli.

[9] Umawiamy się, że trójkąt ma trzy niewspółliniowe wierzchołki.

184. Udowodnić, że zbiór punktów nieciągłości funkcji rosnącej z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$ jest co najwyżej przeliczalny.

185. Czy zbiór ekstremów właściwych funkcji ciągłej z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$ może być nieprzeliczalny?

186.* Czy zbiór zer funkcji ciągłej z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$ może być nieprzeliczalny, gdy funkcja nie jest stała na żadnym przedziale?

187. Czy łańcuch zbiorów przeliczalnych może być nieprzeliczalny? A łańcuch zbiorów skończonych?

188. Czy istnieje taka funkcja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zbiór $f^{-1}(\{x\})$ jest:

   (a) prostą?
   (b) odcinkiem?
   (c) kwadratem?

189. Udowodnić, że jeśli A jest zbiorem nieskończonym,
a B jest zbiorem przeliczalnym, to suma $A \cup B$ jest równoliczna z A.

190. Wywnioskować z zadania 189, że zbiór wszystkich liczb niewymiernych jest mocy $\mathfrak{C}$.

191. Niech $A \subseteq \mathbb{R}$ będzie taki, że:

$$\forall x \in A\, \exists \varepsilon > 0\, (A \cap (x - \varepsilon, x + \varepsilon) = \{x\}).$$

Co można powiedzieć o mocy zbioru A?

192. Które z poniższych zdań są prawdziwe, a które fałszywe?

   (a) *Jeśli* $f : A \xrightarrow{1-1} B$ *oraz* $f(A) \neq B$ *to* $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}$.
   (b) *Jeśli* $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}$ *i* $C \neq \varnothing$ *to* $\overline{\overline{A \times C}} < \overline{\overline{B \times C}}$.

193. Czy produkt przeliczalnej rodziny zbiorów przeliczalnych musi być przeliczalny?

194. Znaleźć moc zbioru wszystkich czteroelementowych podziałów zbioru $\mathbb{R}$.

195. Udowodnić, że na płaszczyźnie istnieje okrąg, którego każdy punkt ma przynajmniej jedną współrzędną niewymierną.

196. Znaleźć moc zbioru wszystkich ciągów liczb wymiernych, które są zbieżne do zera.

R 197. Znaleźć moc zbioru wszystkich funkcji ciągłych z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$.

198. Znaleźć moc zbioru wszystkich otwartych podzbiorów prostej.

199. Obliczyć moce zbiorów:

   (a) $X = \{A : A \subseteq \mathbb{R}$ i A ma element najmniejszy i największy$\}$;
   (b) $Y = \{A : A \subseteq \mathbb{Z}$ i A ma element najmniejszy i największy$\}$;
   (c) $Z = \{A : A \subseteq \mathbb{Q}$ i A ma element najmniejszy i największy$\}$.

200. Które z następujących zbiorów są równoliczne:

$$\mathbb{Q} \times \mathbb{Z},\ \mathbb{R} \times \mathbb{Q},\ \mathbb{R} - \mathbb{Q},\ 2^{\mathbb{N}},\ 2^{\mathbb{R}},\ \mathsf{P}(\mathbb{R} \times \mathbb{Z}),\ \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \mathbb{N}^m?$$

201. Które z następujących zbiorów są równoliczne:

$$\mathbb{Z},\ \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \mathbb{Q}^{\mathbb{N}},\ \mathbb{R} \times \mathbb{R},\ \{0,1\}^*,\ \{0,1\}^{\mathbb{N}},\ \mathsf{P}(\mathbb{Q}),\ \mathsf{P}(\mathbb{R})?$$

202. Znaleźć moc zbioru $C = \{X \in \mathsf{P}(\mathbb{R}) : X \cap \mathbb{Q}$ jest skończone$\}$.

203. Niech $\overline{\overline{A}} = 2^{\mathfrak{C}}$. Udowodnić, że istnieje $f : A \xrightarrow[\text{na}]{1-1} A$, taka że zbiór $\{x \in A : x \neq f(x)\}$ jest mocy $\mathfrak{C}$.

204. Niech $\aleph_0 \leq \mathfrak{n} \leq \mathfrak{m} = \overline{\overline{A}}$. Udowodnić, że istnieje taka funkcja $f : A \xrightarrow[\text{na}]{1-1} A$, że zbiór

$\{x \in A \mid x \neq f(x)\}$ jest mocy $\mathfrak{n}$.

R205. Jakiej mocy jest zbiór wszystkich przeliczalnych (skończonych, nieskończonych, mocy $\mathfrak{C}$) podzbiorów $\mathbb{R}$?

206. Niech $\varphi : \mathbb{Z}[x] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie taka, że $\varphi(\langle p, r\rangle) = p(r)$. Jaka jest moc zbioru $\varphi^{-1}(\mathbb{Q} - \mathbb{Z})$ i zbioru $(\mathbb{Z}[x] \times \mathbb{R})/\ker(\varphi)$? Udowodnić, że jeśli $X_1, X_2 \subseteq \mathbb{R}$ oraz $X_1 \cap \mathbb{Z}$ i $X_2 \cap \mathbb{Z}$ są niepuste, to zbiory $\varphi^{-1}(X_1)$ i $\varphi^{-1}(X_2)$ są równoliczne.

207. Podzbiór W zbioru liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ nazywamy *wypukłym,* jeśli dla dowolnych trzech liczb wymiernych $a < b < c$, jeśli $a, c \in W$, to także $b \in W$. Ile jest wszystkich podzbiorów $\mathbb{Q}$, które są wypukłe? Ile jest podzbiorów, które nie są wypukłe?

208. Czy istnieje zbiór mocy mniejszej niż zbiór jego wszystkich skończonych podzbiorów?

R209. Czy istnieją takie zbiory A i B, że $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}$, ale A^B i B^A są równoliczne?

210. Jakiej mocy jest zbiór wszystkich funkcji okresowych z $\mathbb{Z}$ do $\mathbb{Z}$? A zbiór wszystkich funkcji okresowych z $\mathbb{Q}$ do $\mathbb{Q}$? (Przyjmujemy, że funkcja $f : X \to X$ jest okresowa, jeżeli nie jest stała, oraz istnieje takie $d \in X$, że $d > 0$ i dla dowolnego $x \in X$ zachodzi $f(x + d) = f(x)$.)

R211. Jakiej mocy jest zbiór wszystkich wypukłych podzbiorów $\mathbb{R}^2$?

212. Ile jest funkcji z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{N}$: (a) nierosnących? (b) niemalejących?

R213. Jakiej mocy jest zbiór wszystkich takich funkcji $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, że:

(a) $f \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$?
(b) $f \circ f = f$?
(c) $f \circ f \circ f = f$?

R214. Jakiej mocy jest zbiór $\mathcal{F}$ tych wszystkich funkcji $f : \mathsf{P}(\mathbb{N}) \to \mathsf{P}(\mathbb{N})$, że dla każdego skończonego $Z \subseteq \mathbb{N}$ wartość funkcji $f(Z)$ też jest skończona?

R215. Funkcja $f : \mathbb{Z} \to \{0, 1\}$ jest *okresowa*, gdy istnieje takie $k \in \mathbb{N} - \{0\}$, że $f(x) = f(x+k)$ dla każdego $x \in \mathbb{Z}$. Wykazać, że zbiór funkcji okresowych z $\mathbb{Z}$ w $\{0, 1\}$ ma moc $\aleph_0$.

R216. Udowodnić, że jeśli w rodzinie podzbiorów zbioru liczb naturalnych każde dwa różne zbiory mają co najwyżej jeden element wspólny, to rodzina ta jest przeliczalna.

R217. Czy teza zadania 216 pozostaje prawdziwa przy założeniu, że:

(a) każde dwa różne zbiory z danej rodziny mają co najwyżej k wspólnych elementów?
(b) każde dwa różne zbiory z danej rodziny mają skończony iloczyn?

R218. Jakiej mocy jest zbiór funkcji monotonicznych z $\mathbb{R}$ w $\mathbb{R}$?

219. Jakiej mocy jest zbiór wszystkich funkcji różnowartościowych z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$?

R220. Udowodnić, że zbiór wszystkich bijekcji z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{N}$ jest mocy $\mathfrak{C}$.

R221. Jakiej mocy są zbiory wszystkich takich funkcji z $\mathbb{N}$ w $\mathbb{N}$, że:

(a) obraz każdego zbioru skończonego jest skończony,
(b) obraz każdego niepustego zbioru skończonego jest nieskończony,
(c) przeciwobraz każdego zbioru skończonego jest skończony,
(d) przeciwobraz każdego niepustego zbioru skończonego jest nieskończony?

R222. Jakiej mocy są zbiory wszystkich takich funkcji z $\mathbb{N}$ w $\mathbb{N}$, że:

(a) przeciwobraz każdego zbioru nieskończonego jest skończony,
(b) przeciwobraz każdego zbioru nieskończonego jest nieskończony,

(c) obraz każdego zbioru nieskończonego jest skończony,
(d) obraz każdego zbioru nieskończonego jest nieskończony?

223. Jakie zawierania zachodzą pomiędzy zbiorami, o których mowa w zadaniach 221 i 222?

R224. Znaleźć moc zbioru wszystkich funkcji różnowartościowych z $\mathbb{N}$ do $\mathsf{P}(\mathbb{N})$ i moc zbioru wszystkich surjekcji z $\mathbb{N}$ na $\mathsf{P}(\mathbb{N})$.

225. Dla $a \in \mathbb{N}$ określamy $C_a = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2 : ax \leq y < (a+1)x\}$. Znaleźć moc każdego ze zbiorów C_a. Czy istnieje takie X i takie r, że $X/r = \{C_a : a \in \mathbb{N}\}$? Jeśli tak, to znaleźć X. Co się zmieni, jeśli przyjmiemy $C_a = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2 : |ax| \leq |y| < |(a+1)x|\}$?

226. Niech $W(f) = \{\langle a, f(a)\rangle \mid a \in \mathrm{Dom}(f)\}$. Które ze zbiorów A, B, $W(f)$, $Rg(f)$ są równoliczne dla dowolnej funkcji $f : A \to B$? Które są równoliczne pod warunkiem, że funkcja f jest różnowartościowa? (Gdy jest „na”? Gdy jest bijekcją?)

227. Czy istnieje taki zbiór X, że $|\mathsf{P}(X)| = \aleph_0$? A taki, że $|X^X| = \aleph_0$? A może istnieje taki, że $|\mathbb{N}^X| = \aleph_0$?

R228. Niech A będzie zbiorem (niekoniecznie wszystkich) ciągów dodatnich liczb naturalnych o tej własności, że dla każdego ciągu liczb dodatnich $a_1, a_2, \ldots$ (niekoniecznie należącego do zbioru A) istnieje w A taki ciąg $b_1, b_2, \ldots$, że $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \infty$. Udowodnić, że $|A| > \aleph_0$.

229. Ile jest takich funkcji $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, że każdy zbiór $f^{-1}(\{n\})$ jest skończony?

R230. Niech $\overline{\overline{A}}, \overline{\overline{B}} < \mathfrak{C}$. Pokazać, że $\overline{\overline{A \cup B}} < \mathfrak{C}$.

R231. Niech $\overline{\overline{A}} < \mathfrak{C}$ i $\overline{\overline{B}} \leq \aleph_0$. Pokazać, że $\overline{\overline{A \times B}} < \mathfrak{C}$.

R232. Jaka jest moc zbioru $F = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid \overline{\overline{\varphi(f)}} = \aleph_0\}$, jeśli φ jest funkcją z zadania 104?

R233. Funkcja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jest *uporczywa*, gdy spełnia warunek

$$\forall n \in \mathbb{N}\, \forall m \in \mathbb{N}\, \exists k \in \mathbb{N}\, (k > m \wedge f(k) = n).$$

Jakiej mocy jest zbiór U wszystkich funkcji uporczywych?

R234. Jakiej mocy jest zbiór $\mathcal{F}$ wszystkich funkcji z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{N}$ mających skończony zbiór wartości?

R235. Funkcję $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ nazywamy *zygzakiem*, gdy spełnia warunek

$$\forall x > 0((f(x) > f(x-1) \to f(x) > f(x+1)) \wedge (f(x) < f(x-1) \to f(x) < f(x+1))).$$

Jakiej mocy jest zbiór wszystkich zygzaków?

R236. Jaka jest moc zbioru $A = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid \forall x.\, f(x) \leq x\}$? Jakiej mocy są podzbiory $B = \{f \in A \mid f \text{ jest na } \mathbb{N}\}$ i $C = \{f \in A \mid f \text{ jest różnowartościowa}\}$?

R237. Jaka jest moc zbioru $B = \{f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid (\forall n\colon \mathbb{N}\; f(n) \leq n) \wedge (\forall m\colon \mathbb{N}\, \exists n\colon \mathbb{N}\; f(n) > m)\}$?

R238. Jakiej mocy jest zbiór $\mathcal{F}$ tych wszystkich funkcji $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, że dla dowolnych $m, n \in \mathbb{N}$ zachodzi równość:

(a) $f(m+n) = f(m) + f(n)$;
(b) $f(m \cdot n) = f(m) \cdot f(n)$;
(c) $f(m^n) = f(m)^{f(n)}$?

R239. Funkcję $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ nazwiemy *izolującą* wtedy i tylko wtedy, gdy:

- $\forall x \in \mathbb{Z}(f(x) \neq f(x+1))$;
- $\forall x \in f(\mathbb{Z})(x - 1 \notin f(\mathbb{Z}) \wedge x + 1 \notin f(\mathbb{Z}))$.

Jakiej mocy jest zbiór wszystkich funkcji izolujących?

R240. Funkcję $f : (\mathsf{P}(\mathbb{N}) - \{\varnothing\}) \to \mathbb{N}$ nazwiemy *funkcją wyboru*, gdy $f(A) \in A$ dla każdego

$A \in \mathrm{Dom}(f)$. Znaleźć moc zbioru wszystkich funkcji wyboru.

R241. Znaleźć moc zbioru $\mathcal{G}$ wszystkich funkcji $f : \mathsf{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}$ spełniających warunek $f(X) \notin X$ dla każdego $X \neq \mathbb{N}$.

242. Jakiej mocy jest zbiór tych wszystkich funkcji $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, że każdy ze zbiorów $f^{-1}(\{n\})$ jest innej mocy?

R243. Niech $\mathcal{R}$ będzie rodziną wszystkich funkcji częściowych $f : \mathbb{N} \multimap \mathbb{N}$ o skończonej dziedzinie. Czy zbiór $\mathcal{R}$ jest równoliczny z $\mathbb{N}$?

R244. Funkcję $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ nazwiemy *powracającą*, gdy dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieje takie $m > 0$, że $f^m(n) = n$. Jaka jest moc zbioru wszystkich funkcji powracających?

R245. Jakiej mocy jest zbiór wszystkich tych funkcji $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, że dla dowolnej liczby $n \in \mathbb{N}$ zbiór $f^{-1}(\{k \in \mathbb{N} \mid k < n\})$ ma:

(a) co najwyżej n elementów?
(b) co najmniej n elementów?

R246. Niech funkcja $f : \mathsf{P}(\mathbb{N} - \{0\}) \to \mathsf{P}(\mathsf{P}(\mathbb{N}))$ będzie taka, że $f(A) = \mathsf{P}(A) \cup \mathsf{P}(\mathbb{N} - A)$.

(a) Czy funkcja f jest różnowartościowa?
(b) Czy f jest na $\mathsf{P}(\mathsf{P}(\mathbb{N}))$?
(c) Jaka jest moc $\mathrm{Rg}(f)$, czyli zbioru wartości funkcji f ?
(d) Jaka jest moc zbioru $\bigcap \mathrm{Rg}(f)$?

247. Operacja $Z : (\mathbb{N} \to \mathbb{N}) \to \mathsf{P}(\mathbb{N})$ jest określona tak: $Z(f) = \{n \mid \forall x < n.\, f(x) < n\}$.

(a) Czy to jest funkcja różnowartościowa? Czy Z jest surjekcją?
(b) Ile elementów ma zbiór $\{\overline{\overline{Z^{-1}(\{A\})}} \mid A \subseteq \mathbb{N}\}$?

R248. Zbiór punktów płaszczyzny jest *ograniczony*, jeśli jest zawarty w pewnym kole. Punkty *kratowe*, to punkty o współrzędnych całkowitych. Jaka jest moc rodziny wszystkich ograniczonych zbiorów punktów kratowych?

R249.* Niech A oznacza przeliczalny podzbiór płaszczyzny $\mathbb{R}^2$. Udowodnić, że dla każdej pary różnych punktów $P, Q \in \mathbb{R}^2 - A$ istnieje taki punkt $R \in \mathbb{R}^2$, że odcinki PR oraz RQ są rozłączne z A.

R250.* Niech L będzie przeliczalnym zbiorem prostych w $\mathbb{R}^3$ i niech $Ł = \bigcup L$. Udowodnić, że dla każdej pary różnych punktów $P, Q \in \mathbb{R}^3 - Ł$ istnieje w $\mathbb{R}^3$ łamana z punktu P do punktu Q, rozłączna z $Ł$.

Relacje

251. Podać przykład 5-elementowej relacji symetrycznej w zbiorze $\mathbb{N}$. Czy istnieje 5-elementowa relacja zwrotna w $\mathbb{N}$? A 5-elementowa relacja przechodnia?

252. Czy relacja $\{\langle 0,3\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 1,5\rangle, \langle 4,5\rangle, \langle 4,2\rangle\}$ w zbiorze $\{0,1,2,3,4,5\}$ jest przechodnia?

253. Czy suma, iloczyn i złożenie dwóch relacji symetrycznych jest relacją symetryczną?

254. Czy dwuargumentowa relacja r w zbiorze $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, określona następująco:
$$\langle f, g\rangle \in r \quad \Leftrightarrow \quad \forall n{:}\mathbb{N}\, (f(n) \mid g(n) \vee g(n) \mid f(n)).$$
jest zwrotna, symetryczna, przechodnia, antysymetryczna? Czym jest złożenie $r \cdot r$?

255. Niech $r = \{\langle A, B\rangle \in \mathsf{P}(\mathbb{N}) \times \mathsf{P}(\mathbb{N}) \mid A \subseteq B\}$ i $s = \{\langle A, B\rangle \in \mathsf{P}(\mathbb{N}) \times \mathsf{P}(\mathbb{N}) \mid A \cap B = \varnothing\}$. Czy $r \cdot s = s \cdot r$? Czy $r^{-1} = r$? A może $s^{-1} = s$?

256. Udowodnić, że jeśli $r \subseteq r'$ i $s \subseteq s'$ to $r \cdot s \subseteq r' \cdot s'$.

257. Dla jakich relacji $r \subseteq A \times A$ zachodzą równości $r \cdot r^{-1} = r^{-1} \cdot r = \mathbf{1}_A$?

258. Które z następujących równości zachodzą dla dowolnych relacji r, s, p w zbiorze $\mathbb{N}$:

    (a) $r \cdot (s \cup p) = r \cdot s \cup r \cdot p$?
    (b) $r \cdot (s \cap p) = r \cdot s \cap r \cdot p$?
    (c) $r \cdot (s - p) = r \cdot s - r \cdot p$?

259. Niech r będzie niepustą relacją dwuargumentową w zbiorze A. Czy możliwe jest, że:

    (a) $r^{-1} \subsetneq r$?
    (b) $r \cdot r = r$ i r jest przeciwzwrotna (tj. $\forall x \in A (\neg\, x\, r\, x)$)?
    (c) $r^{-1} = A^2 - r$?

260. Niech r będzie relacją w zbiorze A i niech $\hat{r} = r - \mathbf{1}_A$.

    (a) Czy jeśli r jest przechodnia, to $\hat{r}$ jest przechodnia?
    (b) Czy jeśli $\hat{r}$ jest przechodnia, to r jest przechodnia?

261. Udowodnić, że relacja r jest przechodnia wtedy i tylko wtedy, gdy $r \cdot r \subseteq r$.

262. Udowodnić, że jeśli relacja r w zbiorze A jest przechodnia, to $r \cdot (r \cup \mathbf{1}_A) \subseteq r$.

263. Podać przykład takiej niepustej relacji przechodniej r w zbiorze $\mathbb{N}$, że relacja $r^{\exists}$ określona w zbiorze $\mathsf{P}(\mathbb{N})$ warunkiem: $\langle X, Y \rangle \in r^{\exists} \quad \Leftrightarrow \quad \exists x \exists y\, (x \in X \wedge y \in Y \wedge \langle x, y \rangle \in r)$

    (a) jest przechodnia; (b) nie jest przechodnia.

264. Udowodnić, że iloczyn dowolnej niepustej rodziny relacji przechodnich jest relacją przechodnią.

265. Niech $\mathcal{R}$ będzie łańcuchem (patrz zadanie 65) relacji przechodnich w zbiorze A. Udowodnić, że $\bigcup \mathcal{R}$ jest relacją przechodnią.

266. Udowodnić, że dla dowolnej relacji $r \subseteq A \times A$ istnieje najmniejsza relacja przechodnia zawierająca r.

267. Ile jest wszystkich relacji przechodnich $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$? Ile jest relacji symetrycznych? Ile zwrotnych?

R268. Udowodnić, że dla dowolnej relacji r w zbiorze A zachodzą równości:

    (a) $r^+ = r \cdot r^* = r^* \cdot r$;
    (b) $r^* = r^+ \cup \mathbf{1}_A$,

    gdzie r^+ i r^* to odpowiednio domknięcie przechodnie i przechodnio-zwrotne relacji r.

R269. Funkcja $\varphi : (\mathbb{N} \to \mathbb{N}) \times (\mathbb{N} \to \mathbb{N}) \to \mathsf{P}(\mathbb{N})$ jest określona następująco:

$$\varphi(f, g) = \{x \in \mathbb{N} \mid f(x) \neq g(x)\}.$$

    (a) Czy φ jest funkcją różnowartościową?
    (b) Czy φ jest na $\mathsf{P}(\mathbb{N})$?
    (c) Czy każda rodzina $\mathcal{R} \subseteq \mathsf{P}(\mathbb{N})$ jest obrazem relacji przechodniej przy operacji φ?
    (d) Czy dla każdego $\mathcal{R} \subseteq \mathsf{P}(\mathbb{N})$ relacja $\varphi^{-1}(\mathcal{R})$ jest przechodnia?

R270. Niech $\varphi : \mathsf{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \to \mathsf{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ będzie określone równością $\varphi(r) = \bigcup \{r^{2^n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ i niech $\mathcal{T}$ oznacza rodzinę wszystkich relacji przechodnich w $\mathbb{N}$.

    (a) Czy φ jest różnowartościowa?
    (b) Czy funkcja φ jest na $\mathsf{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$?

(c) Czy dla dowolnego r zachodzi równość $\varphi(r) = r^+$?
(d) Udowodnić, że $\varphi(\mathcal{T}) = \mathcal{T}$.
(e) Czy $\varphi^{-1}(\mathcal{T}) = \mathcal{T}$?

R271. Funkcja $\varphi : \mathsf{P}(\mathbb{N}) \to \mathsf{P}((\mathbb{N} \to \mathbb{N}) \times (\mathbb{N} \to \mathbb{N}))$ jest określona następująco:
$$\varphi(A) = \{\langle f, g\rangle \in (\mathbb{N} \to \mathbb{N}) \times (\mathbb{N} \to \mathbb{N}) \mid \forall x \in A.\, f(x) \leq g(x)\}.$$
(a) Czy φ jest funkcją różnowartościową?
(b) Czy φ jest surjekcją?
(c) Niech P, C, L oznaczają odpowiednio zbiory wszystkich relacji przechodnich w zbiorze $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, wszystkich porządków częściowych w $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ i wszystkich porządków liniowych w $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Co to jest $\varphi^{-1}(P)$? Co to jest $\varphi^{-1}(C)$? A co to jest $\varphi^{-1}(L)$?

R272. Zdefiniujmy funkcję $F : \mathsf{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times \mathsf{P}(\mathbb{N}) \to \mathsf{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ w następujący sposób:
$$F(R, A) = R \cap (A \times A).$$
(a) Czy F jest różnowartościowa?
(b) Czy F jest na $\mathsf{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$?
(c) Znaleźć przeciwobraz zbioru wszystkich relacji równoważności w $\mathbb{N}$.

Niech $\mathcal{Z}$ będzie niepustą rodziną podzbiorów $\mathbb{N}$.
(d) Czy dla wszystkich relacji R zachodzi $F(R, \bigcup \mathcal{Z}) = \bigcup\{F(R, A) \mid A \in \mathcal{Z}\}$?
(e) Czy dla wszystkich relacji R zachodzi $F(R, \bigcap \mathcal{Z}) = \bigcap\{F(R, A) \mid A \in \mathcal{Z}\}$?
(f) Czy odpowiedzi w poprzednich dwóch punktach zmienią się jeśli $\mathcal{Z}$ będzie niepustym *łańcuchem* podzbiorów $\mathbb{N}$?

R273. Niech $\varphi : \mathbb{N} \to \mathsf{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ będzie zdefiniowana następująco:
$$\varphi(n) = \{\langle x, n\rangle \mid x \leq n\} \cup \{\langle n, y\rangle \mid n \leq y\}.$$
(a) Znaleźć przeciwobraz $\varphi^{-1}(\mathcal{T})$, gdzie $\mathcal{T}$ to rodzina wszystkich relacji przechodnich.
(b) Czy $\bigcup \varphi(\mathbb{N})$ jest relacją przechodnią w $\mathbb{N}$?

R274. Niech $\varphi : \mathbb{N} \to \mathsf{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ będzie zdefiniowana następująco:
$$\varphi(n) = \{\langle n, x\rangle \mid n \leq x \leq 2n\} \cup \{\langle y, 2n\rangle \mid n \leq y \leq 2n\}.$$
(a) Znaleźć $\varphi^{-1}(\mathcal{T})$, gdzie $\mathcal{T}$ to rodzina wszystkich relacji przechodnich.
(b) Czy $\bigcup \varphi(\mathbb{N})$ jest relacją przechodnią w $\mathbb{N}$?

R275. Niech $f : A \to B$ i niech $\Phi : \mathsf{P}(B \times B) \to \mathsf{P}(A \times A)$ będzie taka, że dla każdego $r \subseteq B \times B$:
$$\Phi(r) = \{\langle x, y\rangle \in A \times A \mid \langle f(x), f(y)\rangle \in r\}.$$
(a) Udowodnić, że Φ jest różnowartościowa wtedy i tylko wtedy, gdy f jest na B.
(b) Udowodnić, że f jest różnowartościowa wtedy i tylko wtedy, gdy Φ jest na $\mathsf{P}(A \times A)$. W dowodzie części ($\Rightarrow$) wskazać sposób użycia założenia o różnowartościowości f.
(c) Udowodnić, że jeśli Φ jest na $\mathsf{P}(A \times A)$ i $\mathcal{R} \subseteq \mathsf{P}(A \times A)$, to $\Phi(\bigcup \Phi^{-1}(\mathcal{R})) = \bigcup \mathcal{R}$.

R276. *Przestrzenią zgodności* nazywamy rodzinę zbiorów $\mathcal{A}$, spełniającą warunki:
(a) Jeśli $a \in \mathcal{A}$ i $a' \subseteq a$ to $a' \in \mathcal{A}$.
(b) Jeśli $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ oraz dla dowolnych $a, b \in \mathcal{B}$ zachodzi $a \cup b \in \mathcal{A}$ to $\bigcup B \in \mathcal{A}$.

Niech $\mathcal{A}$ będzie przestrzenią zgodności. Udowodnić, że istnieje taka zwrotna w $\bigcup \mathcal{A}$ i symetryczna relacja r, że dla dowolnego a zachodzi równoważność:
$$a \in \mathcal{A} \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad \forall xy\, (x, y \in a \to x\, r\, y).$$

R277. Relacja $r \subseteq A \times A$ jest *przeciwzwrotna* gdy dla żadnego a nie zachodzi $\langle a, a\rangle \in r$.

(a) Czy złożenie relacji przeciwzwrotnych jest relacją przeciwzwrotną?
(b) Czy iloczyn dowolnej niepustej rodziny relacji przeciwzwrotnych jest relacją przeciwzwrotną?
(c) Czy suma dowolnej rodziny relacji przeciwzwrotnych jest relacją przeciwzwrotną?

R278. Relację $r \subseteq A \times A$ nazwiemy *krzaczastą* gdy

$$\forall a\, b\, c\ \ (a\, r\, b \wedge a\, r\, c \to \neg\, b\, r\, c \wedge \neg\, c\, r\, b)$$

(a) Czy złożenie relacji krzaczastych jest relacją krzaczastą?
(b) Czy iloczyn dowolnej niepustej rodziny relacji krzaczastych jest relacją krzaczastą?
(c) Czy suma dowolnej rodziny relacji krzaczastych jest relacją krzaczastą?
(d) Niech r_i krzaczaste dla $i \in \mathbb{N}$ i niech $\forall ij\, (i \leq j \to r_i \subseteq r_j)$. Czy $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} r_i$ jest relacją krzaczastą?

R279. Relację $r \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ nazwiemy *skierowaną*, gdy

$$\forall x \forall y \forall z[\langle x, y\rangle \in r \wedge \langle x, z\rangle \in r \to \exists t(\langle y, t\rangle \in r \wedge \langle z, t\rangle \in r)].$$

Czy jest prawdą, że:

(a) jeśli r i s są skierowane, to $r \cdot s$ jest również skierowana?
(b) jeśli r i s są skierowane, to $r \cap s$ jest również skierowana?
(c) jeśli r jest skierowana, to $r \cup r^{-1}$ jest również skierowana?
(d) jeśli $\mathcal{R}$ jest taką rodziną relacji skierowanych, że dla dowolnych $r, s \in \mathcal{R}$ zachodzi $r \subseteq s$ lub $s \subseteq r$, to $\bigcup \mathcal{R}$ jest relacją skierowaną?

R280. Niech r i s będą binarnymi relacjami w zbiorze A. Które z następujących równości są prawdziwe dla dowolnych relacji r i s? W przypadku gdy dana równość nie zawsze zachodzi, czy prawdziwa jest któraś z inkluzji $\subseteq$ lub $\supseteq$?

(a) $(r^*)^{-1} = (r^{-1})^*$;
(b) $(r \cup s)^* = r^* \cup s^*$;
(c) $(r \cap s)^* = r^* \cap s^*$.

R281. Relację $r \subseteq A \times A$ nazwiemy *euklidesową* gdy

$$\forall x \forall y \forall z\, [\, \langle x, y\rangle \in r \wedge \langle x, z\rangle \in r \to \langle y, z\rangle \in r\,].$$

Czy jest prawdą, że:

(a) jeśli r jest zwrotna i euklidesowa, to jest również skierowana (patrz zad. 279)?
(b) jeśli r jest zwrotna i euklidesowa, to jest również przechodnia?
(c) jeśli r jest przechodnia i symetryczna, to jest również euklidesowa?
(d) jeśli r jest przechodnia i euklidesowa, to jest również symetryczna?
(e) jeśli $\mathcal{R}$ jest niepustą rodziną relacji euklidesowych, to $\bigcap \mathcal{R}$ jest relacją euklidesową?

R282. Relację $r \subseteq A \times A$ nazwiemy *słabo gęstą* gdy

$$\forall x \forall y\, [\, \langle x, y\rangle \in r \to \exists z\, (\langle x, z\rangle \in r \wedge \langle z, y\rangle \in r)\,].$$

Czy jest prawdą, że:

(a) jeśli r jest słabo gęsta, to r^* jest również słabo gęsta?
(b) jeśli r jest słabo gęsta, to $r \cup r^{-1}$ jest również słabo gęsta?
(c) jeśli r i s są słabo gęste, to $r \cdot s$ jest również słabo gęsta?
(d) jeśli $\mathcal{R}$ jest łańcuchem relacji słabo gęstych, to $\bigcap \mathcal{R}$ jest relacją słabo gęstą?

R283. Mamy taką funkcję $f : \mathsf{P}(\mathbb{N}\times\mathbb{N}) \to \mathsf{P}(\mathbb{N})$:[10]

$$f(r) = \{k \mid \exists x\exists y\,(\langle x,y\rangle \in r^{k+1} \wedge \forall w(\langle w,x\rangle \notin r) \wedge \forall z(\langle y,z\rangle \notin r))\}.$$

(a) Czy f jest różnowartościowa?
(b) Czy f jest „na”?
(c) Czy istnieje nieprzechodnia relacja r, dla której $f(r) = \{0\}$?

284. Dla dowolnej relacji $r \subseteq A \times A$, niech $f_r : \mathbb{N} \to \mathsf{P}(A\times A)$ będzie taka, że $f_r(n) = r^n$ dla $n \in \mathbb{N}$. Dla jakich r ciąg $\{f_r(i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ jest wstępujący (tj. dla każdego $i \in \mathbb{N}$ zachodzi $f_r(i) \subseteq f_r(i+1)$)?

R285. Niech funkcja $\varphi : \mathsf{P}(\mathbb{N}\times\mathbb{N}) \to \mathsf{P}(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$ będzie określona tak: $\varphi(r) = \bigcap\{r^n \mid n > 0\}$.

(a) Czy φ jest różnowartościowa?
(b) Niech $\mathcal{Z}$ oznacza rodzinę wszystkich relacji zwrotnych w $\mathbb{N}$. Znaleźć $\varphi(\mathcal{Z})$ i $\varphi^{-1}(\mathcal{Z})$.

R286. Dla dowolnego $r \subseteq A \times A$ i dowolnego $B \subseteq A$, niech $\mathcal{I}(r,B) = \{y \mid \exists x \in B.\, x\,r\,y\}$.

(a) Udowodnić, że $\mathcal{I}(r^*,B) = \bigcup\{\mathcal{I}(r^n,B) \mid n \in \mathbb{N}\}$.
(b) Udowodnić, że $\mathcal{I}(r^*,B)$ jest najmniejszym zbiorem X spełniającym warunki $B \subseteq X$ oraz $\mathcal{I}(r,X) \subseteq X$.
(c) Pokazać, że relacja $r \subseteq A \times A$ jest przechodnia wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych $C, D \subseteq A$:
– jeśli $r \cap (C \times D) = \varnothing$, to $\mathcal{I}(r,C) \cap \mathcal{I}(r^{-1},D) = \varnothing$.

Relacje równoważności

287. Które z następujących relacji są relacjami równoważności:

(a) Relacja r_1 w zbiorze $\mathbb{R}$ określona warunkiem $x\,r_1\,y \Leftrightarrow x^2 = y^2$?
(b) Relacja r_2 w zbiorze $\mathbb{R}$ określona warunkiem $x\,r_2\,y \Leftrightarrow x^2 \neq y^2$?
(c) Relacja r_3 w zbiorze $\mathbb{Z}$ określona warunkiem $m\,r_3\,n \Leftrightarrow m \leq n$?
(d) Relacja r_4 w zbiorze $\mathsf{P}(\mathbb{N})$ określona warunkiem $A\,r_4\,B \Leftrightarrow A \cap \mathcal{P}\mathrm{r} = B \cap \mathcal{P}\mathrm{r}$, gdzie $\mathcal{P}\mathrm{r}$ jest zbiorem wszystkich liczb parzystych?

288. Które z następujących relacji są relacjami równoważności w $\mathbb{R}$?

(a) $\{\langle x,y\rangle \mid xy \geq 0\}$;
(b) $\{\langle x,y\rangle \mid xy > 0\}$;
(c) $\{\langle x,y\rangle \mid x^2 - 5y + 1 = y^2 - 5x + 1\}$;
(d) $\{\langle x,y\rangle \mid (x \leq 1 \wedge y \leq 1) \vee (x > 1 \wedge y > 1)\}$;
(e) $\{\langle x,y\rangle \mid (x \leq 1 \wedge y \leq 1) \vee (x \geq 1 \wedge y \geq 1)\}$.

289. Ile jest relacji równoważności w $\mathbb{N}$, które mają dokładnie jedną klasę abstrakcji? Ile jest takich relacji równoważności r w zbiorze $\mathbb{N}$, że $[0]_r = \mathbb{N} - \{7\}$? A ile takich, że $[0]_r = \mathbb{N} - \{7, 49\}$?

290. Czy istnieje taka relacja równoważności r w zbiorze $\mathbb{N}$, która ma 22 klasy abstrakcji, a każda klasa abstrakcji ma 37 elementów?

R291. Czy istnieje taka relacja równoważności r w zbiorze $\mathbb{N}$, która ma 2 klasy abstrakcji po 17 elementów, 5 klas po 33 elementy i jedną klasę nieskończoną?

[10] Przez r^k oznaczamy k-krotne złożenie relacji r ze sobą: $r^0 = \mathbf{1}$, oraz $r^{k+1} = r^k \cdot r$.

R292. Czy istnieje taka relacja równoważności r w zbiorze $\mathbb{N}$, która ma nieskończenie wiele nieskończonych klas abstrakcji?

293. Które z poniższych rodzin podzbiorów płaszczyzny są zbiorami klas abstrakcji pewnych relacji równoważności w $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$?

(a) rodzina wszystkich parabol o równaniach $y = x^2 + c$, dla $c \in \mathbb{R}$?
(b) rodzina wszystkich prostych o równaniach $y = cx$, dla $c \in \mathbb{R}$?
(c) rodzina wszystkich hiperbol o równaniach $y = cx^{-1}$, dla $c \neq 0$?

294. Niech $\mathcal{P}$ będzie zbiorem wszystkich prostokątów na płaszczyźnie i niech r będzie relacją podobieństwa prostokątów (jest to relacja równoważności w zbiorze $\mathcal{P}$). Znaleźć moc zbioru ilorazowego $\mathcal{P}/r$. Jakiej mocy są klasy abstrakcji relacji r?

R295. Niech r będzie relacją równoważności w zbiorze $\mathbb{N}$. Relacja ϱ_r w zbiorze $\mathsf{P}(\mathbb{N})$ jest zdefiniowana następująco:

$$A\, \varrho_r\, B \leftrightarrow (\forall a \in A\ \exists b \in B\ a\, r\, b) \wedge (\forall b \in B\ \exists a \in A\ a\, r\, b).$$

(a) Udowodnić, że ϱ_r jest relacją równoważności.
(b) Jakiej mocy jest zbiór ilorazowy $\mathsf{P}(\mathbb{N})/_{\varrho_r}$ w przypadku, gdy
  (i) $r = \mathbf{1}_{\mathbb{N}}$?
  (ii) $r = \{\langle m, n\rangle \mid m \equiv n \pmod 2\}$?
(c) Załóżmy teraz, że r ma nieskończenie wiele klas abstrakcji i każda z nich jest nieskończona (por. zad. 292). Ile przeliczalnych klas abstrakcji ma relacja ϱ_r?

R296. W zbiorze $\mathbb{N} \to \mathsf{P}(\mathbb{N})$ definiujemy relację $\sim$:

$$f \sim g \quad \Leftrightarrow \quad \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f(n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} g(n) \ \wedge\ \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f(n) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} g(n).$$

(a) Uzasadnić (jak najzwięźlej), że $\sim$ jest relacją równoważności.
(b) Jakiej mocy jest zbiór ilorazowy $(\mathbb{N} \to \mathsf{P}(\mathbb{N}))/_{\sim}$?
(c) Jakie są moce klas abstrakcji, tj. jakie elementy ma zbiór $\{\overline{\overline{[f]_\sim}} \mid f : \mathbb{N} \to \mathsf{P}(\mathbb{N})\}$?

R297. W zbiorze $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiujemy trzy relacje.

$$\begin{aligned} f \sim g &\quad \Leftrightarrow \quad \forall n(\exists k(f(k) = n) \leftrightarrow \exists k(g(k) = n)) \\ f \approx g &\quad \Leftrightarrow \quad \forall n \exists k(f(k) = n \leftrightarrow g(k) = n) \\ f \equiv g &\quad \Leftrightarrow \quad \forall n \exists k(f(k) = n) \leftrightarrow \forall n \exists k(g(k) = n) \end{aligned}$$

(a) Które z tych relacji są relacjami równoważności, a które nie są?
(b) W przypadku odpowiedzi pozytywnych w zadaniu 297a: jakiej mocy są odpowiednie zbiory klas abstrakcji?
(c) Jakiej mocy jest zbiór $C = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid f \sim \lambda n.\, 2n\}$?
(d) Jakiej mocy jest zbiór $D = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid f \approx \lambda n.\, 2n\}$?

R298. Określamy relację równoważności $\approx$ w zbiorze $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, przyjmując $f \approx g$, wtedy i tylko wtedy, gdy zbiory $f^{-1}(\{n\})$ i $g^{-1}(\{n\})$ są równoliczne dla każdego n.

(a) Dlaczego to jest relacja równoważności?
(b) Jakiej mocy jest zbiór ilorazowy $(\mathbb{N} \to \mathbb{N})/_{\approx}$?
(c) Wskazać takie trzy klasy abstrakcji tej relacji, że każda z nich jest innej mocy.

299. Niech R będzie relacją równoważności w zbiorze $\mathbb{Z}$. Znaleźć moc zbioru R.

300. Czy iloczyn dwóch różnych relacji równoważności musi (może) być pusty?

301. Czy złożenie dwóch relacji równoważności zawsze jest relacją równoważności? A suma (iloczyn) dwóch relacji równoważności?

R302. Niech r i s będą relacjami równoważności w zbiorze A. Udowodnić, że złożenie $r \cdot s$ jest relacją równoważności wtedy i tylko wtedy, gdy $r \cdot s = s \cdot r$.

303. Udowodnić, że dla dowolnej relacji $r \subseteq A \times A$ istnieje najmniejsza relacja równoważności w A zawierająca r.

304. Udowodnić, że każda (częściowa) relacja równoważności jest jądrem pewnego (częściowego) przekształcenia.

305. Niech r będzie jądrem funkcji f. Pokazać, że r jest antysymetryczna wtedy i tylko wtedy, gdy f jest różnowartościowa, i że r jest spójna wtedy i tylko wtedy gdy f jest funkcją stałą.

306. Niech A będzie niepustym zbiorem i niech $f : A \to A$.

(a) Udowodnić, że jeśli f jest różnowartościowa, to relacja $r \subseteq A \times A$, dana warunkiem
$$xry \quad \Leftrightarrow \quad \exists n \in \mathbb{N}(f^n(x) = y \vee f^n(y) = x)$$
jest relacją równoważności.

(b) Czy prawdziwe jest twierdzenie odwrotne, tj. czy jeśli r jest relacją równoważności, to f musi być różnowartościowa?

(c) Podać przykład takich A i f, że r ma nieskończenie wiele skończonych klas abstrakcji, każdą o innej liczbie elementów. (Można zrobić rysunek.)

307. Niech $f : A \to A$. Czy relacja $r = \{\langle a, b\rangle \in A \times A \mid \exists m, n \in \mathbb{N}(f^m(a) = f^n(b))\}$ jest relacją równoważności w A?

308. Rozpatrzmy następującą relację w $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$:
$$\langle m, n\rangle \sim \langle m', n'\rangle \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad m + n' = m' + n.$$
Nie korzystając z pojęcia liczby całkowitej, udowodnić, że jest to relacja równoważności. Następnie udowodnić, że jeśli $\langle m, n\rangle \sim \langle m', n'\rangle$ i $\langle m_1, n_1\rangle \sim \langle m'_1, n'_1\rangle$, to:

(a) $\langle m + m_1, n + n_1\rangle \sim \langle m' + m'_1, n' + n'_1\rangle$;

(b) $\langle mm_1 + nn_1, mn_1 + nm_1\rangle \sim \langle m'm'_1 + n'n'_1, m'n'_1 + n'm'_1\rangle$;

(c) $\langle n, m\rangle \sim \langle n', m'\rangle$.

309. Niech $\mathbb{Z}[x]$ oznacza zbiór wszystkich wielomianów zmiennej x o współczynnikach całkowitych i niech r będzie taką relacją w zbiorze $\mathbb{Z}[x]$, że $\langle f, g\rangle \in r$ zachodzi wtedy i tylko wtedy gdy różnica $f - g$ ma wszystkie współczynniki parzyste.

(a) Pokazać, że r jest relacją równoważności.

(b) Wskazać trzy różne klasy abstrakcji.

(c) Jakiej mocy jest zbiór wszystkich klas abstrakcji?

(d) Wskazać wszystkie liczby kardynalne, które są mocami klas abstrakcji tej relacji.

R310. Dla $n \in \mathbb{N}$, niech $\sim_n$ oznacza następującą relację w zbiorze $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$:
$$f \sim_n g \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad \forall i \leq n.\, f(i) = g(i).$$
Dla niepustego $A \subseteq \mathbb{N}$, niech symbol $\sim_A$ oznacza relację $\bigcap_{n \in A} \sim_n$. Udowodnić, że:

(a) Dla każdego n i każdego A relacje $\sim_n$ i $\sim_A$ są relacjami równoważności.

(b) Każda z nich ma albo skończenie wiele klas abstrakcji albo tylko klasy jednoelementowe.

311. Udowodnić, że zbiór wszystkich relacji równoważności w $\mathbb{N}$ jest mocy continuum.

312. Jakiej mocy jest rodzina wszystkich tych relacji równoważności w $\mathbb{N}$, które mają skończenie wiele klas abstrakcji?

313. Jakiej mocy jest rodzina wszystkich tych relacji równoważności w $\mathbb{N}$, które mają tylko skończone klasy abstrakcji?

R314. Niech $\mathcal{R}$ oznacza rodzinę wszystkich relacji równoważności w $\mathbb{N}$. Jakiej mocy są zbiory:

(a) $A = \{r \in \mathcal{R} \mid [0]_r = \mathbb{N} - \{7\}\}$?
(b) $B = \{r \in \mathcal{R} \mid [0]_r = \mathbb{N} - \{7, 49\}\}$?
(c) $C = \{r \in \mathcal{R} \mid [0]_r = \{7, 49\}\}$?

R315. Relację równoważności $r \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ nazwiemy *różnorodną*, gdy dla każdej liczby naturalnej $n > 0$ relacja r ma klasę abstrakcji mocy n. Jakiej mocy jest zbiór wszystkich relacji różnorodnych?

R316. Jaka jest moc zbioru wszystkich relacji równoważności w $\mathbb{R}$, których każda klasa abstrakcji ma skończoną nieparzystą liczbę elementów?

R317.* Relacja równoważności w $\mathbb{R}$ ma przeliczalną liczbę klas abstrakcji. Udowodnić, że co najmniej jedna z nich jest mocy continuum.
Wskazówka: Rozwiązać najpierw zadanie 90.

318. Relacja równoważności w $\mathbb{R}$ ma wszystkie klasy abstrakcji mocy $\aleph_0$. Udowodnić, że zbiór ilorazowy tej relacji jest mocy continuum. *Wskazówka: Rozwiązać najpierw zadanie 317.*

R319. Oznaczmy przez $\mathcal{R}$ zbiór wszystkich relacji równoważności w $\mathbb{N}$.
Jeśli $r, s \in \mathcal{R}$ i $n \in \mathbb{N}$, to $r \approx_n s$ oznacza, że: $\forall x \in \mathbb{N}.\, \langle x, n\rangle \in r \iff \langle x, n\rangle \in s$.
A jeśli $A \subseteq \mathbb{N}$, to $r \approx_A s$ oznacza, że dla pewnego $n \in A$ zachodzi $r \approx_n s$.

(a) Udowodnić, że dla każdego n, relacja $\approx_n$ jest relacją równoważności.
(b) Podać przykład takich niepustych zbiorów $A, B \subseteq \mathbb{N}$, że relacja $\approx_A$ jest relacją równoważności, a relacja $\approx_B$ nie jest relacją równoważności.
(c) Czy istnieją takie $r_0, r_1, r_2, r_3 \in \mathcal{R}$, że klasy abstrakcji $[r_0]_{\approx_0}$, $[r_1]_{\approx_0}$, $[r_2]_{\approx_0}$, $[r_3]_{\approx_0}$, mają odpowiednio 0, 1, 2, 3 elementy?

320. Niech r będzie taką relacją w zbiorze $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, że $f\,r\,g$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $n \in \mathbb{N}$ różnica $f(n) - g(n)$ jest parzysta. Udowodnić, że r jest relacją równoważności. Jakiej mocy jest klasa abstrakcji funkcji identycznościowej? Jaka jest moc zbioru wszystkich klas abstrakcji?

321. Niech s będzie taką relacją w zbiorze $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$, że $\langle f, g\rangle \in s$ zachodzi wtedy i tylko wtedy gdy różnica $f - g$ jest zbieżna do zera.

(a) Pokazać, że s jest relacją równoważności.
(b) Wskazać trzy różne klasy abstrakcji.
(c) Jakiej mocy jest zbiór ilorazowy $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}/_s$?
(d) Wskazać wszystkie liczby kardynalne, które są mocami klas abstrakcji tej relacji.

322. Niech s będzie taką relacją w zbiorze $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$, że $\langle f, g\rangle \in s$ zachodzi wtedy i tylko wtedy gdy $\exists n \forall m (m > n \to f(m) = g(m))$. Pokazać, że s jest relacją równoważności. Wskazać trzy różne klasy abstrakcji. Znaleźć moc zbioru ilorazowego relacji r i moc każdej klasy abstrakcji.

323. Dana jest następująca relacja równoważności $r \subseteq \mathsf{P}(\mathbb{N})^2$:

$$P \; r \; Q \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad P = Q = \varnothing \text{ lub } P, Q \neq \varnothing \text{ i } \min P = \min Q.$$

Jakiej mocy jest zbiór ilorazowy $\mathsf{P}(\mathbb{N})/_r$? Jakie są moce poszczególnych klas abstrakcji?

324. Niech $r \subseteq \mathsf{P}(\mathbb{N}) \times \mathsf{P}(\mathbb{N})$ będzie taką relacją, że $A\,r\,B$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy różnica symetryczna $A \dot{-} B$ jest zbiorem skończonym. Udowodnić, że r jest relacją równoważności w $\mathsf{P}(\mathbb{N})$, która ma nieskończenie wiele klas abstrakcji. Opisać klasy abstrakcji $[\varnothing]_r$ i $[\mathbb{N}]_r$. Jakiej mocy jest zbiór wszystkich klas abstrakcji? Jakiej mocy są poszczególne klasy?
325. Niech $r \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ będzie relacją równoważności w zbiorze $\mathbb{N}$, i niech $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathsf{P}(\mathbb{N})$ będzie taka, że $f(\langle x, y\rangle) = [x]_r \cup [y]_r$, dla dowolnych $x, y \in \mathbb{N}$. Czy funkcja f jest różnowartościowa? Czy jest na $\mathsf{P}(\mathbb{N})$? Znaleźć $f^{-1}(\{[3]_r\})$ oraz $f(r)$.
326. Niech $r \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ będzie relacją równoważności w zbiorze $\mathbb{N}$, i niech $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathsf{P}(\mathbb{N})$ będzie taka, że $f(\langle x, y\rangle) = [x]_r \cap [y]_r$, dla dowolnych $x, y \in \mathbb{N}$. Czy funkcja f jest różnowartościowa? Czy jest na $\mathsf{P}(\mathbb{N})$? Znaleźć $f^{-1}(\{[3]_r\})$ oraz $f(\mathbb{N} \times \mathbb{N} - r)$.
327. Niech $\mathcal{R}$ będzie niepustą rodziną relacji równoważności w zbiorze A taką, że dla dowolnych $r, s \in \mathcal{R}$ zachodzi $r \subseteq s$ lub $s \subseteq r$. Udowodnić, że $s = \bigcup \mathcal{R}$ jest relacją równoważności, oraz że $[a]_s = \bigcup_{r \in \mathcal{R}} [a]_r$, dla dowolnego $a \in A$.
328. Niech r_1, r_2 będą takimi relacjami równoważności w zbiorze A, że $r_1 \cap r_2 = id_A$ oraz $r_1 \cdot r_2 = A \times A$. Znaleźć bijekcję z $A/r_1 \times A/r_2$ do A.
329. Niech r_1, r_2 będą relacjami równoważności w zbiorze A. Czy z tego, że $A/r_1 = A/r_2$ wynika, że $r_1 = r_2$? Pokazać, że zbiór $\{u \subseteq A : \exists a \in A(u = [a]_{r_1} \cap [a]_{r_2})\}$ jest zbiorem klas abstrakcji pewnej relacji równoważności w zbiorze A. Co to za relacja?
330. Niech R i S będą relacjami równoważności w zbiorze $\mathbb{N}$ wszystkich liczb naturalnych i niech funkcja $f : \mathbb{N} \to \mathsf{P}(\mathbb{N})$ będzie taka, że $f(x) = [x]_R \cap [x]_S$, dla dowolnego $x \in \mathbb{N}$. Udowodnić, że f jest różnowartościowa wtedy i tylko wtedy gdy $R \cap S$ jest relacją identycznościową.
331. Niech rodzina $\mathcal{F} \subseteq \mathsf{P}(\mathbb{N})$ spełnia warunki (taką rodzinę nazywamy *filtrem*):
    (a) $\mathcal{F} \neq \varnothing$ oraz $\mathcal{F} \neq \mathsf{P}(\mathbb{N})$;
    (b) dla każdych $X, Y \in \mathcal{F}$ zachodzi $X \cap Y \in \mathcal{F}$;
    (c) dla każdego $X \in \mathcal{F}$ i każdego $Y \supseteq X$ zachodzi $Y \in \mathcal{F}$.

    Udowodnić, że relacja $r \subseteq \mathsf{P}(\mathbb{N}) \times \mathsf{P}(\mathbb{N})$ taka, że
    $$a\,r\,b \quad \Leftrightarrow \quad \exists f \in \mathcal{F}(a \cap f = b \cap f)$$
    jest relacją równoważności. Znaleźć klasę abstrakcji $[\mathbb{N}]_r$.
332. Niech $f : A \to B$, gdzie A, B są niepustymi zbiorami i niech r będzie relacją równoważności w zbiorze B. Określamy relację równoważności s w zbiorze A warunkiem:
    $$a \; s \; b \quad \text{wtedy i tylko wtedy gdy} \quad f(a) \; r \; f(b)$$
    Czy zawsze zachodzą inkluzje:
    (a) $f([a]_s) \subseteq [f(a)]_r$;
    (b) $[f(a)]_r \subseteq f([a]_s)$?
333. Niech $f : A \to B$. Dla dowolnej relacji r w zbiorze A, określamy relację r_f w zbiorze B:
    $$r_f = \{\langle f(x), f(y)\rangle \mid \langle x, y\rangle \in r\}.$$
    Czy jeśli r jest relacją równoważności, to r_f też jest relacją równoważności?

334. Niech $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Udowodnić, że f jest bijekcją wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej relacji równoważności r w $\mathbb{N}$, także r_f (zdefiniowana jak w zadaniu 333) jest relacją równoważności.

335. Niech $\mathcal{R}$ będzie zbiorem wszystkich relacji równoważności w $\mathbb{N}$ i niech $f : \mathcal{R} \to \mathsf{P}(\mathbb{N})$ będzie taka, że $f(r) = [1]_r$, dla dowolnego $r \in \mathcal{R}$. Znaleźć $\bigcup_{r\in\mathcal{R}} f(r)$ i $\bigcap_{r\in\mathcal{R}} f(r)$.

336. Niech $\mathcal{R}$ będzie jak w zadaniu 335 i niech $g : \mathcal{R} \to \mathsf{P}(\mathsf{P}(\mathbb{N}))$ będzie taka, że $g(r) = \mathbb{N}/_r$, dla dowolnego $r \in \mathcal{R}$. Znaleźć $\bigcup_{r\in\mathcal{R}} g(r)$ i $\bigcap_{r\in\mathcal{R}} g(r)$. Czy g jest różnowartościowa, czy jest „na”? Znaleźć $g(\mathcal{R})$ oraz $g^{-1}(\{Z \subseteq \mathsf{P}(\mathbb{N}) : \overline{\overline{Z}} = 1\})$ i $g^{-1}(\{\{Z \in \mathsf{P}(\mathbb{N}) : \overline{\overline{Z}} = 1\}\})$.

337. Niech $\mathcal{R}$ będzie jak w zadaniu 335 i niech $h : \mathcal{R} \to \mathsf{P}(\mathbb{N})$ będzie taka, że $h(r) = [0]_r \cap [1]_r$. Zbadać, czy h jest różnowartościowa, znaleźć $h(\mathcal{R})$ i przeciwobraz zbioru $\mathsf{P}(\mathbb{N}) - \{\varnothing\}$.

R338. Niech $Z \subseteq \mathbb{N}$. Określamy relację $R_Z \subseteq \mathsf{P}(\mathbb{N}) \times \mathsf{P}(\mathbb{N})$ następująco:

$$\langle X, Y\rangle \in R_Z \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } X \cup Z = Y \cup Z.$$

Niech $\mathcal{R}$ będzie zbiorem wszystkich relacji równoważności w $\mathsf{P}(\mathbb{N})$. Funkcja $f : \mathsf{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{R}$ jest określona warunkiem $f(Z) = R_Z$.

(a) Czy funkcja f jest różnowartościowa?
(b) Czy funkcja f jest na $\mathcal{R}$?
(c) Znaleźć $f^{-1}(\{\mathrm{id}_{\mathsf{P}(\mathbb{N})}\})$ i $f^{-1}(\{\mathsf{P}(\mathbb{N})^2\})$.

339. Niech r i s będą takimi relacjami równoważności w zbiorze A, że ich suma $r \cup s$ też jest relacją równoważności. Pokazać, że dla dowolnego $x \in A$:

$$[x]_{r\cup s} = \bigcup\{[y]_s : y \in [x]_r\}.$$

340. Udowodnić, że jeśli r_1, r_2 są relacjami równoważności w A, to

$$(r_1 \cdot r_2) = A \times A \iff (r_2 \cdot r_1) = A \times A.$$

341. Niech r będzie relacją w zbiorze $\mathbb{Q}$ liczb wymiernych, określoną tak: xry wtedy i tylko wtedy gdy $x = y \cdot t^2$, dla pewnej wymiernej liczby $t \neq 0$. Udowodnić, że to jest relacja równoważności, i że ma nieskończenie wiele klas abstrakcji.

R342. Ustalmy $k \in \mathbb{N} - \{0\}$. Określamy relacje $r_k, r \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ w następujący sposób:
$\langle x, y\rangle \in r_k$ wtedy i tylko wtedy, gdy x i y są parzyste i $x - y$ jest podzielne przez k;
$\langle x, y\rangle \in r$ wtedy i tylko wtedy, gdy x i y są nieparzyste oraz $x \cdot y > 0$.

(a) Udowodnić, że relacja $\rho_k = r_k \cup r$ jest relacją równoważności.
(b) Czy istnieje takie $x \in \mathbb{Z}$, że $[x]_{\rho_k}$ ma dokładnie k elementów?
(c) Ile elementów ma zbiór ilorazowy $\mathbb{Z}/_{\rho_k}$, gdy:
    i. $k = 4$?
    ii. $k = 3$?

R343. Niech $\varphi : (\mathbb{R} \to \mathbb{R}) \to \mathsf{P}(\mathbb{R})$ będzie określona tak: $\varphi(f) = f^{-1}(\mathbb{IQ})$.

(a) Czy $r = \{\langle f, g\rangle \mid \mathbb{Q} \subseteq \varphi(f) \cap \varphi(g)\}$ jest relacją równoważności w $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$?
(b) Czy $s = \{\langle f, g\rangle \mid \varphi(f) \times \varphi(g)$ *jest relacją równoważności w* $\mathbb{R}\}$ jest relacją równoważności w $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

R344. Niech $\Phi : (\mathbb{N} \to \mathbb{N}) \to (\mathsf{P}(\mathbb{N}) \to \mathsf{P}(\mathbb{N}))$ będzie taka, że

$$\Phi(f)(A) = f^{-1}(f(A)),$$

dla wszystkich $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ i $A \subseteq \mathbb{N}$.

(a) Czy funkcja Φ jest różnowartościowa?

(b) Czy funkcja Φ jest na zbiór $\mathsf{P}(\mathbb{N}) \to \mathsf{P}(\mathbb{N})$?
(c) Znaleźć przeciwobraz $\Phi^{-1}(\{\mathrm{id}_{\mathsf{P}(\mathbb{N})}\})$.
(d) Udowodnić, że dla dowolnego $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ istnieje taka relacja równoważności $r \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, że dla wszystkich $A \subseteq \mathbb{N}$ zachodzi
$$\Phi(f)(A) = \bigcup\{[a]_r \mid a \in A\}.$$

345. Załóżmy, że relacja $r \subseteq \mathcal{D} \times \mathcal{D}$ jest zwrotna. Niech
$$r^- = \{\langle x, y\rangle : \mathcal{D} \times \mathcal{D} \mid \forall z\,((x\,r\,z \leftrightarrow y\,r\,z) \wedge (z\,r\,x \leftrightarrow z\,r\,y))\}.$$
Pokazać, że r^- jest relacją równoważności oraz $r^- \subseteq r$. Udowodnić, że $r = r^-$ wtedy i tylko wtedy, gdy r jest relacją równoważności.

R346. Niech $\mathcal{R}$ oznacza rodzinę wszystkich relacji równoważności w zbiorze $\mathbb{N}$ liczb naturalnych i niech funkcja $F : \mathcal{R} \to (\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N})$ będzie dana wzorem
$$F(R)(m, n) = \min\{|x - y| \mid mRx \wedge yRn\}.$$
(a) Zbadać, czy funkcja F jest różnowartościowa i czy jest na $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.
(b) Które z następujących zbiorów są niepuste:
   i. Przeciwobraz zbioru wszystkich funkcji stałych;
   ii. Przeciwobraz zbioru wszystkich funkcji różnowartościowych;
   iii. Przeciwobraz zbioru wszystkich funkcji na $\mathbb{N}$?

347. Niech relacja równoważności $r \subseteq \mathbb{R}^2$ będzie taka, że:
$$\forall x \in \mathbb{R}(x \notin \mathbb{Q} \to \exists \varepsilon > 0\,((x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq [x]_r)).$$
Co można powiedzieć o mocy zbioru $\mathbb{R}/r$?

348. Czy istnieje taka relacja równoważności r w zbiorze $\mathbb{R}$, której każda klasa abstrakcji jest mocy $\aleph_0$, oraz
(a) $\overline{\overline{\mathbb{R}/r}} = \mathfrak{C}$?
(b) $\overline{\overline{\mathbb{R}/r}} = \aleph_0$?

349. Czy istnieje taka relacja równoważności r w zbiorze $\mathbb{R}$, której każda klasa abstrakcji jest mocy continuum, oraz $\mathbb{R}/r$ jest zbiorem (a) przeliczalnym? (b) nieprzeliczalnym?

350. Relacja równoważności R w zbiorze $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ jest określona następująco:
$$R = \{\langle f, g\rangle : \forall n(f(2n) = g(2n))\}.$$
Znaleźć moc zbioru wszystkich klas abstrakcji relacji R, oraz moc każdej klasy.

351. Niech $\mathcal{R}$ będzie zbiorem wszystkich relacji równoważności w zbiorze $\mathbb{N}$. Określamy relację równoważności ρ w zbiorze $\mathcal{R}$ warunkiem: $r_1\,\rho\,r_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy zbiory $\mathbb{N}/r_1$ i $\mathbb{N}/r_2$ są równoliczne. Znaleźć moc $\mathcal{R}/\rho$, oraz moc $[r]_\rho$, gdzie $m\,r\,n$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $2|mn(n + 1)$.

352. Niech r będzie relacją równoważności w zbiorze $\mathbb{Q}$ określoną tak: xry wtedy i tylko wtedy gdy $x^2 + y^2 \neq 0$ lub $xy = 0$. Znaleźć moc zbioru $\mathbb{Q}/r$ oraz moce klas abstrakcji.

R353. W zbiorze $\mathbb{R}[x]$ wszystkich wielomianów jednej zmiennej o współczynnikach rzeczywistych określamy relację równoważności r:
$$f\ r\ g \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad f - g \text{ jest funkcją liniową.}$$
Znaleźć moc zbioru ilorazowego relacji r i moc każdej klasy abstrakcji.

354. Pokazać że jeśli $\overline{\overline{A}} = \mathfrak{m}$ oraz $0 \neq \mathfrak{n} \leq \mathfrak{m}$, to istnieje relacja równoważności r w zbiorze A spełniająca warunek $\overline{\overline{A/r}} = \mathfrak{n}$.

R355. Niech $r \subseteq (\mathbb{N} \to \mathbb{N}) \times (\mathbb{N} \to \mathbb{N})$ będzie określona w następujacy sposób:

$$\langle f, g\rangle \in r \qquad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \qquad f(\mathbb{N}) = g(\mathbb{N}).$$

(a) Udowodnić jednym (krótkim!) zdaniem, że r jest relacją rownoważności.
(b) Znaleźć klasy $[\lambda x\, 1]_r$ i $[\mathrm{id}_{\mathbb{N}}]_r$.
(c) Czy zbiór wszystkich funkcji różnowartościowych jest klasą abstrakcji tej relacji?
(d) Czy istnieje dwuelementowa klasa abstrakcji?
(e) Czy iloraz $(\mathbb{N} \to \mathbb{N})/r$ jest skończony?

356. Niech $X \neq \varnothing$ będzie ustalonym zbiorem i niech $a \in X$ będzie ustalonym elementem. W zbiorze $\mathsf{P}(X)$ określamy następującą relację równoważności: $A \sim B$ wtedy i tylko wtedy gdy $A = B$ lub $a \notin A \cup B$. Zbadać moc $\mathsf{P}(X)/_\sim$, w zależności od mocy zbioru X.

357. W zbiorze $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ określamy relację równoważności r, przyjmując frg wtedy i tylko wtedy, gdy $f{\restriction}_{\mathbb{Q}} = g{\restriction}_{\mathbb{Q}}$. Ile klas abstrakcji ma relacja r i jakie są ich moce?

358. Dwa prostokąty na płaszczyźnie są w relacji r wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje przesunięcie przekształcające jeden na drugi. Ile klas abstrakcji ma relacja r i jakie są ich moce?

R359. Relacja równoważności r w zbiorze $\mathbb{N} - \{0\}$ jest określona tak:

$$\langle m, n\rangle \in r \iff m \text{ i } n \text{ mają te same dzielniki pierwsze.}$$

Ile klas abstrakcji ma relacja r i jakie są moce tych klas?

R360. Niech $\sim$ będzie relacją równoważności w zbiorze $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ określoną następująco:

$$f \sim g \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad \exists k \forall n.\, |f(n) - g(n)| \leq k.$$

Jaka jest moc zbioru $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}/_\sim$?

R361. Niech $f\colon \mathsf{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}$ będzie zadana wzorem

$$f(X) = \begin{cases} \min X, & \text{gdy } X \text{ nieskończony;} \\ \prod_{x \in X} x, & \text{gdy } X \text{ skończony,} \end{cases}$$

gdzie $\prod_{x\in X} x$ to iloczyn wszystkich elementów X. Jaka jest moc zbioru $A = \mathsf{P}(\mathbb{N})/_{\ker(f)}$?

R362. Niech $\mathcal{P}\mathrm{r}$ oznacza zbiór liczb naturalnych parzystych i niech $r \subseteq (\mathbb{N} \to \mathbb{N}) \times (\mathbb{N} \to \mathbb{N})$ będzie określona w następujacy sposób:

$$\langle f, g\rangle \in r \qquad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \qquad f^{-1}(\mathcal{P}\mathrm{r}) = g^{-1}(\mathcal{P}\mathrm{r}).$$

(a) Udowodnić jednym (krótkim!) zdaniem, że r jest relacją równoważności.
(b) Znaleźć klasy $[\lambda x\, 2]_r$ i $[\mathrm{id}_{\mathbb{N}}]_r$.
(c) Czy zbiór wszystkich funkcji „na $\mathbb{N}$” jest klasą abstrakcji tej relacji?
(d) Czy istnieje jednoelementowa klasa abstrakcji?

R363. Niech $R \subseteq \mathsf{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})^2$ będzie następującą relacją równoważności:

$$\langle r, s\rangle \in R \;\Leftrightarrow\; \exists \pi (\pi : \mathbb{N} \xrightarrow[\text{na}]{1-1} \mathbb{N} \;\wedge \forall x, y \in \mathbb{N}\, (\langle x, y\rangle \in r \leftrightarrow \langle \pi(x), \pi(y)\rangle \in s)).$$

Jakiej mocy jest zbiór $\mathsf{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})/_R$?

R364. W zbiorze $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})^{\mathbb{N}}$ określimy relację $\equiv$, przyjmując dla $\varphi_1, \varphi_2 \in (\mathbb{N} \times \mathbb{N})^{\mathbb{N}}$:

$$\varphi_1 \equiv \varphi_2 \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego } n \in \mathbb{N} \text{ zachodzi}$$
$$\pi_1(\varphi_1(n)) - \pi_2(\varphi_1(n)) = \pi_1(\varphi_2(n)) - \pi_2(\varphi_2(n)),$$

gdzie π_1, π_2 oznaczają rzutowanie odpowiednio na pierwszą i drugą współrzędną produktu, a odejmowanie $(-)$ przyjmuje wartości całkowite.

(a) Czy istnieje takie $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, że klasa $[\varphi]_\equiv$ jest skończona?
(b) Czy klasa $[\lambda n.\langle 0, n\rangle]_\equiv$ jest równoliczna z $\mathbb{N}^\mathbb{N}$?
(c) Czy klasa $[\lambda n.\langle 2011, 2011\rangle]_\equiv$ jest równoliczna z $\mathbb{N}$?
(d) Czy iloraz $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})^\mathbb{N}/_\equiv$ jest równoliczny z $\mathbb{N}^\mathbb{N}$?

$^\mathsf{R}$365. Zbiory $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$ są w relacji r wtedy i tylko wtedy, gdy różnica symetryczna $A \dot{-} B$ jest zawarta w pewnym kole.

(a) Udowodnić, że r jest relacją równoważności.
(b) Jakiej mocy są klasy abstrakcji relacji r?
(c) Jakiej mocy jest rodzina wszystkich klas abstrakcji relacji r?

$^\mathsf{R}$366. Niech $r \subseteq \mathsf{P}(\mathbb{N}) \times \mathsf{P}(\mathbb{N})$ będzie relacją określoną w następujący sposób:

$$X \, r \, Y \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \overline{\overline{X \cap \mathcal{P}\mathrm{r}}} = \overline{\overline{Y \cap \mathcal{P}\mathrm{r}}} \text{ i } \overline{\overline{X \cap \mathcal{N}\mathrm{p}}} = \overline{\overline{Y \cap \mathcal{N}\mathrm{p}}},$$

gdzie $\mathcal{P}\mathrm{r}$ i $\mathcal{N}\mathrm{p}$ oznaczają odpowiednio zbiór liczb parzystych i nieparzystych.

(a) Udowodnić, że r jest relacją równoważności.
(b) Jakie liczby kardynalne są mocami klas abstrakcji relacji r?
(c) Jaka jest moc zbioru ilorazowego relacji r?

$^\mathsf{R}$367. Niech $U = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q} \mid \forall n(f(n) \neq 0) \ \wedge \ \lim_{n\to\infty} f(n) = 0\}$. Określimy relację równoważności $\simeq$ w zbiorze U, przyjmując, że $f \simeq g$ wtedy i tylko wtedy, gdy granica $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)}$ istnieje i należy do $\mathbb{R} - \{0\}$.

(a) Czy klasa abstrakcji relacji $\simeq$ wyznaczona przez ciąg $\{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest równoliczna ze zbiorem liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$? Można skorzystać z faktu, że zbiór $\mathbb{Q}^\mathbb{N}$ jest równoliczny z $\mathbb{R}$.
(b) Czy każde dwie klasy abstrakcji relacji $\simeq$ są równoliczne?
(c)* Pokazać, że zbiór wszystkich klas abstrakcji relacji $\simeq$ jest równoliczny z $\mathbb{R}$.

$^\mathsf{R}$368. Dla każdego zbioru $A \subseteq \mathbb{N}$ określamy relację równoważności r_A w zbiorze $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tak:

$$\langle f, g\rangle \in r_A \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \forall n \in A.\, f(n) = g(n).$$

W zależności od wyboru zbioru A, jaka liczba kardynalna jest mocą zbioru ilorazowego tej relacji i jakie liczby kardynalne są mocami jej klas abstrakcji?

$^\mathsf{R}$369. Dla $A \subseteq \mathbb{R}$ definiujemy $r_A = \{\langle f, g\rangle \in (\mathbb{R} \to \mathbb{N}) \times (\mathbb{R} \to \mathbb{N}) \mid \forall x \in A.\, f(x) = g(x)\}$.

(a) Dlaczego wszystkie r_A są relacjami równoważności w $\mathbb{R} \to \mathbb{N}$?
(b) Udowodnić, że jeśli $\varnothing \neq \mathcal{S} \subseteq \mathsf{P}(\mathbb{R})$, to $r_{\bigcup \mathcal{S}} = \bigcap\{r_A \mid A \in \mathcal{S}\}$.
(c) Czy dla jakiegoś zbioru A relacja r_A ma dokładnie jedną klasę abstrakcji? Dokładnie sześć? Czy dla jakiegoś A zbiór $(\mathbb{R} \to \mathbb{N})/_{r_A}$ jest mocy $\aleph_0$?
(d) Czy dla jakiegoś zbioru A i jakiejś funkcji f, klasa $[f]_{r_A}$ jest jednoelementowa? Sześcioelementowa? Czy są takie A, f, że klasa $[f]_{r_A}$ jest mocy $\aleph_0$?
(e) Czy operacja $F = \lambda A.\, r_A$ jest różnowartościowa? Czy jest na zbiór wszystkich relacji równoważności w $\mathbb{R} \to \mathbb{N}$? Jeśli nie, to proszę podać przykład relacji, która nie należy do zbioru wartości funkcji F.

$^\mathsf{R}$370. Rozpatrzmy następujące relacje $\nearrow$ i $\equiv$ w zbiorze $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$:

$$f \nearrow g \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \forall n \in \mathbb{N}\, \exists m \in \mathbb{N}.\, f(n) \leq g(m),$$
$$f \equiv g \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } f \nearrow g \wedge g \nearrow f.$$

(a) Udowodnić, że $\equiv$ jest relacją równoważności.

(b) Jakiej mocy jest zbiór klas abstrakcji tej relacji równoważności?
(c) Jakie liczby kardynalne są mocami klas abstrakcji tej relacji równoważności?

R371. Niech $f, g : A \to A$ będą takimi funkcjami, że $f \circ g = g \circ f$. Rozpatrzmy relację $r = \{\langle x, y\rangle \in A \times A \mid \exists n, m \in \mathbb{N}.\, f^n(g^m(x)) = f^n(g^m(y))\}$.

(a) Udowodnić, że r jest relacją równoważności.
(b) Udowodnić, że $r = \mathbf{1}_A$ wtedy i tylko wtedy, gdy f i g są różnowartościowe.
(c) Czy w przypadku $A = \mathbb{N}$ można tak określić f i g, aby relacja r miała nieskończenie wiele nieskończonych klas abstrakcji?

R372. Niech $r \subseteq A \times A$ będzie taką relacją, że $\forall xyz\, [r(x, y) \wedge r(x, z) \to r(y, z)]$ i niech $s = r \cup r^{-1}$. Udowodnić, że:

(a) Suma $\mathbf{1}_A \cup (s \cdot s \cdot s)$ jest relacją równoważności.
(b) Jeśli r jest przechodnia, to $\mathbf{1}_A \cup (s \cdot s)$ jest relacją równoważności.
(c) Jeśli r jest symetryczna, to $\mathbf{1}_A \cup s$ jest relacją równoważności.

R373. Dla niepustego zbioru $Z \subseteq \mathbb{N}$, relacje $R_Z, S_Z \subseteq (\mathbb{N} \to \mathbb{N})^2$ są zdefiniowane następująco:

$$\langle f, g\rangle \in R_Z \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad \forall n \in Z(f(n) = g(n)),$$
$$\langle f, g\rangle \in S_Z \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad \exists n \in Z(f(n) = g(n)).$$

Dla jakich Z relacje R_Z, S_Z są relacjami równoważności?

R374. Niech $\mathcal{P}\mathrm{r}$ oznacza zbiór liczb parzystych, a R_Z, S_Z będą zdefiniowane jak w zadaniu 373. Dla każdej relacji równoważności r spośród $R_{\mathbb{N}}, S_{(\mathbb{N}-\{2011\})}, R_{\mathcal{P}\mathrm{r}}, S_{(\mathbb{N}-\mathcal{P}\mathrm{r})}$ należy odpowiedzieć na pytania:

(a) Jakie funkcje należą do $[\lambda n.n]_r$?
(b) Czy zbiór $(\mathbb{N} \to \mathbb{N})/_r$ jest skończony?
(c) Czy istnieje skończona klasa abstrakcji relacji r?
(d) Czy zbiór $A = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid f(2011) = 0\}$ jest klasą abstrakcji relacji r?

R375. Niech $\mathcal{R}$ oznacza zbiór wszystkich relacji równoważności w zbiorze liczb naturalnych $\mathbb{N}$. Dla dowolnej funkcji $S\colon \mathbb{N} \to \mathcal{R}$ zdefiniujmy relację

$$R_\infty(S) = \left\{\langle x, y\rangle \in \mathbb{N}^2 \mid \exists i \in \mathbb{N}.\ \forall j \geq i.\ \langle x, y\rangle \in S(j)\right\}.$$

Wykazać, że dla każdego $S\colon \mathbb{N} \to \mathcal{R}$ relacja $R_\infty(S)$ jest relacją równoważności.

R376. Niech X będzie dowolnym zbiorem, zaś $s \subseteq X \times X$ będzie relacją. Niech

$$r_s = s^* \cap (s^*)^{-1}.$$

(a) Czy dla każdych X, s relacja r_s jest relacją równoważności w X?
(b) Podać przykład takiej spójnej relacji s w zbiorze $X = \{0, 1, 2, 3\}$, że r_s jest relacją równoważności o dokładnie trzech klasach abstrakcji.

R377. Dla $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ piszemy $f \sim g$ jeżeli istnieje taka liczba $t \in \mathbb{R}$, że $f(x) = g(x)$, dla wszystkich $x > t$. Pokazać, że relacja $\sim$ jest relacją równoważności w zbiorze $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

R378. Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest *skokowa*, jeżeli istnieją takie liczby $t, a, b \in \mathbb{R}$, że

$$f(x) = \begin{cases} a, & \text{jeśli } x < t; \\ b, & \text{jeśli } x \geq t. \end{cases}$$

Niech S oznacza zbiór funkcji skokowych; zatem $S \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Niech $\sim_S$ oznacza obcięcie relacji $\sim$ z zadania 377 do zbioru S, tzn. $\sim_S = \sim \cap (S \times S)$. Wskazać bijekcję pomiędzy zbiorem klas abstrakcji relacji $\sim_S$ a zbiorem wszystkich liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$.

$^{\mathsf{R}}$379. Niech $R \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ będzie taka, że

$$fRg \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } f^{-1}(\{2013\}) = g^{-1}(\{2013\}).$$

(a) Udowodnić, że R jest relacją równoważności.
(b) Znaleźć $[\lambda x.2013]_R$.
(c) Czy zbiór $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}/_R$ jest skończony?
(d) Ile jest skończonych klas abstrakcji?

$^{\mathsf{R}}$380. Niech $\mathbb{N}_+ = \mathbb{N} - \{0\}$ oraz niech znak $|$ oznacza relację podzielności. Relację $\tau \subseteq \mathbb{N}_+ \times \mathbb{N}_+$ definiujemy kładąc:

$$\langle x, y\rangle \in \tau \textit{ wtedy i tylko wtedy, gdy } x \,|\, y \textit{ lub } y \,|\, x.$$

Kliką w tej relacji nazwiemy taki zbiór $A \subseteq \mathbb{N}_+$, że $A \times A \subseteq \tau$. Mówimy, że klika A jest kliką *maksymalną*, gdy dla dowolnej kliki B zachodzi implikacja $A \subseteq B \Rightarrow A = B$.

(a) Czy τ jest relacją równoważności?
(b) Znaleźć $\bigcup\{B \mid B \text{ jest kliką oraz } 2 \in B\}$. Czy jest to klika?
(c) Znaleźć przykład maksymalnej kliki, do której należy 2.

$^{\mathsf{R}}$381. Niech $\varepsilon \in \mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$. Relację $\tau_\varepsilon \subseteq \mathbb{R}^2$ definiujemy kładąc:

$$\langle x, y\rangle \in \tau_\varepsilon \Leftrightarrow |x - y| < \varepsilon\,.$$

Kliką w tej relacji nazwiemy taki zbiór $A \subseteq \mathbb{R}$, że $\forall a, b \in A\ \langle a, b\rangle \in \tau_\varepsilon$.

(a) Czy τ_ε jest relacją równoważności?
(b) Znaleźć $\bigcup\{B \mid B \text{ jest kliką oraz } 0 \in B\}$. Czy jest to klika? Czy jest to klika maksymalna? Podać przykład maksymalnej kliki, do której należy 0.
(c) Czy dla dowolnych ε_1 i ε_2 istnieje takie $\gamma \in \mathbb{R}_+$, iż $\tau_\gamma = \tau_{\varepsilon_1} \circ \tau_{\varepsilon_2}$?
(d) Dla jakich ε zachodzi $\langle \varepsilon, \sqrt{2}\rangle \in \tau_\varepsilon^+$?

$^{\mathsf{R}}$382. Niech $\mathcal{R}$ będzie rodziną wszystkich relacji równoważności w zbiorze $\mathbb{N}$ i niech funkcja $\varphi : \mathcal{R} \to (\mathsf{P}(\mathbb{N}) \to \mathsf{P}(\mathbb{N}))$ będzie określona następująco:

$$\varphi(r)(A) = \bigcup\{\, [x]_r \mid x \in A\}.$$

(a) Czy φ jest różnowartościowa?
(b) Czy φ jest na $\mathsf{P}(\mathbb{N}) \to \mathsf{P}(\mathbb{N})$?
(c) Udowodnić, że funkcja $\varphi(r)$ jest różnowartościowa wtedy i tylko wtedy, gdy $r = \mathbf{1}_{\mathbb{N}}$.
(d) Czy $\bigcup \mathrm{Rg}(\varphi(r))$ zależy od wyboru relacji r?

$^{\mathsf{R}}$383. Niech $\mathcal{R}$ będzie rodziną wszystkich relacji równoważności w zbiorze $\mathbb{R}$ i niech funkcja $\varphi : \mathcal{R} \to (\mathsf{P}(\mathbb{R}) \to \mathsf{P}(\mathbb{R}))$ będzie określona następująco:

$$\varphi(r)(A) = \bigcup\{\, [x]_r \mid x \in A \cap \mathbb{Q}\}.$$

(a) Czy φ jest różnowartościowa?
(b) Czy φ jest na $\mathsf{P}(\mathbb{R}) \to \mathsf{P}(\mathbb{R})$?
(c) Dla jakich $r \in \mathcal{R}$ funkcja $\varphi(r)$ jest różnowartościowa?
(d) Czy $\bigcup \mathrm{Rg}(\varphi(r))$ zależy od wyboru relacji r?

$^{\mathsf{R}}$384. Niech $\psi : \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \to \mathsf{P}(\mathsf{P}(\mathbb{R}))$ będzie określona tak: $\psi(g) = \{g^{-1}(\{x\}) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

(a) Wyznaczyć $\psi(\lambda x.\mathsf{if}\ x < 0\ \mathsf{then}\ {-1}\ \mathsf{else}\ 0)$.
(b) Czy ψ jest na $\mathsf{P}(\mathsf{P}(\mathbb{R}))$?
(c) Czy ψ jest różnowartościowa?

(d) Niech $r_g = \{\langle x, y\rangle \mid \exists S\,(S \in \psi(g) \wedge x \in S \wedge y \in S)\}$. Czy dla każdej funkcji g relacja r_g jest relacją równoważności?
(e) Wyznaczyć $\psi^{-1}(\{\{(-\infty, 0), [0, \infty), \varnothing\}\})$.

R385. Niech $\psi : \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \to \mathsf{P}(\mathsf{P}(\mathbb{R}))$ będzie określona tak: $\psi(g) = \{g^{-1}(\{x, y\}) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$.

(a) Wyznaczyć $\psi(\lambda x.\mathsf{if}\ x < 0\ \mathsf{then}\ -1\ \mathsf{else}\ 0)$.
(b) Czy ψ jest na $\mathsf{P}(\mathsf{P}(\mathbb{R}))$?
(c) Czy ψ jest różnowartościowa?
(d) Niech $r_g = \{\langle x, y\rangle \mid \exists S\,(S \in \psi(g) \wedge x \in S \wedge y \in S)\}$. Czy dla każdej funkcji g relacja r_g jest relacją równoważności?

386. Podać przykład dwóch relacji równoważności r i s w zbiorze $\mathbb{N}$ o własnościach:

- $r \cap s = \mathbf{1}_{\mathbb{N}}$;
- Złożenie $r \cdot s$ jest relacją równoważności;
- Ilorazy $\mathbb{N}/_r$ i $\mathbb{N}/_s$ są nieskończone;
- Wszystkie klasy abstrakcji obu relacji są nieskończone.

R387. W zbiorze $\mathsf{P}(\mathbb{N})$ określamy relację r w ten sposób, że zbiory A, B są w relacji r wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall x \in \mathbb{N}.\,((\exists y \in A.\, x \leq y) \leftrightarrow (\exists y \in B.\, x \leq y)).$$

(a) Udowodnić (możliwie najprościej), że jest to relacja równoważności w $\mathsf{P}(\mathbb{N})$.
(b) Jakiej mocy jest zbiór ilorazowy $\mathsf{P}(\mathbb{N})/_r$?
(c) Podać wszystkie liczby kardynalne, które są mocami klas abstrakcji tej relacji.

R388. W zbiorze $\mathsf{P}(\mathbb{N})$ określamy relację r w ten sposób, że zbiory A, B są w relacji r wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall x \in \mathbb{N}.\,((\forall y \in A.\, x \leq y) \leftrightarrow (\forall y \in B.\, x \leq y)).$$

(a) Udowodnić (jednym zdaniem), że jest to relacja równoważności w $\mathsf{P}(\mathbb{N})$.
(b) Jakiej mocy jest zbiór ilorazowy $\mathsf{P}(\mathbb{N})/_r$?
(c) Podać wszystkie liczby kardynalne, które są mocami klas abstrakcji relacji r.

R389. Niech $\sim$ będzie taką relacją w zbiorze $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, że $f \sim g$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy różnica $|f - g|$ jest ograniczona, tj. istnieje takie $M \in \mathbb{N}$, że $\forall n \in \mathbb{N}\, |f(n) - g(n)| \leq M$.

(a) Udowodnić, że $\sim$ jest relacją równoważności.
(b) Jakiej mocy jest zbiór ilorazowy $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}/_{\sim}$?
(c) Wskazać wszystkie liczby kardynalne, które są mocami klas abstrakcji tej relacji.

R390. W zbiorze $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiujemy relację $\sim$:

$$f \sim g \;\Leftrightarrow\; \forall x(f(x) = x \leftrightarrow g(x) = x)$$

(a) Uzasadnić (jak najzwięźlej), że $\sim$ jest relacją równoważności.
(b) Jakiej mocy jest zbiór ilorazowy $(\mathbb{N} \to \mathbb{N})/_{\sim}$?
(c) Podać wszystkie liczby kardynalne, które są mocami klas abstrakcji tej relacji.

R391. W zbiorze $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiujemy relację $\sim$:

$$f \sim g \quad \Leftrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N}.\, f(\{0, \ldots, n\}) = g(\{0, \ldots, n\}).$$

(a) Uzasadnić (jak najzwięźlej), że $\sim$ jest relacją równoważności.
(b) Jaką moc ma klasa abstrakcji funkcji $g = \lambda n.\mathsf{if}\ n = 3\ \mathsf{then}\ 1\ \mathsf{else}\ n$?

(c) Jaką moc ma klasa abstrakcji funkcji $h = \lambda n.\, n \bmod 2$?
(d) Jaka jest moc zbioru ilorazowego $(\mathbb{N} \to \mathbb{N})/_\sim$?
(e) Podać wszystkie liczby kardynalne, które są mocami klas abstrakcji relacji $\sim$.

Typy indukcyjne

R392. Udowodnić, że dla dowolnych liczb $m, k, l \in \mathbb{N}$:

(a) $m + (k + l) = (m + k) + l$;
(b) jeśli $m + k = m$ to $k = 0$;
(c) jeśli $k + l = 0$ to $k = 0$;
(d) $m + 0 = m$;
(e) $s(m) + k = m + s(k)$;
(f) $m + k = k + m$.

393. Udowodnić, że $w \subseteq v$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy

- $w = \varepsilon$, lub
- $w = aw'$, $v = av'$, dla pewnych w', v', oraz $w' \subseteq v'$, lub
- $w = bw'$, $v = bv'$, dla pewnych w', v', oraz $w' \subseteq v'$.

394. Niech $w \sqsubseteq v$ oznacza, że $v = u \cdot w$, dla pewnego u (porządek sufiksowy). Udowodnić, że dla dowolnego alfabetu A, relacja $\sqsubseteq$ jest porządkiem częściowym w A^*. Pokazać, że $w \sqsubseteq v$ wtedy i tylko wtedy, gdy albo $w = v$ albo $v = av'$, gdzie $a \in A$ oraz $w \sqsubseteq v'$.

395. Udowodnić, że nie istnieje takie słowo w, że $a \cdot w = w \cdot b$.

396. Suma prosta $\mathcal{D} \oplus \mathcal{E}$ może być uważana za typ indukcyjny. Jakie są tu konstruktory i jaka zasada indukcji? A schemat definiowania przez indukcję?

397. Typ jednostkowy Unit ma tylko jeden element $\bullet$. Czy Unit można uważać za typ indukcyjny? Skonstruować z niego typy skończone o dowolnej liczbie elementów.

398. Zdefiniować przez indukcję operację $\lambda w. w^R$ odwracania słowa (tak aby na przykład $(baba)^R = abab$). Udowodnić przez indukcję, że $(w^R)^R = w$, dla dowolnego słowa w.

399. Zdefiniować przez indukcję następujące operacje na listach:

(a) Dopisanie liczby n na końcu listy;
(b) Usunięcie ostatniego elementu listy;
(c) Odwracanie listy, itp.

400. Typ wartości logicznych Bool można utożsamiać z sumę prostą Unit$\oplus$Unit a zatem za typ indukcyjny. Uogólnić tę obserwację na typy skończone o dowolnej liczbie argumentów. Sformułować dla takich typów zasadę indukcji i schemat definiowania przez indukcję.

401. *Skończone drzewa binarne* to elementy typu indukcyjnego z jednym konstruktorem dwuargumentowym $^\wedge$ i jedną stałą $\circ$. Sformułować dla tego typu zasadę indukcji i schemat definiowania przez indukcję. Zastosować ten schemat do definiowania takich funkcji jak „lewe poddrzewo drzewa t", „liczba wierzchołków drzewa t", „wysokość drzewa t" itd.

402. Zdefiniować typ indukcyjny skończonych drzew binarnych etykietowanych liczbami naturalnymi, sformułować dla tego typu zasadę indukcji i schemat definiowania przez indukcję. Zdefiniować funkcję „suma etykiet drzewa t".

Porządki częściowe

403. W zbiorze $\{2,3,4,5,6,8,9,12,24\}$, uporządkowanym częściowo przez relację podzielności ($m \preceq n$ wtedy i tylko wtedy gdy $n = m \cdot k$, dla pewnego k) wskazać wszystkie elementy minimalne, maksymalne, największe i najmniejsze. Czy istnieją w tym zbiorze trzyelementowe łańcuchy lub antyłańcuchy?

404. Wskazać elementy minimalne, maksymalne, największe i najmniejsze w zbiorze
$$\{\{1,2,3,4,6\},\{3\},\{1,2,3,4,5\},\{2,3,3,5,2\},\{3,4,2,4,1\},\{2,1,2,2,1\},\{2,1,2,1\}\},$$
uporządkowanym przez inkluzję.

405. Zbiór częściowo uporządkowany nazywamy *kratą*, gdy każdy jego dwuelementowy podzbiór ma kres górny i kres dolny. Czy zbiór z zadania 404 jest kratą?

406. Podać przykład zbioru częściowo uporządkowanego z dwoma elementami maksymalnymi i jednym minimalnym, bez elementu najmniejszego i z takim czteroelementowym antyłańcuchem, który jest ograniczony z góry, ale nie ma kresu górnego.

407. Jakiej mocy jest zbiór wszystkich porządków częściowych w $\mathbb{N}$?

408. Czy częściowy porządek może być relacją równoważności?

409. W zbiorze $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ wszystkich funkcji z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{N}$ określono relację $\preceq$ w ten sposób, że
$$f \preceq g \quad \Leftrightarrow \quad \forall n.\, f(n) \leq g(n).$$
Udowodnić, że $\preceq$ jest częściowym porządkiem. Wskazać wszystkie elementy minimalne, najmniejsze, maksymalne, największe. Podać przykład nieskończonego łańcucha i nieskończonego antyłańcucha. Czy jest to porządek liniowy? Czy jest gęsty?

410. W zbiorze $\mathbb{N} \multimap\!\!\to \mathbb{N}$ wszystkich funkcji częściowych z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{N}$ określono relacje $\sqsubseteq$ i $\trianglelefteq$:
    (a) $f \trianglelefteq g$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\forall x(x \in \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g) \to f(x) \leq g(x))$.
    (b) $f \sqsubseteq g$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathrm{Dom}(f) \subseteq \mathrm{Dom}(g)$ oraz $g|_{\mathrm{Dom}(f)} = f$.

    Która z tych relacji jest porządkiem częściowym?

R411. Rozpatrzmy porządek częściowy $\langle \mathsf{P}(\mathbb{N})^{\mathbb{N}}, \leq \rangle$, gdzie
$$f \leq f' \qquad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \qquad \forall n.\, f(n) \subseteq f'(n).$$
    (a) Wskazać elementy wyróżnione (minimalne, maksymalne, największy, najmniejszy).
    (b) Czy ten porządek jest liniowy?
    (c) Czy ten porządek jest kratą zupełną?

R412. Zbiór $X \subseteq A$ jest łańcuchem maksymalnym w częściowo uporządkowanym zbiorze A i ma w A ograniczenie górne x. Czy z tego wynika, że:
    (a) $x \in X$?
    (b) x jest elementem maksymalnym w A?
    (c) x jest elementem największym w A?
    (d) x jest elementem największym w X?

413. Jeśli $\leq$ jest częściowym porządkiem w zbiorze A to relację $<$ nazywamy *ostrym uporządkowaniem* wyznaczonym przez $\leq$. Pokazać, że ostre uporządkowania wyznaczone przez porządki częściowe to dokładnie te relacje, które są przechodnie i przeciwzwrotne.

414. Udowodnić, że jeśli zbiór skierowany ma element maksymalny, to jest ograniczony z góry.

415. Czy zbiór A złożony ze wszystkich słów nad alfabetem $\{0,1\}$, które mają tyle samo zer co jedynek, ma kres górny (dolny) w porządku leksykograficznym? A zbiory $B = A - \{\varepsilon\}$

i $C = \{0,1\}^* - A$?

416. Czy zbiory $\{01^n : n \in \mathbb{N}\}$ i $\{0^n 1 : n \in \mathbb{N}\}$ mają kresy górne (dolne) w zbiorze $\{0,1\}^*$ uporządkowanym leksykograficznie?

417. Które z następujacych stwierdzeń są prawdziwe dla dowolnego porządku $\langle X, \leq \rangle$ i dowolnych $A, B \subseteq X$? A jeśli ten porządek jest liniowy?
   (a) Jeśli istnieje $\sup(A \cup B)$, to istnieją $\sup A$ i $\sup B$?
   (b) Jeśli istnieją $\sup A$ i $\sup B$, to istnieje $\sup(A \cup B)$?
   (c) Jeśli istnieją $\sup A$, $\sup B$ i $\sup(A \cup B)$, to $\sup(A \cup B) = \sup\{\sup A, \sup B\}$?

R418. Niech $\mathcal{P}$r i $\mathcal{N}$p oznacza odpowiednio zbiór wszystkich liczb naturalnych parzystych i zbiór wszystkich liczb naturalnych nieparzystych. Określamy porządek częściowy $\sqsubseteq$ w zbiorze $\mathsf{P}(\mathbb{N})$, przyjmując dla $A, B \subseteq \mathbb{N}$, że:

$$A \sqsubseteq B, \qquad \text{wtw, gdy} \qquad A \cap \mathcal{N}\mathrm{p} = B \cap \mathcal{N}\mathrm{p} \ \text{ oraz } \ A \cap \mathcal{P}\mathrm{r} \subseteq B \cap \mathcal{P}\mathrm{r}.$$

   (a) Wskazać wszystkie elementy minimalne, maksymalne, największe i najmniejsze w porządku $\sqsubseteq$. Czy istnieje w tym porządku nieprzeliczalny antyłańcuch?
   (b) Czy każda skończona rodzina zbiorów ma kres górny w tym porządku?
   (c) Czy każda niepusta rodzina zbiorów ograniczona z góry w tym porządku ma w nim kres górny?
   (d) Czy istnieje taki podzbiór $V \subseteq \mathsf{P}(\mathbb{N})$, że $\langle V, \sqsubseteq \rangle$ jest izomorficzny z $\langle \{a,b\}^*, \subseteq \rangle$, gdzie $\subseteq$ oznacza porządek prefiksowy?

419. Udowodnić, że każdy skończony porządek częściowy jest izomorficzny z pewnym podzbiorem $\mathbb{N}$ uporządkowanym przez relację podzielności.

R420. Niech P oznacza zbiór wszystkich liczb pierwszych. Dla $x, y \in \mathbb{N}$ niech

$$x \preceq y \quad \Leftrightarrow \quad (x = y) \ \vee \ \exists p \in P \ \exists a, b \in \mathbb{N} \, (x = p^a \wedge y = p^b \wedge a < b).$$

Rozważmy częściowe porządki $\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}, \preceq \rangle$ i $\mathcal{W} = \langle \{a,b\}^*, \subseteq \rangle$, gdzie relacja $\subseteq$ to porządek prefiksowy.
   (a) Wskazać wszystkie elementy największe, najmniejsze, maksymalne i minimalne w porządkach $\mathcal{N}$ i $\mathcal{W}$.
   (b) Czy istnieje taki podzbiór $V \subseteq \{a,b\}^*$, że $\langle V, \subseteq \rangle$ jest izomorficzny z $\mathcal{N}$?
   (c) Czy istnieje taki podzbiór $M \subseteq \mathbb{N}$, że $\langle M, \preceq \rangle$ jest izomorficzny z $\mathcal{W}$?
   (d) Które z porządków $\mathcal{N}$, $\mathcal{W}$, $\langle \mathbb{N}, \succeq \rangle$, $\langle \{a,b\}^*, \supseteq \rangle$ są dobrze ufundowane?

421. Niech r będzie relacją częściowego porządku w zbiorze A. Udowodnić, że jeśli $r \cup r^{-1}$ jest relacją przechodnią, to każdy skierowany podzbiór zbioru A jest łańcuchem.

R422. W zbiorze $\mathsf{P}(\mathbb{N} - \{0\}) - \{\varnothing\}$ określamy relację $\sqsubseteq$ w ten sposób:

$$A \sqsubseteq B \quad \leftrightarrow \quad A = B \ \vee \ \forall xy \, (x \in A \wedge y \in B \to x \,|\, y).$$

   (a) Udowodnić, że $\sqsubseteq$ jest relacją porządku częściowego w $\mathsf{P}(\mathbb{N} - \{0\}) - \{\varnothing\}$.
   (b) Niech $A, B \subseteq \mathbb{N} - \{0\}$ będą niepustymi skończonymi zbiorami. Czy rodzina $\{A, B\}$ ma kres górny w porządku $\sqsubseteq$?
   (c) Niech $\mathcal{R} = \{\{2^n, 2^{n+2}\} \mid n \geq 2\}$. Czy rodzina $\mathcal{R}$ ma kres dolny w tym porządku?
   (d) Czy każda niepusta rodzina zbiorów ma kres dolny w tym porządku?
   (e) Czy ten porządek jest kratą zupełną?

R423. W zbiorze $\mathsf{P}(\mathbb{N} - \{0\}) - \{\varnothing\}$ określamy relację $\sqsubseteq$ w ten sposób, że dla $A, B \subseteq \mathbb{N}$:

$$A \sqsubseteq B \quad \leftrightarrow \quad A \subseteq B \ \wedge \ \forall y \in B \ \exists x \in A. \ x \,|\, y.$$

(a) Udowodnić, że $\sqsubseteq$ jest relacją porządku częściowego w $\mathsf{P}(\mathbb{N} - \{0\}) - \{\varnothing\}$.
(b) Czy każda rodzina $\{A, B\}$ ma kres dolny w porządku $\sqsubseteq$?
(c) Czy każda rodzina $\{A, B\}$ ma kres górny w porządku $\sqsubseteq$?
(d) Czy każdy niepusty łańcuch w tym porządku ma kres górny?

R424. Niech $\mathbb{N}_+$ oznacza $\mathbb{N} - \{0\}$. Czy każdy właściwy podzbiór $\mathbb{N}_+$ ma kres górny w porządku $\langle \mathbb{N}_+, \mid \rangle$, gdzie znak $\mid$ oznacza relację podzielności? A czy każdy podzbiór ma kres dolny?

R425. Udowodnić, że jeśli w porządku częściowym każdy podzbiór dwuelementowy ma kres górny, to każdy niepusty podzbiór skończony ma kres górny.

R426. Dla dowolnego $X \subseteq \mathbb{R}$ przyjmujemy $a \preceq_X b$ wtedy i tylko wtedy, gdy $b - a \in X$. Zbiory X, dla których relacja $\preceq_X$ jest częściowym porządkiem w $\mathcal{R}$, nazywamy *porządnymi.* Które z poniższych zbiorów są porządne:

(a) $\mathbb{N}$?
(b) $[1, \infty)$?
(c) $\mathbb{Q} \cap (-\infty, 0]$?
(d) $\{n + q \mid n \in \mathbb{N} \wedge q \in \mathbb{Q} \cap (-\infty, 0]\}$?
(e) $\{n + q\pi \mid n \in \mathbb{N} \wedge q \in \mathbb{Q} \cap (-\infty, 0]\}$?
(f) $(\,[0, \infty) - \mathbb{Q}\,) \cup \{0\}$?

R427. Przy definicjach z zadania 426, które z następujących stwierdzeń są prawdziwe dla dowolnego porządnego X?

(a) Porządek $\langle \mathbb{R}, \preceq_X \rangle$ nie ma elementu największego.
(b) Porządek $\langle \mathbb{R}, \preceq_X \rangle$ nie ma elementu minimalnego.
(c) $\forall a : \mathbb{R}\, \forall B : \mathsf{P}(\mathbb{R})\, \big(a = \sup_{\preceq_X} B \leftrightarrow a + 1 = \sup_{\preceq_X} \{b + 1 \mid b \in B\}\big)$
(d) W porządku $\langle \mathbb{R}, \preceq_X \rangle$ każdy podzbiór skierowany jest łańcuchem.
(e) Porządek $\langle \mathcal{R}, \preceq_X \rangle$ jest liniowy wtedy i tylko wtedy, gdy pewien otwarty przedział liczb rzeczywistych jest łańcuchem w $\langle \mathcal{R}, \preceq_X \rangle$.

428. Niech $\langle X, r \rangle$ i $\langle Y, s \rangle$ będą niepustymi zbiorami częściowo uporządkowanymi. Pokazać, że:

(a) $\langle X \oplus Y, r \oplus s \rangle$ jest zbiorem częściowo uporządkowanym bez elementu największego.
(b) Dla dowolnego $a \in X \oplus Y$, element a jest minimalny w $\langle X \oplus Y, r \oplus s \rangle$ wtedy i tylko wtedy gdy jest elementem minimalnym w $\langle X, r \rangle$ lub w $\langle Y, s \rangle$.

R429. Drzewo słów A nad alfabetem $\mathbb{N}$ jest *poddrzewem* drzewa B nad $\mathbb{N}$, co oznaczamy przez $A \preceq B$, wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje takie $w \in B$, że $A = \{u \in \mathbb{N}^* \mid wu \in B\}$. Rozważamy zbiór $\mathcal{C}$ wszystkich skończonych drzew nad $\mathbb{N}$ z relacją $\preceq$.

(a) Czy jest to zbiór częściowo uporządkowany?
(b) Czy jest to zbiór liniowo uporządkowany? Jeśli nie, to czy ma nieskończony antyłańcuch?
(c) Czy istnieje element najmniejszy? A elementy minimalne?

430. Relację zwrotną i przechodnią nazywamy *quasiporządkiem.* Pokazać, że jeśli r jest quasiporządkiem w zbiorze A, to iloczyn $\overline{r} = r \cap r^{-1}$ jest relacją równoważności, a relacja $\leq$ dana warunkiem „$[a]_{\overline{r}} \leq [b]_{\overline{r}}$, *wtedy i tylko wtedy, gdy* $a\, r\, b$”, jest dobrze określona i jest porządkiem częściowym w zbiorze ilorazowym $A/_{\overline{r}}$. Czy jeśli $\overline{r}_1 = \overline{r}_2$, to $r_1 = r_2$?

R431. Niech A i B będą zbiorami częściowo uporządkowanymi i niech funkcje $f : A \to B$ oraz $g : B \to A$ będą monotoniczne. Udowodnić, że następujące warunki są równoważne:

(a) $\forall a{\in}A \forall b{\in}B (a \leq g(b) \leftrightarrow f(a) \leq b)$;
(b) $\forall a{\in}A (a \leq g(f(a)))$ oraz $\forall b{\in}B (f(g(b)) \leq b)$.

432. Niech $\langle D, \leq\rangle$ będzie skończonym zbiorem częściowo uporządkowanym z elementem największym i najmniejszym. Dla $a, b \in D$ stosujemy oznaczenia:
$$(a,b) = \{d \in D \,:\, a < d < b\}; \qquad [a,b] = \{d \in D \,:\, a \leq d \leq b\}.$$
Załóżmy, że dla dowolnych $a, b \in D$, jeśli $(a,b) \neq \varnothing$ to $(a,b) = [c,d]$, dla pewnych c, d (tj. że każdy „przedział otwarty” jest też „przedziałem domkniętym”). Udowodnić, że wtedy porządek $\langle D, \leq\rangle$ jest liniowy. Czy założenie skończoności jest istotne?

433. Niech r będzie częściowym porządkiem w zbiorze A i niech $f : A \xrightarrow[\text{na}]{1-1} A$. Rozpatrzmy funkcję $g : A \times A \to A \times A$, określoną tak: $g(x,y) = \langle f(x), f(y)\rangle$. Udowodnić, że:

(a) $g(r) \subseteq r$, wtedy i tylko wtedy, gdy f jest monotoniczna ze względu na porządek r.
(b) $r \subseteq g(r)$, wtedy i tylko wtedy, gdy $\forall x, y (f(x)\, r\, f(y) \to x\, r\, y)$.

Czy założenie, że f jest bijekcją jest istotne?

R434. Niech $\langle A, \leq\rangle$ będzie skończonym częściowym porządkiem i niech $f : A \xrightarrow[\text{na}]{1-1} A$ będzie monotoniczną bijekcją. Udowodnić, że f jest izomorfizmem porządkowym, tj. że:
$$\forall a, b \in A\, (a \leq b \leftrightarrow f(a) \leq f(b)).$$

435. Niech $\langle A, \leq\rangle$ będzie zbiorem częściowo uporządkowanym. Czy każdy izomorfizm porządkowy $F : A \to A$ jest funkcją identycznościową? Jak zmieni się odpowiedź, jeśli:
(a) zbiór A jest uporządkowany liniowo? (b) zbiór A jest skończony? (c) zbiór A jest skończony i uporządkowany liniowo?

436. Ile jest relacji równoważności w $\mathbb{N}$, które są jednocześnie częściowymi porządkami?

437. Niech X będzie zbiorem częściowo uporządkowanym i niech $A \subseteq X$ nie ma elementu największego. Niech $B = \{b \in X : \forall a \in A (b > a)\}$. Pokazać, że jeśli istnieje $\inf(B)$, to istnieje $\sup(A)$ oraz $\sup(A) = \inf(B) \in B$.

R438. Niech $\langle A, \leq\rangle$ będzie porządkiem częściowym. Zbiór $X \subseteq A$ nazwiemy *współkońcowym* gdy $\forall a{\in}A\, \exists x{\in}X.\, a \leq x$. Które z następujących stwierdzeń zachodzą dla wszystkich częściowych porządków $\langle A, \leq\rangle$?

(a) Suma każdych dwóch zbiorów współkońcowych jest zbiorem współkońcowym.
(b) Przecięcie każdych dwóch zbiorów współkońcowych jest zbiorem współkońcowym.
(c) Jeśli w A istnieje ograniczony z góry łańcuch współkońcowy, to w A istnieje element największy.
(d) Jeśli każdy łańcuch współkońcowy w A jest ograniczony z góry, to w A istnieje element największy.
(e) Jeśli A jest zbiorem skierowanym i nie ma elementu maksymalnego, to każdy łańcuch nieograniczony z góry jest współkońcowy.

439. Czy każdy zbiór skierowany ma współkońcowy łańcuch? (Por. zad. 438.)

R440. Niech $\langle A, \leq\rangle$ będzie porządkiem częściowym. Dla dowolnego zbioru $X \subseteq A$ przyjmujemy oznaczenie $X{\downarrow} = \{a \in A \mid \exists x \in X.\, a \leq x\}$.

(a) Czy jeśli $\mathcal{R} \neq \varnothing$ jest łańcuchem podzbiorów A, to $\bigcap\{X{\downarrow} \mid X \in \mathcal{R}\} = (\bigcap \mathcal{R}){\downarrow}$?

Niech teraz $X, Y \subseteq A$ i niech $S \subseteq A$ będzie zbiorem skierowanym.
(b) Udowodnić, że jeśli $S \subseteq (X \cup Y){\downarrow}$, to $S \subseteq X{\downarrow}$ lub $S \subseteq Y{\downarrow}$.

(c) Czy jeśli $S \subseteq X{\downarrow}$ i $S \subseteq Y{\downarrow}$, to $S \subseteq (X \cap Y){\downarrow}$?

$^{\mathsf{R}}$441. Niech $L = \{-\frac{1}{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$ oraz $M = L \cup \mathbb{N}$. Rozpatrzmy porządek $\langle M^{\mathbb{N}}, \leq\rangle$, gdzie

$$f \leq f' \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad \forall n.\, f(n) \leq f'(n).$$

(a) Wskazać elementy wyróżnione (minimalne, maksymalne, największy, najmniejszy).
(b) Czy ten porządek jest liniowy?
(c) Czy każdy niepusty podzbiór $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ma kres dolny i górny w $M^{\mathbb{N}}$?
(d) Czy każdy niepusty podzbiór $L^{\mathbb{N}}$ ma kres górny i dolny w $M^{\mathbb{N}}$?
(e) Czy ten porządek jest dobrze ufundowany?
(f) Czy w porządku $M^{\mathbb{N}}$ istnieje nieskończony łańcuch?
(g) Czy w porządku $M^{\mathbb{N}}$ istnieje nieskończony antyłańcuch?

$^{\mathsf{R}}$442. Niech $\langle X, \leq_X\rangle$ i $\langle Y, \leq_Y\rangle$ będą częściowymi porządkami i niech $Z = X \cap Y$. Wówczas relacja $\leq_Z = \leq_X \cap \leq_Y$ jest częściowym porządkiem w zbiorze Z. Które z następujących stwierdzeń są prawdziwe?

(a) Jeśli porządek $\langle Z, \leq_Z\rangle$ jest liniowy, to $\langle X, \leq_X\rangle$ i $\langle Y, \leq_Y\rangle$ są liniowe.
(b) Jeśli porządki $\langle X, \leq_X\rangle$ i $\langle Y, \leq_Y\rangle$ są liniowe, to $\langle Z, \leq_Z\rangle$ jest liniowy.
(c) Jeśli zbiór $A \subseteq Z$ ma kres dolny w porządku $\langle Z, \leq_Z\rangle$, to ma kres dolny w porządku $\langle X, \leq_X\rangle$ lub w porządku $\langle Y, \leq_Y\rangle$.
(d) Niech $A \subseteq X$ i $B \subseteq Y$ i niech $a \in X \cap Y$ będzie takie, że $a = \sup_X A = \sup_Y B$ (zbiory A i B mają ten sam kres górny odpowiednio w $\langle X, \leq_X\rangle$ i $\langle Y, \leq_Y\rangle$). Wówczas $a = \sup_Z A \cap B$ (tj. a jest kresem górnym iloczynu $A \cap B$ w zbiorze Z.)

$^{\mathsf{R}}$443. W iloczynie kartezjańskim $(\mathbb{N} \to \mathbb{N}) \times (\mathbb{N} \to \mathbb{N})$ określamy relację $\preceq$, przyjmując, że:

$$\langle f_1, f_2\rangle \preceq \langle g_1, g_2\rangle \quad \Leftrightarrow \quad \forall n{:}\mathbb{N}.\, 2^{f_1(n)} \cdot 3^{f_2(n)} \leq 2^{g_1(n)} \cdot 3^{g_2(n)}.$$

(a) Udowodnić, że $\preceq$ jest relacją częściowego porządku w $(\mathbb{N} \to \mathbb{N}) \times (\mathbb{N} \to \mathbb{N})$.
(b) Wskazać, o ile istnieją, elementy minimalne, maksymalne, element największy, najmniejszy.
(c) Pokazać, że ten porządek jest kratą, tj. każdy zbiór dwuelementowy ma kres górny i kres dolny.
(d) Wskazać przykład nieskończonego łańcucha, do którego należy para $\langle \lambda x.\, 0, \mathrm{id}_{\mathbb{N}}\rangle$.
(e) Wskazać przykład nieskończonego antyłańcucha, do którego należy para $\langle \lambda x.\, 0, \mathrm{id}_{\mathbb{N}}\rangle$.

$^{\mathsf{R}}$444. Zbiór B jest uporządkowany częściowo przez relację $\leq_B$, a funkcja $F : A \xrightarrow{\text{na}} B$ jest surjekcją. Określamy relację $\leq_A$ w zbiorze A, przyjmując dla $x, y \in A$, że $x \leq_A y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = y$ lub $F(x) <_B F(y)$.

(a) Udowodnić, że relacja $\leq_A$ jest częściowym porządkiem w A.
(b) Udowodnić, że porządek $\leq_A$ jest liniowy wtedy i tylko wtedy, gdy porządek $\leq_B$ jest liniowy oraz F jest bijekcją.
(c) Niech $X \subseteq B$. Czy jeśli w zbiorze B istnieje $\sup X$, to w zbiorze A istnieje $\sup F^{-1}(X)$?
(d) A czy jeśli w zbiorze A istnieje $\sup F^{-1}(X)$, to w zbiorze B istnieje $\sup X$?

$^{\mathsf{R}}$445. Dany jest następujący porządek częściowy w zbiorze $\mathsf{P}(\mathbb{N}) - \{\varnothing\}$:

$$X \leq Y \quad \Leftrightarrow \quad (\min(X) < \min(Y)) \vee ((\min(X) = \min(Y)) \wedge X \subseteq Y).$$

(a) Czy ten porządek jest liniowy?
(b) Czy ten porządek jest dobrze ufundowany?

(c) Wskaż w nim elementy minimalne, maksymalne, najmniejsze, największe.
(d) Czy ten porządek jest kratą zupełną?

R446. Podzbiór B częściowo uporządkowanego zbioru $\langle A, \leq\rangle$ nazywamy *podstawą* zbioru A, gdy dla dowolnego elementu $a \in A$ istnieje takie $b \in B$, że $a \geq b$. Podstawa jest *minimalna*, gdy jest elementem minimalnym rodziny wszystkich podstaw, uporządkowanej przez inkluzję.

(a) Udowodnić, że podstawa jest minimalna wtedy i tylko wtedy, gdy jest antyłańcuchem. Czy każdy antyłańcuch jest podstawą?
(b) Czy każdy zbiór częściowo uporządkowany ma minimalną podstawę?

R447. Dla dowolnej rodziny $\mathcal{S} \subseteq \mathsf{P}(\mathbb{N}) - \{\varnothing\}$ określamy relację $\preceq_{\mathcal{S}}$ w $\mathcal{S}$, przyjmując, że

$$A \preceq_{\mathcal{S}} B \qquad \Leftrightarrow \qquad \overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}} \ \vee\ (\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}} \wedge \min A \leq \min B).$$

Które z następujących stwierdzeń są prawdziwe?

(a) Jeśli rodzina $\mathcal{S}$ jest przeliczalna, to $\preceq_{\mathcal{S}}$ jest częściowym porządkiem.
(b) Jeśli $\preceq_{\mathcal{S}}$ jest częściowym porządkiem, to rodzina $\mathcal{S}$ jest przeliczalna.
(c) Jeśli $\mathcal{S}$ jest podziałem zbioru $\mathbb{N}$, to $\preceq_{\mathcal{S}}$ jest częściowym porządkiem.
(d) Jeśli $\preceq_{\mathcal{S}}$ jest częściowym porządkiem, to jest dobrym porządkiem.

R448. Niech $\leq_A$ będzie porządkiem częściowym w zbiorze A, a $\leq_B$ porządkiem liniowym w zbiorze B. Wtedy $\leq_B$*-podniesieniem* porządku $\leq_A$ nazwiemy relację $\preccurlyeq_A^B$ w zbiorze A^B zdefiniowaną następująco:

$$f \preccurlyeq_A^B g \iff f = g \vee \exists b \in B\big(f(b) <_A g(b) \wedge \forall b' <_B b.\, f(b') = g(b')\big).$$

(a) Czy podniesienie porządku częściowego zawsze jest porządkiem częściowym?
(b) Czy podniesienie porządku liniowego zawsze jest porządkiem liniowym?
(c) Niech $\leq$ będzie zwykłym porządkiem na $\mathbb{N}$. Pokazać, że $\leq$-podniesienie porządku $\subseteq$ na zbiorze $\{\varnothing, \{0\}, \{1\}\}$ jest porządkiem częściowym. Wskazać elementy maksymalne, minimalne, największe i najmniejsze.
(d) Dla porządku z części (c) podać przykład nieskończonego łańcucha i nieskończonego antyłańcucha.

R449. W zbiorze $\mathsf{P}(\mathbb{N})$ określamy relację $\sqsubseteq$, przyjmując, że $A \sqsubseteq B$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $B = A \cup S$ dla pewnego skończonego zbioru S.

(a) Udowodnić, że $\sqsubseteq$ jest częściowym porządkiem w $\mathsf{P}(\mathbb{N})$.
(b) Czy w zbiorze uporządkowanym $\langle \mathsf{P}(\mathbb{N}), \sqsubseteq\rangle$ istnieje element najmniejszy? A element największy?
(c) Czy porządek $\langle \mathsf{P}(\mathbb{N}), \sqsubseteq\rangle$ jest dobrze ufundowany?
(d) Udowodnić, że jeśli dwuelementowy podzbiór $\mathsf{P}(\mathbb{N})$ ma ograniczenie dolne przy uporządkowaniu $\sqsubseteq$, to ma przy tym uporządkowaniu kres górny.
(e) Czy w tym porządku każdy niepusty zbiór ograniczony z dołu ma kres górny?

R450. W zbiorze $\mathbb{N} \to \{0, 1\}$ określamy relację $\preceq$ w taki sposób, że $f \preceq g$, wtedy i tylko wtedy, gdy $f = g$ lub istnieje takie $n_0 \in \mathbb{N}$, że $f(n_0) < g(n_0)$ oraz $\forall n(n > n_0 \to f(n) = g(n))$.

(a) Udowodnić, że relacja $\preceq$ jest porządkiem częściowym.
(b) Czy każdy łańcuch ma kres górny w porządku $\preceq$?
(c) Czy $\preceq$ jest porządkiem dobrze ufundowanym?

(d) Czy ten porządek ma nieskończony antyłańcuch?
(e) Jaka jest największa moc łańcucha w tym porządku?

R451. W zbiorze $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ określamy relację $\preceq$ w taki sposób, że $f \preceq g$, wtedy i tylko wtedy, gdy $f = g$ lub istnieje takie $n_0 \in \mathbb{N}$, że $f(n_0) < g(n_0)$ oraz $\forall n(n > n_0 \to f(n) = g(n))$. Wiadomo, że relacja $\preceq$ jest porządkiem częściowym.

(a) Znaleźć kres górny zbioru $\mathcal{X} = \{g_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, gdzie $g_n = \lambda x.\, \mathsf{if}\ x = 0\ \mathsf{then}\ n\ \mathsf{else}\ 0$ dla $n \in \mathbb{N}$.
(b) Czy $\preceq$ jest zupełnym częściowym porządkiem?
(c) Czy relacja $s = \{\langle f, g\rangle \mid f \preceq g \vee g \preceq f\}$ jest relacją równoważności?
(d) Czy ten porządek ma nieskończony antyłańcuch? Jaka jest największa moc antyłańcucha w tym porządku?
(e) Jaka jest największa moc łańcucha w tym porządku?

R452. W zbiorze funkcji $\mathbb{N} \to \{2, 3\}$ dany jest następujący porządek częściowy:

$$f \leq g \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad f^{-1}(\{2\}) \subseteq g^{-1}(\{2\}).$$

Czy ten porządek:

(a) jest liniowy?
(b) jest dobrze ufundowany?
(c) ma elementy minimalne, maksymalne, najmniejsze, największe?
(d) jest kratą zupełną?

R453. Niech $\leq$ będzie częściowym porządkiem w zbiorze $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ zdefiniowanym następująco:

$$f \leq g \iff \forall n \in \mathbb{N}\, (f(n) \leq g(n))\,.$$

Stożkiem dolnym funkcji f nazywamy zbiór $D_f = \left\{g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid g \leq f\right\}$.

(a) Wskazać wszystkie liczby kardynalne, które są mocami stożków dolnych.
(b) Jakiej mocy jest zbiór funkcji, dla których stożek dolny jest nieskończony?

R454. Niech $\langle A, \leq\rangle$ będzie częściowym porządkiem, a $\mathcal{A}$ zbiorem wszystkich antyłańcuchów w tym porządku. Określamy relację $\preceq$ w zbiorze $\mathcal{A}$ następująco:

$$B \preceq C \;\Leftrightarrow\; \forall b \in B\, \exists c \in C.\ b \leq c.$$

(a) Pokazać, że $\langle \mathcal{A}, \preceq\rangle$ jest częściowym porządkiem.
(b) Czy jest prawdą, że jeśli $\langle A, \leq\rangle$ ma element maksymalny, to $\langle \mathcal{A}, \preceq\rangle$ ma również element maksymalny?
(c) Czy jest prawdą, że jeśli $\langle \mathcal{A}, \preceq\rangle$ ma element maksymalny, to $\langle A, \leq\rangle$ ma również element maksymalny?

R455. Niech $\mathcal{F}$ będzie zbiorem wszystkich bijekcji z $\mathbb{Z}$ do $\mathbb{Z}$. Określamy relację $\preceq$ w zbiorze $\mathcal{F}$:

$$f \preceq g \;\Leftrightarrow\; \forall a \in \mathbb{Z}.\ f^{-1}(a) \leq g^{-1}(a).$$

(a) Pokazać, że $\langle \mathcal{F}, \preceq\rangle$ jest częściowym porządkiem.
(b) Czy ten porządek ma:
  - elementy maksymalne?
  - elementy minimalne?
  - element największy?
  - element najmniejszy?
  - nieskończone łańcuchy?

- nieskończone antyłańcuchy?

R456. Rodzina zbiorów $\mathcal{R} \subseteq \mathsf{P}(\mathbb{N})$ jest *zamknięta w górę*, gdy spełniony jest warunek
$$\forall AB\,(A \in \mathcal{R} \land A \subseteq B \to B \in \mathcal{R}).$$
Udowodnić, że $f : \mathsf{P}(\mathbb{N}) \to \mathsf{P}(\mathbb{N})$ jest monotoniczna wtedy i tylko wtedy, gdy przeciwobraz każdej rodziny zamkniętej w górę przy przekształceniu f jest zamknięty w górę.

R457. Podzbiór X zbioru A, częściowo uporządkowanego relacją $\leq$, jest *zamknięty w dół*, gdy spełniony jest warunek
$$\forall xy\,(x \in X \land x \geq y \to y \in X).$$
Udowodnić, że funkcja $f : A \to A$ jest monotoniczna wtedy i tylko wtedy, gdy przeciwobraz każdego zbioru zamkniętego w dół przy przekształceniu f jest zamknięty w dół.

R458. W zbiorze $\mathsf{P}_{\mathsf{fin}}(\mathbb{N})$ wszystkich skończonych podzbiorów $\mathbb{N}$ określamy relację $\leq$, przyjmując $A \leq B$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje różnowartościowa funkcja $f : A \xrightarrow{1-1} B$, spełniająca dla każdego $x \in A$ warunek $x \leq f(x)$.

(a) Udowodnić, że $\leq$ jest relacją częściowego porządku w $\mathsf{P}_{\mathsf{fin}}(\mathbb{N})$.
(b) Czy w $\langle \mathsf{P}_{\mathsf{fin}}(\mathbb{N}), \leq \rangle$ istnieje antyłańcuch o 2014 elementach?
(c)* Udowodnić, że w $\langle \mathsf{P}_{\mathsf{fin}}(\mathbb{N}), \leq \rangle$ nie istnieje nieskończony antyłańcuch.
(d) Czy analogicznie określona[11] relacja w $\mathsf{P}(\mathbb{N})$ jest częściowym porządkiem?

459.* Czy istnieją porządki częściowe $\leq_1$ i $\leq_2$ w zbiorze $\mathbb{N}$ o tej własności, że dla dowolnych liczb $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{N}$:

(a) jeśli $x_1 \leq_1 y_1$ i $x_2 \leq_2 y_2$, to $x_1 \leq_1 z \leq_1 y_1$ i $x_2 \leq_2 z \leq_2 y_2$, dla pewnego $z \in \mathbb{N}$?
(b) jeśli $x_1 <_1 y_1$ i $x_2 <_2 y_2$, to $x_1 <_1 z <_1 y_1$ i $x_2 <_2 z <_2 y_2$, dla pewnego $z \in \mathbb{N}$?

R460. W zbiorze $\mathbb{N} \to \{0, 1, 2\}$ rozważamy taki porządek częściowy:
$f \preceq g$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f^{-1}(\{2\}) \subsetneq g^{-1}(\{2\})$ lub
$f^{-1}(\{2\}) = g^{-1}(\{2\})$ i $f^{-1}(\{1\}) \subseteq g^{-1}(\{1\})$.

(a) Czy to jest uporządkowanie liniowe?
(b) Wskazać wszystkie elementy minimalne, maksymalne, największe i najmniejsze.
(c) Czy ten porządek jest dobrze ufundowany?
(d) Podać przykład rosnącego ciągu funkcji $L = \{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ o tej własności, że f_n są nieporównywalne ze względu na uporządkowanie po współrzędnych, tj:
$$\forall n\, m\ (n < m \to \exists k\, (f_n(k) > f_m(k)).$$
(e) Czy ten porządek jest kratą zupełną (tj. czy każdy podzbiór ma kres górny)?

R461. W zbiorze $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ rozważamy taki porządek częściowy: $f \preceq g$ wtedy i tylko wtedy, gdy
$$f = g \quad \text{lub} \quad \exists n \in \mathbb{N}.\, f^{-1}(\{n\}) \subsetneq g^{-1}(\{n\}) \land \forall k > n.\, f^{-1}(\{k\}) = g^{-1}(\{k\})$$
(a) Czy to jest uporządkowanie liniowe?
(b) Wskazać wszystkie elementy minimalne, maksymalne, największe i najmniejsze.
(c) Czy ten porządek jest dobrze ufundowany?
(d) Czy każdy niepusty zbiór skierowany ma kres górny w tym porządku?
(e)* Czy każdy niepusty łańcuch ograniczony z góry ma kres górny w tym porządku?

R462. Zbiór słów $A \subseteq \{a, b\}^*$ nazwiemy *przekrojem*, gdy:

[11] Tj. $A \leq B$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje funkcja $f : A \xrightarrow{1-1} B$ o własności $\forall n \in A.\, n \leq f(n)$

(*) dla dowolnych różnych słów $u, v \in A$, słowo u nie jest prefiksem v ani v nie jest prefiksem u;

(**) dla dowolnego słowa $w \in \{a, b\}^*$ istnieje takie słowo $u \in A$, że u jest prefiksem w lub w jest prefiksem u.

Niech $\mathcal{B}$ oznacza rodzinę wszystkich przekrojów i niech $\sqsubseteq$ będzie relacją w zbiorze $\mathcal{B}$ określoną następująco: $A \sqsubseteq B$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $u \in A$ istnieje takie $v \in B$, że u jest prefiksem v.

(a) Jaka jest moc zbioru $\mathcal{B}$?
(b) Wykazać, że $\sqsubseteq$ jest częściowym porządkiem.
(c) Czy i jakie są elementy minimalne, maksymalne, największe, najmniejsze?
(d) Czy każdy niepusty podzbiór zbioru $\mathcal{B}$ ma kres dolny?
(e) Czy $\langle \mathcal{B}, \sqsubseteq \rangle$ jest dobrym ufundowaniem?

463. Czy jeśli A jest przekrojem w sensie zadania 462, to każdy maksymalny łańcuch w $\{a, b\}^*$ z porządkiem prefiksowym ma niepuste przecięcie z A?

R464. Zbiory $\langle A, \leq_A \rangle$ i $\langle B, \leq_B \rangle$ są częściowo uporządkowane, a funkcja $f : A \to B$ jest monotonicznym przekształceniem z $\langle A, \leq_A \rangle$ do $\langle B, \leq_B \rangle$. Ponadto przeciwobraz każdego zbioru skończonego przy funkcji f jest skończony. Które z następujących twierdzeń zachodzi dla dowolnych A, B, f, spełniających te założenia?

(a) Jeśli $\leq_A$ jest liniowym porządkiem, to $\leq_B$ też jest liniowym porządkiem.
(b) Jeśli $\leq_A$ jest dobrym ufundowaniem, to $\leq_B$ też jest dobrym ufundowaniem.
(c) Jeśli $\leq_B$ jest dobrym ufundowaniem, to $\leq_A$ też jest dobrym ufundowaniem.
(d) Jeśli $A = \mathbb{Q}$ oraz $\leq_A$ to zwykły porządek na $\mathbb{Q}$, to f jest różnowartościowa.

R465. Niech X oznacza zbiór funkcji kwadratowych z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$ o współczynnikach całkowitych. Na X określmy porządek:

$$f \leq g \iff \langle f(1), f(2), f(3) \rangle \preceq \langle g(1), g(2), g(3) \rangle,$$

gdzie $\preceq$ jest porządkiem leksykograficznym w $\mathbb{R}^3$. Czy ten porządek:[12]

(a) jest liniowy?
(b) jest dobrze ufundowany?
(c) jest kratą zupełną?
(d) ma element najmniejszy i największy? Jakie są elementy minimalne i maksymalne?

Co się zmieni jeśli w definicji X zastąpimy funkcje kwadratowe dowolnymi wielomianami? Rozpatrywany porządek nie jest gęsty. Czy istnieje inny porządek na X, który jest gęsty? Jeśli tak, to jaki?

R466. W zbiorze $P = \{a, b\}^* \times [0, 1]$ określamy relację $\preceq$ w taki sposób:

$$\langle w, x \rangle \preceq \langle v, y \rangle, \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad (w \subsetneq v) \vee (w = v \wedge x \leq y).$$

Wiadomo, że to porządek częściowy.

(a) Czy każdy ograniczony z góry podzbiór zbioru P ma kres górny w porządku $\preceq$?
(b) Czy każdy niepusty podzbiór zbioru P ma kres dolny w porządku $\preceq$?
(c) Czy porządek $\langle P, \preceq \rangle$ ma podzbiór izomorficzny z $\langle \mathbb{R} \times \mathbb{N}, \preccurlyeq \rangle$, gdzie $\preccurlyeq$ oznacza porządek leksykograficzny na parach, tj. $\langle x_1, n_1 \rangle \preccurlyeq \langle x_2, n_2 \rangle$, wtedy i tylko wtedy, gdy $x_1 < x_2$ lub $x_1 = x_2$ i $n_1 \leq n_2$?

[12] A dlaczego to jest porządek?

R467. W zbiorze $P = [0,1] \times \{a,b\}^*$ określamy relację $\preceq$ w taki sposób:

$$\langle x, w\rangle \preceq \langle y, v\rangle, \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad (x < y) \vee (x = y \wedge w \subseteq v).$$

Wiadomo, że to porządek częściowy.

(a) Czy każdy niepusty podzbiór zbioru P ma kres dolny w porządku $\preceq$?
(b) Czy każdy ograniczony z góry podzbiór zbioru P ma kres górny w tym porządku?
(c) Czy porządek $\langle P, \preceq\rangle$ ma podzbiór izomorficzny z leksykograficznie uporządkowanym produktem $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$? A z porządkiem leksykograficznym na $\mathbb{R} \times \mathbb{N}$?
(d) Niech $x_n = 1 - \frac{1}{n+1}$, dla $n \in \mathbb{N}$ i niech $W_m \subseteq \{a,b\}^*$ oznacza zbiór wszystkich słów długości co najmniej m, w których litera a występuje nieparzystą liczbę razy. Czy podzbiór $Q = \{\langle x_n, w\rangle \mid n \in \mathbb{N} \wedge w \in W_n\}$ zbioru P jest dobrze ufundowany relacją $\preceq$? Czy jest dobrze uporządkowany?

Porządki zupełne i punkty stałe

R468. Przez $\mathsf{Bool}_\perp$ oznaczymy zbiór $\{\perp, 0, 1\}$, uporządkowany w ten sposób, że $x \leq y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = \perp$ lub $x = y$. Zbiór $\mathbb{N} \to \mathsf{Bool}_\perp$ jest częściowo uporządkowany relacją $\trianglelefteq$ określoną „po współrzędnych”:

$$\alpha \trianglelefteq \beta \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \forall n \in \mathbb{N}.\, \alpha(n) \leq \beta(n).$$

Udowodnić, że $\langle \mathbb{N} \to \mathsf{Bool}_\perp, \trianglelefteq\rangle$ jest zupełnym porządkiem częściowym, tj. że każdy zbiór skierowany ma kres górny.

R469. Niech $\mathsf{Bool}_\perp$ i $\leq$ będą jak w zadaniu 468. Zbiór $\mathbb{N} \to \mathsf{Bool}_\perp$ jest częściowo uporządkowany relacją $\preceq$ określoną „leksykograficznie”, tj. $\alpha \preceq \beta$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha = \beta$ lub

$$\exists n \in \mathbb{N}\, (\alpha(n) < \beta(n) \wedge \forall m \in \mathbb{N}\, (m < n \to \alpha(m) = \beta(m))).$$

Udowodnić, że $\langle \mathbb{N} \to \mathsf{Bool}_\perp, \preceq\rangle$ jest zupełnym porządkiem częściowym.

470. Podać przykłady:
- Zupełnego porządku częściowego, który nie jest kratą zupełną;
- Przekształcenia monotonicznego w kracie zupełnej, które nie jest ciągłe;

471. Podać przykład takiego przekształcenia monotonicznego f w kracie $\langle \mathsf{P}(\mathbb{N}), \subseteq\rangle$, że kres górny zbioru $\{f^n(\varnothing) : n \in \mathbb{N}\}$ nie jest najmniejszym punktem stałym f. Czy można tak wybrać f, aby najmniejszy punkt stały nie istniał?

472. Podać przykład kraty, która ma element największy i najmniejszy, ale nie jest zupełna.

473. Udowodnić, że w kracie zupełnej każdy podzbiór ma kres dolny.

474. Udowodnić, że suma skierowanej rodziny zbiorów skierowanych jest zbiorem skierowanym.

R475. Rozpatrzmy funkcję $f : \mathsf{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \to \mathsf{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ określoną tak:

$$f(s) = s \cdot s,$$

gdzie kropka oznacza składanie relacji. Udowodnić, że funkcja f jest ciągła ze względu na uporządkowanie przez inkluzję, tj. że $f(\bigcup \mathcal{X}) = \bigcup f(\mathcal{X})$, dla dowolnej skierowanej rodziny relacji $\mathcal{X} \subseteq \mathsf{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$.

476. Funkcja $f : \mathsf{P}(A) \to \mathsf{P}(A)$ jest ciągła. Powiemy, że zbiór $x \subseteq A$ jest *dobry*, gdy $f(x) \subseteq x$. Udowodnić, że iloczyn dowolnej rodziny zbiorów dobrych jest dobry i że suma dowolnej skierowanej rodziny zbiorów dobrych jest dobra.

477. Niech f będzie ciągłym przekształceniem kraty zupełnej $\langle K, \leq_K\rangle$ w kratę zupełną $\langle L, \leq_L\rangle$. Czy f jest ciągłym przekształceniem z $\langle K, \geq_K\rangle$ do $\langle L, \geq_L\rangle$? (Inaczej, czy zachowuje kresy dolne zbiorów „skierowanych w dół”?)

478. Niech A będzie zupełnym częściowym porządkiem i niech $f : A \to A$ będzie ciągła.

(a) Jeśli $a \leq f(a)$ to istnieje taki punkt stały b funkcji f, że $a \leq b$.

(b) Czy jeśli $a \geq f(a)$ to istnieje taki punkt stały b funkcji f, że $a \geq b$?

479. Udowodnić, że zbiór częściowo uporządkowany jest kratą zupełną wtedy i tylko wtedy gdy jest jednocześnie kratą i zupełnym porządkiem częściowym.

R480. W pewnym przeliczalnym zbiorze częściowo uporządkowanym każdy łańcuch ma kres górny. Udowodnić, że w tym zbiorze każdy zbiór skierowany ma kres górny (tj. że jest on zupełnym porządkiem częściowym).

481. Niech $F : \mathsf{P}(S \times S) \to \mathsf{P}(S \times S)$ będzie funkcją monotoniczną o takich własnościach:

- $\mathrm{id}_S \subseteq F(\mathrm{id}_S)$;
- $F(r) \cdot F(r') \subseteq F(r \cdot r')$, dla wszystkich r, r';
- $F(r)^{-1} \subseteq F(r^{-1})$, dla wszystkich r.

Udowodnić, że największy punkt stały funkcji F jest relacją równoważności.

482. Niech $\langle A, \leq \rangle$ będzie zupełnym porządkiem częściowym, a $f : A \to A$ niech będzie funkcją ciągłą. Zbadać prawdziwość następujących stwierdzeń:

(a) Jeśli a jest najmniejszym punktem stałym funkcji f, to $a = \inf\{x \in A \mid f(x) \leq x\}$.

(b) Jeśli a jest największym punktem stałym funkcji f, to $a = \sup\{x \in A \mid f(x) \geq x\}$.

R483. Niech A będzie nieskończonym zbiorem i niech $f : \mathsf{P}(A) \to \mathsf{P}(A)$ będzie monotoniczną funkcją w kracie $\langle \mathsf{P}(A), \subseteq \rangle$. Przypuśćmy, że dla dowolnego zbioru $B \subseteq A$ i dowolnego $x \in f(B)$ istnieje taki skończony podzbiór $C \subseteq B$, że $x \in f(C)$. Udowodnić, że f jest ciągła, tj. dla dowolnego skierowanego $S \subseteq \mathsf{P}(A)$ zachodzi $f(\bigcup S) = \bigcup f(S)$.

R484. Udowodnić, że funkcja $f : \mathsf{P}(\mathbb{N}) \to \mathsf{P}(\mathbb{N})$ jest ciągła (ze względu na inkluzję) wtedy i tylko wtedy, gdy

$$f(a) = \bigcup \{f(e) \mid e \text{ skończony oraz } e \subseteq a\},$$

dla dowolnego $a \in \mathsf{P}(\mathbb{N})$.

485. Przez $\mathit{head}(w)$ oznaczamy pierwszą literę słowa w (jego głowę), a przez $\mathit{tail}(w)$ jego ogon, czyli to, co zostaje po odcięciu głowy. Rozpatrzmy definicję rekurencyjną:

$$\begin{array}{l} \textsf{if } |w| < 3 \textsf{ then } \varepsilon \\ \qquad\qquad \textsf{else if } \mathit{head}(w) = 0 \textsf{ then } f(\mathit{tail}^3(w)00) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \textsf{else } f(\mathit{tail}^3(w)1101). \end{array}$$

Co można powiedzieć o dziedzinie funkcji f? Zdefiniować operator F, którego najmniejszym punktem stałym jest funkcja f i wyznaczyć kilka początkowych wartości ciągu $F^k(\perp)$.

R486. Niech $\langle A, \leq \rangle$ będzie częściowym porządkiem i niech $f : A \to A$. Załóżmy, że dla każdego łańcucha L w $\langle A, \leq \rangle$ istnieją kresy dolne zbiorów L i $f(L)$, a jeśli $L \neq \varnothing$, to na dodatek $f(\inf L) = \inf(f(L))$. Udowodnić, że f ma największy punkt stały.

Porządki liniowe

R487. Czy dla każdej funkcji $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ istnieje taka relacja liniowego porządku $\sqsubseteq$ w $\mathbb{N}$, że dla dowolnych $m, n \in \mathbb{N}$:

(a) jeśli $m \sqsubseteq n$ to $f(m) \sqsubseteq f(n)$?

(b) jeśli $m \leq n$ to $f(m) \sqsubseteq f(n)$?

(c) jeśli $m \sqsubseteq n$ to $f(m) \leq f(n)$?

R488. Niech $\langle X, \leq_X\rangle$ i $\langle Y, \leq_Y\rangle$ będą takimi liniowymi porządkami, że relacja $\leq_Z = \leq_X \cap \leq_Y$ jest liniowym porządkiem w zbiorze $Z = X \cap Y$. Które z następujących stwierdzeń są prawdziwe?

(a) Jeśli porządek $\langle Z, \leq_Z\rangle$ jest gęsty, to $\langle X, \leq_X\rangle$ i $\langle Y, \leq_Y\rangle$ są gęste.
(b) Jeśli $\langle X, \leq_X\rangle$ i $\langle Y, \leq_Y\rangle$ są gęste, to $\langle Z, \leq_Z\rangle$ jest gęsty lub skończony.
(c) Jeśli zbiór $A \subseteq Z$ ma kres górny w porządku $\langle Z, \leq_Z\rangle$, to ma kres górny w porządku $\langle X, \leq_X\rangle$ lub w porządku $\langle Y, \leq_Y\rangle$.
(d) Jeśli zbiór $A \subseteq Z$ ma kresy dolne w porządkach $\langle X, \leq_X\rangle$ i $\langle Y, \leq_Y\rangle$, to ma kres dolny w porządku $\langle Z, \leq_Z\rangle$.

489. Znaleźć moc zbioru wszystkich porządków liniowych w zbiorze $\mathbb{R}$.

490. Dla $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, niech $f \leq g$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $f = g$ lub istnieje takie n, że $f(n) < g(n)$ oraz $f(i) = g(i)$ dla $i < n$. Czy porządek $\leq$ jest gęsty?

491. Czy porządek leksykograficzny w zbiorze $\{0,1\}^*$ jest gęsty? A w zbiorze $\mathbb{Z}^*$?

R492. Niech $\mathbb{Q}^+ = \{q \in \mathbb{Q} \mid q > 0\}$ i niech $f : \mathbb{N} \xrightarrow[\text{na}]{1-1} \mathbb{Q}$ i $g : \mathbb{N} \xrightarrow[\text{na}]{1-1} \mathbb{Q}^+$. Definiujemy przez indukcję dwa ciągi liczb $k_m, \ell_m \in \mathbb{N}$, przyjmując dla parzystych m:

- $k_m = \min\{k \in \mathbb{N} \mid \forall i(i < m \to k \neq k_i)\}$;
- $\ell_m = \min\{\ell \in \mathbb{N} \mid \forall i(i < m \to (g(\ell_i) \leq g(\ell) \leftrightarrow f(k_i) \leq f(k_m))\}$,

a dla nieparzystych m:

- $\ell_m = \min\{\ell \in \mathbb{N} \mid \forall i(i < m \to \ell \neq \ell_i)\}$;
- $k_m = \min\{k \in \mathbb{N} \mid \forall i(i < m \to (f(k_i) \leq f(k) \leftrightarrow g(\ell_i) \leq g(\ell_m))\}$.

Teraz niech $h : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}^+$ będzie określona warunkiem $h(f(k_n)) = g(\ell_n)$, dla $n \in \mathbb{N}$. Pokazać, że funkcja h jest izomorfizmem porządków $\langle \mathbb{Q}, \leq\rangle$ i $\langle \mathbb{Q}^+, \leq\rangle$.

493. Uogólnić zadanie 492 na dowolne dwa przeliczalne gęste porządki liniowe bez końców.

R494. Niech $\langle Er, \leq\rangle$ będzie zbiorem liniowo uporządkowanym i niech $Ku \subseteq Er$ będzie podzbiorem zbioru Er o mocy $\aleph_0$. Załóżmy, że

- Każdy niepusty podzbiór zbioru Er ograniczony z góry ma kres górny.
- Jeśli $x, y \in Er$ i $x < y$ to istnieje takie $ku \in Ku$, ze $x < ku < y$.
- W zbiorze Er nie ma elementu pierwszego ani ostatniego.

Udowodnić, że zbiór Er jest mocy continuum.

R495. Rozpatrzmy porządek częściowy $\mathcal{B} = \langle B, \leq\rangle$, gdzie $B = \{n - \frac{\pi}{m} \mid n, m \in \mathbb{N} - \{0\}\}$, a relacja $\leq$ jest obcięciem do B standardowego porządku na liczbach rzeczywistych.

(a) Czy $\mathcal{B}$ jest dobrze ufundowany?
(b) Czy każdy niepusty podzbiór B ma kres górny w $\mathcal{B}$?
(c) Czy każdy niepusty i ograniczony z góry podzbiór B ma kres górny w $\mathcal{B}$?
(d) Czy $\mathcal{B}$ jest izomorficzny z $\langle \mathbb{Q}, \leq\rangle$?

496. Które z następujących podzbiorów $\mathbb{R}$ (ze zwykłym uporządkowaniem) są ze sobą izomorficzne: $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$, $A = \mathbb{Q} - [0,1]$, $B = \{m \cdot 2^{-n} : m, n \in \mathbb{N}\}$, $C = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} (2m, 2m+1]$?

497. Rozpatrzmy zbiory $A = \{3 - \frac{1}{2n} : n \in \mathbb{N} - \{0\}\}$, $B = \{\pi - \frac{2}{n} : n \in \mathbb{N} - \{0\}\} \cup \{4\}$, $C = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} - \{0\}\} \cup \{2 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} - \{0\}\}$. Które ze zbiorów A, B, C, $\mathbb{N}$,

$\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}-\{0\}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}-\{0\}$, są dobrze uporządkowane przez zwykłą relację $\leq$? Które są izomorficzne?

498. Czy zbiory $\mathbb{Q}\times(0,1]$ i $(0,1]\times\mathbb{Q}$, uporządkowane leksykograficznie, są izomorficzne?

499. Rozważamy $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ z porządkiem
   (a) leksykograficznym;
   (b) $(x,y)\leq(x',y')$ wtedy i tylko wtedy gdy $x\leq x'$ i $y\leq y'$.

   Czy istnieje funkcja z $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ w $\mathbb{R}$, zachowująca porządek? Czy istnieje taka funkcja na $\mathbb{R}$? A czy istnieje taka funkcja różnowartościowa?

500. Porządek liniowy $\langle A,\leq\rangle$ ma element najmniejszy 0 i element największy 1. Powiemy, że funkcja $f:A\to A$ jest *zmniejszająca*, gdy $f(x)<x$, dla każdego $x\neq 0$. Funkcja f jest *zwiększająca*, jeśli $f(x)>x$, dla każdego $x\neq 1$. Rozpatrzmy nastepujace warunki:
   (a) dla każdej funkcji zmniejszającej f zachodzi $\forall x\exists n f^n(x)=0$;
   (b) dla każdej funkcji zwiększającej f zachodzi $\forall x\exists n f^n(0)\geq x$.

   Czy warunek (a) implikuje (b)? Czy (b) implikuje (a)?

Lemat Kuratowskiego-Zorna

R501. W przestrzeni $\mathbb{R}^n$, której elementami są n-tki liczb rzeczywistych określamy *odległość* $\rho(x,y)$ pomiędzy krotkami $x=\langle x_1,\ldots,x_n\rangle$ i $y=\langle y_1,\ldots,y_n\rangle$ wzorem
$$\rho(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}$$
Podzbiór $X\subseteq\mathbb{R}^n$ nazwiemy *rzadkim* wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych różnych punktów $x,y\in X$ zachodzi $\rho(x,y)\geq 1$. Podzbiór Y nazwiemy *wszędobylskim*, gdy dla dowolnego $z\notin Y$ istnieje takie $x\in Y$, że $\rho(z,x)<1$. Udowodnić, że suma łańcucha zbiorów rzadkich jest zbiorem rzadkim. Czy istnieje rzadki zbiór wszędobylski w przestrzeni $\mathbb{R}^3$? Czy istnieje taki zbiór w przestrzeni $\mathbb{R}^{2008}$?

R502. Udowodnić, że w każdym zbiorze częściowo uporządkowanym istnieje maksymalny (ze względu na inkluzję) podzbiór skierowany.

503. Udowodnić, że każdy porządek częściowy można rozszerzyć do liniowego.

504. Udowodnić, że w każdym zbiorze częściowo uporządkowanym jest maksymalny łańcuch.

505. Niech $B\subseteq\mathbb{R}_+$. Udowodnić, że istnieje taki zbiór $C\subseteq\mathbb{R}$, że
   - $\forall x,y\in C\,(x\neq y\to|x-y|\in B)$;
   - $\forall x(x\notin C\to\exists y\in C\,|x-y|\notin B)$.

506. Niech $D\subseteq A\times A$. Udowodnić, że istnieje zbiór $Z\subseteq A$ taki, że $(Z\times Z)\cap D=\varnothing$, oraz jeśli $Z\subsetneq V\subseteq A$ to $(V\times V)\cap D\neq\varnothing$.

507. Niech $r\subseteq\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Udowodnić, że istnieje maksymalny (ze względu na inkluzję) zbiór $C\subseteq\mathbb{N}$ taki, że $C\times C\cap r=\varnothing$.

508. Udowodnić, że jeśli $\mathcal{R}$ jest dowolną rodziną zbiorów, to istnieje taka rodzina $\mathcal{S}\subseteq\mathcal{R}$ zbiorów parami rozłącznych, że dla każdego $A\in\mathcal{R}-\mathcal{S}$ istnieje $B\in\mathcal{S}$ o własności $A\cap B\neq\varnothing$.

R509. Czy istnieje taki łańcuch przeliczalnych podzbiorów $\mathbb{R}$, którego suma nie jest przeliczalna?

510. Załóżmy, że $B\subseteq A\times A$. Udowodnić, że istnieje maksymalny (ze względu na inkluzję) zbiór $C\subseteq A$ taki, że $C\times C\subseteq B$.

511. Rodzinę zbiorów $\mathcal{I} \subseteq \mathsf{P}(A)$ nazywamy *ideałem*, jeżeli:
   (a) $\mathcal{I} \neq \varnothing$ oraz $\mathcal{I} \neq \mathsf{P}(A)$;
   (b) dla każdych $X, Y \in \mathcal{I}$ zachodzi $X \cup Y \in \mathcal{I}$;
   (c) dla każdego $X \in \mathcal{I}$ i każdego $Y \subseteq X$ zachodzi $Y \in \mathcal{I}$.

   Udowodnić, że każdy ideał można rozszerzyć do maksymalnego ideału.
512. Dowolny podzbiór zbioru $\mathbb{Z}$ nazwiemy *zeznaniem*. Zbiór zeznań $\mathcal{R}$ jest *sprzeczny* jeśli istnieje takie $i \in \mathbb{Z}$, że $i, -i \in \bigcup \mathcal{R}$. Udowodnić, że jeśli $\mathcal{R}$ jest dowolną rodziną zeznań, to istnieje maksymalna niesprzeczna podrodzina $\mathcal{R}' \subseteq \mathcal{R}$.
513. Niech f będzie bijekcją z A do A. Pokazać, że istnieje maksymalny podzbiór $B \subseteq A$ taki, że $B \subseteq f(A - B)$.
514. Niech $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Udowodnić, że istnieje maksymalna rodzina $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$, taka że dla dowolnych $f, g \in G$ zachodzi warunek $\exists i(f(i) = g(i))$.
515. Niech $C \subseteq \mathbb{R}$. Udowodnić, że istnieje zbiór $A \subseteq \mathbb{R}$ spełniający warunki:
   - $\forall x \forall y(x, y \in A \to x + y \notin C)$;
   - $\forall x(x \notin A \to \exists y(y \in A \cup \{x\} \wedge x + y \in C))$.
516. Niech $f : A \times A \to A$ i niech $C \subseteq A$. Udowodnić, że istnieje maksymalny podzbiór D zbioru A taki, że obraz zbioru $D \times D$ przy funkcji f jest zawarty w C.

R517. Udowodnić, ze istnieje taki zbiór parami rozłącznych prostych w $\mathbb{R}^3$, że każda prosta nie należąca do tego zbioru przecina jakąś prostą z tego zbioru.

518. Udowodnić, że istnieje taka rodzina $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, że
   (a) dla dowolnych $f, g \in \mathcal{A}$ istnieje takie $x \in \mathbb{R}$, że $f(x) = g(x)$;
   (b) dla dowolnej funkcji $f \notin \mathcal{A}$ istnieje takie $g \in \mathcal{A}$, że $\forall x \in \mathbb{R}.\, f(x) \neq g(x)$.

R519. Niech $f : A \to B$. Pokazać, że istnieje maksymalny podzbiór A, na którym f jest różnowartościowa.

520. Udowodnić, że każdy częściowy porządek $\langle A, \leq \rangle$ ma taki podzbiór $B \subseteq A$, że:
   (a) Żadne dwa różne elementy B nie są porównywalne;
   (b) Jeśli $a \in A - B$ to istnieje $b \in B$, porównywalne z a.
521. Niech A będzie dowolnym podzbiorem płaszczyzny. Udowodnić, że istnieje zbiór $B \subseteq A$, o takich własnościach:
   - Żadne trzy różne punkty zbioru B nie są współliniowe;
   - Każdy punkt zbioru $A - B$ leży na pewnej prostej wyznaczonej przez dwa różne punkty ze zbioru B.

R522. Niech $D \subseteq \mathbb{R}$. Zbiór $V \subseteq \mathbb{R}$ jest *D-łatwy*, gdy $(x + y)^3 - 2xy \in D$ dla wszystkich $x, y \in V$, takich że $x \neq y$. Zbiór $V \subseteq \mathbb{R}$ jest *D-trudny*, gdy:

$$\forall x \in \mathbb{R}(x \in V \vee \exists y \in V((x + y)^3 - 2xy \notin D)).$$

Dla jakich D istnieje zbiór V, jednocześnie D-łatwy i D-trudny?

R523. Zbiór $A \subseteq \mathbb{R}$ nazwiemy *wzorcowym*, jeżeli każda liczba rzeczywista jest współmierna[13] z pewną liczbą ze zbioru A, ale żadne dwie różne liczby ze zbioru A nie są współmierne. Czy istnieją zbiory wzorcowe?

[13] Liczby rzeczywiste x i y są *współmierne*, gdy $mx + ny = 0$ dla pewnych całkowitych m i n, różnych od 0.

R524. Niech $A, B \subseteq \mathbb{R}$ będą niepustymi zbiorami. Dla dowolnej liczby x przez $|x - A|$ oznaczamy odległość x od zbioru A, czyli $\inf\{|x - a| \mid a \in A\}$. Udowodnić, że istnieje podzbiór T zbioru B o takich własnościach:

- Jeśli $x, y \in T$ oraz $x \neq y$ to $|x - y| \geq \frac{1}{2}(|x - A| + |y - A|)$;
- Jeśli $x \in B - T$ to istnieje takie $y \in T$, że $|x - y| < \frac{1}{2}(|x - A| + |y - A|)$.

R525. Powiemy, że dwa zbiory $A, B \subseteq \mathcal{N}$ są *styczne* wtedy i tylko wtedy, gdy $A \cap B \neq \varnothing$. Udowodnić, że istnieje taka rodzina $R \subseteq \mathsf{P}(\mathcal{N})$, że:

- do R należą wszystkie zbiory koskończone (te, które mają skończone dopełnienia);
- jeśli $A, B \in R$, to A i B są styczne;
- jeśli $A \notin R$, to istnieje taki $B \in R$, że A i B nie są styczne.

R526. Formuły α i β są *współspełnialne*, gdy $\alpha \wedge \beta$ jest spełnialna. Zbiór formuł Z jest *parami spełnialny*, gdy każde dwa jego elementy są współspełnialne. Udowodnić, że dla dowolnego parami spełnialnego zbioru formuł A istnieje taki parami spełnialny zbiór Z, zawierający A, że dla dowolnej formuły $\alpha \notin Z$ istnieje taka $\beta \in Z$, że koniunkcja $\alpha \wedge \beta$ nie jest spełnialna.

R527. Niech $\langle A, \leq \rangle$ będzie kratą zupełną (tj. zbiorem częściowo uporządkowanym, w którym każdy podzbiór ma kres górny). Funkcję $C : \mathsf{P}(A) \longrightarrow \mathsf{P}(A)$ definiujemy następująco:

$$C(X) = \{a \in A \mid a \leq \sup X\}.$$

Udowodnić, że dla dowolnych $X, Y \in \mathsf{P}(A)$:

(a) $X \subseteq C(X)$,
(b) $C(C(X)) = C(X)$,
(c) $X \subseteq Y$ implikuje $C(X) \subseteq C(Y)$.

R528. *Dwułańcuch* w zbiorze częściowo uporządkowanym $\langle A, \leq \rangle$ to taka para $\langle B, C \rangle$ rozłącznych łańcuchów w A, że każde dwa elementy $b \in B$ i $c \in C$ są nieporównywalne. Dwułańcuchy porównujemy przez inkluzję po współrzędnych, tj. przyjmujemy, że $\langle B, C \rangle \leq \langle B', C' \rangle$ wtedy i tylko wtedy, gdy $B \subseteq C$ i $B' \subseteq C'$.

(a) Udowodnić, że istnieje maksymalny dwułańcuch.
(b) A jeśli b, c są nieporównywalne, to istnieje taki maksymalny dwułańcuch $\langle B, C \rangle$, że $b \in B$ i $c \in C$.

R529.* Udowodnić, że jeśli $\mathfrak{m} \geq \aleph_0$, to $\mathfrak{m} + \mathfrak{m} = \mathfrak{m}$.

530. Udowodnić, że jeśli $\mathfrak{m}, \mathfrak{n} \geq \aleph_0$, to $\mathfrak{m} + \mathfrak{n} = \max\{\mathfrak{m}, \mathfrak{n}\}$.

R531.* Udowodnić, że jeśli $\mathfrak{m} \geq \aleph_0$, to $\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{m} = \mathfrak{m}$.

Dobre ufundowanie

532. Podać trzy przykłady zbiorów dobrze uporządkowanych mocy $\aleph_0$, tak aby żadne dwa nie były izomorficzne.

533. Czy istnieje relacja dobrze porządkująca zbiór $\mathsf{P}(\mathbb{R})$? A zbiór $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

534. Czy zbiór $\mathbb{N}^*$ uporządkowany leksykograficznie jest dobrze ufundowany? A zbiór $\mathbb{N}^2$?

R535. Dla jakich zbiorów $\langle A, \leq \rangle$ porządek leksykograficzny na A^* jest dobrze ufundowany?

R536. Niech $\langle A, \leq \rangle$ będzie zbiorem dobrze ufundowanym. W zbiorze $\mathsf{P}(A)$ określamy porządek częściowy $\sqsubseteq$ w następujący sposób: $X \sqsubseteq Y$ ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy $X = Y$ lub $Y \neq \varnothing$ i dla wszystkich $x \in X$ i $y \in Y$ zachodzi $x \leq y$. Udowodnić, że zbiór $\langle \mathsf{P}(A), \sqsubseteq \rangle$ jest dobrze ufundowany.

R537. Jaka jest moc zbioru wszystkich dobrze ufundowanych częściowych porządków w $\mathbb{N}$?

538. Znaleźć moc zbioru wszystkich dobrych porządków w zbiorze $\mathbb{N}$.

539. Niech $\langle A, \leq \rangle$ będzie dobrym porządkiem, i niech $\{S_a : a \in A\}$ będzie dowolną rodziną zbiorów. Udowodnić, że $\bigcup_{a\in A} S_a = \bigcup_{a\in A}(S_a - \bigcup_{b<a} S_b)$. (Por. zad. 69.)

540. Zdefiniować taki dobry porządek $\preceq$ w zbiorze $\mathsf{P_{fin}}(\mathbb{N})$ wszystkich skończonych podzbiorów zbioru $\mathbb{N}$, żeby $\forall A, B \in \mathsf{P_{fin}}(\mathbb{N})\ (A \subseteq B \to A \preceq B)$.

541. Niech $\leq$ będzie relacją dobrego porządku w zbiorze A, i niech $f : A \to A$ spełnia warunek
$$\forall x, y \in A\ (x < y\ \to\ f(x) < f(y)).$$
Udowodnić, że $x \leq f(x)$, dla dowolnego $x \in A$.

542. Niech $\langle\, A, \leq \,\rangle$ będzie nieskończonym zbiorem dobrze uporządkowanym. Pokazać, że nie istnieje taka różnowartościowa funkcja $f : A \to A$, że dla dowolnych $a, b \in A$, jeśli $a \leq b$ to $f(b) \leq f(a)$.

543. Przez *multizbiór* (zbiór z powtórzeniami) nad A, rozumiemy dowolną funkcję $M : A \to \mathbb{N}$. Wtedy $M(a)$ uważa się za liczbę powtórzeń elementu a w multizbiorze M. Multizbiór jest *skończony* jeśli $\{a \in A : M(a) > 0\}$ jest skończony. Udowodnić, że taka relacja $\sqsubseteq$
$$M \sqsubseteq N \qquad \Leftrightarrow \qquad \exists n(M(k) < N(k) \wedge \forall k(k \geq n \to M(k) = N(k))$$
jest dobrym uporządkowaniem rodziny wszystkich skończonych multizbiorów nad $\mathbb{N}$. Jakie elementy graniczne ma ten porządek?

R544. Przy definicjach z zadania 446:

(a) Czy każdy zbiór dobrze ufundowany ma minimalną podstawę?
(b) Czy każdy zbiór, który ma minimalną podstawę jest dobrze ufundowany?

R545.* W częściowo uporządkowanym zbiorze $\langle A, \leq \rangle$ każdy właściwy odcinek początkowy ma postać $\mathcal{O}(x) = \{y \in A : y < x\}$, dla pewnego $x \in A$. Udowodnić, że porządek $\langle A, \leq \rangle$ jest liniowy. *Wskazówka: Rozwiązać najpierw zadanie 528.*

546. W liniowo uporządkowanym zbiorze $\langle A, \leq \rangle$ każdy właściwy odcinek początkowy ma postać $\mathcal{O}(x)$. Udowodnić, że porządek $\langle A, \leq \rangle$ jest dobry.

547. Relacja r częściowo porządkująca zbiór $\mathbb{N}$ jest *przyjemna*, jeżeli ma nieskończony łańcuch i jest dobrym ufundowaniem, ale nie jest dobrym porządkiem. Jakiej mocy jest rodzina wszystkich relacji przyjemnych?

R548. Jeśli zbiór D jest dobrym porządkiem, to użyjemy oznaczenia
$$D' = \{d \in D \mid d \neq \min D \text{ jest elementem granicznym (nie jest następnikiem) w } D\}.$$
Podać przykład takiego dobrego porządku D, że wszystkie zbiory $D', D'', D''', \ldots$ są niepuste. Czy istnieje taki zbiór przeliczalny?

549. Podać przykład dobrego porządku $\mathcal{D} = \langle D, \leq \rangle$ i (ostro) rosnącej funkcji $f : D \to D$, która spełnia jednocześnie warunki:

(a) $\forall a \in D\, \exists b \in D\, (a < b \wedge f(b) = b)$;
(b) $\forall a \in D\, \exists b \in D\, (a < b \wedge f(b) > b)$;

550. Niech $A \subseteq \mathbb{R}$ będzie dobrze uporządkowany przez zwykłą relację nierówności dla liczb rzeczywistych. Udowodnić, że A jest zbiorem przeliczalnym.

551. Rozszerzyć porządek prefiksowy na słowach do dobrego porządku.

552. Udowodnić, że w zbiorze $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, uporządkowanym „po współrzędnych”, wszystkie anty-

łańcuchy są skończone.

R553.* Niech $\langle A, \leq \rangle$ będzie zbiorem dobrze ufundowanym, w którym wszystkie antyłańcuchy są skończone. Niech $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ będzie dowolnym ciągiem elementów A. Udowodnić, że istnieją takie liczby i, j, że $i < j$ oraz $a_i \leq a_j$.

R554.* Mówimy, że relacja częściowego porządku $\leq$ w zbiorze A jest *bardzo dobrym ufundowaniem*, jeżeli w każdym ciągu nieskończonym $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ można wskazać takie $i < j$, że $a_i \leq a_j$. Pokazać, że jeśli A jest bardzo dobrze ufundowany przez relację $\leq$, to każdy ciąg nieskończony w A ma nieskończony podciąg wstępujący $a_{i_1} \leq a_{i_2} \leq a_{i_3} \leq \ldots$

555.* Udowodnić, że w zbiorze $\mathbb{N}^k$, uporządkowanym „po współrzędnych”, wszystkie antyłańcuchy są skończone. *Wskazówka: skorzystać z zadań 552 i 554.*

R556. Dla $k \in \mathbb{N}$ relacja częściowego porządku $\preceq_k$ w zbiorze $\mathbb{N}^\mathbb{N}$ jest zdefiniowana następująco:

$$f \preceq_k g \quad \Leftrightarrow \quad f = g \ \vee \ (\forall i < k\, f(i) = g(i) \ \wedge \ \forall i \geq k\, f(i) < g(i)).$$

Dla jakich k relacja $\preceq_k$ jest dobrze ufundowana?

R557. Niech relacja porządku $\preceq$ będzie zdefiniowana jako $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \preceq_k$ (patrz zad. 556) Wtedy:

$$f \preceq g \quad \Leftrightarrow \quad f = g \ \vee \ \exists k\, (\forall i < k\, f(i) = g(i) \ \wedge \ \forall i \geq k\, f(i) < g(i))$$

Czy relacja $\preceq$ jest dobrze ufundowana?

558. Podać przykład zbioru liniowo uporządkowanego $\langle V, \leq \rangle$, który nie jest dobrze uporządkowany, ale ma następujące własności:

- V ma element pierwszy;
- Każdy element V ma bezpośredni następnik;
- Dla każdego elementu $x \in V$ istnieje taki graniczny[14] element $y \in V$, że $y \leq x$ oraz zbiór $\{z \in V \mid y \leq z \leq x\}$ jest skończony.

Czy istnieje taki podzbiór zbioru $\mathbb{R}$ (ze zwykłym porządkiem)?

R559. Załóżmy, że $\langle A, \leq_1 \rangle$ i $\langle A, \leq_2 \rangle$ są dobrze ufundowane i takie, że $\leq \ = (\leq_1 \ \cup \ \leq_2)$ jest częściowym porządkiem. Udowodnić, że $\langle A, \leq \rangle$ jest porządkiem dobrze ufundowanym.

R560. Dane są dwie relacje w zbiorze $\mathsf{P}_{\mathsf{fin}}(\mathbb{N})$ wszystkich skończonych podzbiorów zbioru $\mathbb{N}$. Dla każdej z nich udowodnić, że jest porządkiem częściowym oraz zbadać, czy jest dobrze ufundowana. (Notacja $X \dot{-} Y$ oznacza różnicę symetryczną zbiorów X i Y).

(a) $X \leq_1 Y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $X = Y \vee (X \dot{-} Y \neq \varnothing \wedge \max(X \dot{-} Y) \in Y)$;
(b) $X \leq_2 Y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $X = Y \vee (X \dot{-} Y \neq \varnothing \wedge \min(X \dot{-} Y) \in X)$.

R561. Niech $\langle X, \leq \rangle$ będzie zbiorem dobrze ufundowanym. Dla $A \subseteq X$ przez $\uparrow\! A$ oznaczamy zbiór $\{x \in X \mid \exists a \in A.\ a \leq x\}$, a przez $\mathrm{Min}(A)$ oznaczamy zbiór wszystkich elementów minimalnych zbioru A. Przyjmijmy też, że $\mathsf{P}^{\uparrow}(X) = \{A \subseteq X \mid A = \uparrow\! A\}$.

(a) Pokazać, że jesli $\varnothing \neq A \subseteq X$ i $A = \uparrow\! A$, to $A = \uparrow\!\mathrm{Min}(A)$.
(b) Czy zbiór $\langle \mathsf{P}^{\uparrow}(X), \subseteq \rangle$ musi być dobrze ufundowany?
(c) A zbiór $\langle \mathsf{P}^{\downarrow}(X), \subseteq \rangle$, gdzie $\mathsf{P}^{\downarrow}(X) = \{A \subseteq X \mid A = \downarrow\! A\}$?

R562. Niech $\langle A, \leq \rangle$ będzie dobrze ufundowanym porządkiem częściowym.

(a) Czy każdy niepusty podzbiór zbioru A ograniczony z góry ma kres górny?
(b) Czy każdy niepusty podzbiór zbioru A ograniczony z dołu ma kres dolny?

[14] Graniczny to taki, co nie ma bezpośredniego poprzednika.

(c) Czy i jak zmienią się odpowiedzi na powyższe pytania, jeśli założyć, że $\langle A, \leq\rangle$ jest dobrym porządkiem?

R563. Niech $\langle A, \leq\rangle$ będzie porządkiem częściowym i niech $\mathcal{A}^{\uparrow}$ będzie rodziną wszystkich niepustych i zamkniętych w górę podzbiorów zbioru A, czyli

$$\mathcal{A}^{\uparrow} = \{X \subseteq A \mid X \neq \varnothing \wedge \forall x \in X\ \forall y \in A\ (x \leq y \to y \in X)\}.$$

Niech $\preceq$ będzie relacją w $\mathcal{A}^{\uparrow}$ zdefiniowaną następująco:

$$B \preceq C \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \forall c \in C\ \exists b \in B.\ b \leq c.$$

(a) Wykazać, że $\preceq$ jest porządkiem częściowym.
(b) Czy jeśli $\langle A, \leq\rangle$ jest dobrze ufundowany, to $\langle \mathcal{A}^{\uparrow}, \preceq\rangle$ jest też dobrze ufundowany?
(c) Czy jeśli $\langle A, \leq\rangle$ jest dobrym porządkiem, to $\langle \mathcal{A}^{\uparrow}, \preceq\rangle$ jest też dobrym porządkiem?

Zadania różne

R564. Niech $F : \mathsf{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \to \mathsf{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ będzie taka, że $F(r) = r \cdot \leq$. Czyli relacja $F(r)$ to złożenie relacji r z relacją $\leq$.

(a) Czy funkcja F jest różnowartościowa?
(b) Czy funkcja F jest na $\mathsf{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$?
(c) Jaka jest moc zbioru $F^{-1}(\{\leq\})$?
(d) Niech $r \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Udowodnić, że relacja r jest punktem stałym funkcji F wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego $A \subseteq \mathbb{N}$ zbiór $r(A) = \{y \mid \exists x \in A.\, x\, r\, y\}$ jest zamknięty w górę.[15]

R565. Funkcja $F : \mathsf{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \to \mathsf{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ przypisuje każdej relacji w $\mathbb{N}$ jej domknięcie przechodnie, tj. $F(r) = r^{+}$ dla $r \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

(a) Czy jest to funkcja różnowartościowa?
(b) Czy zbiorem wartości F jest rodzina wszystkich relacji przechodnich w $\mathbb{N}$?
(c) Jakiej mocy jest $F(\mathcal{R})$, gdzie $\mathcal{R}$ to rodzina wszystkich relacji równoważności w $\mathbb{N}$?
(d) Jakiej mocy jest zbiór $X = F^{-1}(\{\mathbb{N} \times \mathbb{N}\})$?

R566. Niech $\Phi : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathsf{P}(\mathbb{N})$ będzie zdefiniowane następująco:

$$\Phi(f) = \{n \mid f(\{0 \ldots n\}) \subseteq \{0 \ldots n\}\}$$

(a) Czy funkcja Φ jest różnowartościowa?
(b) Czy Φ jest na zbiór $\mathsf{P}(\mathbb{N})$?
(c) Jaka jest moc zbioru $\Phi^{-1}(\{\mathbb{N}\})$?
(d) Jaka jest moc zbioru $\Phi(\mathsf{St})$, gdzie St to zbiór funkcji stałych?

R567. Niech $F : (\mathbb{N} \to \mathbb{N}) \to \mathbb{N}$ będzie określona warunkiem $F(f) = \min(\mathrm{Rg}(f))$.

(a) Czy funkcja F jest różnowartościowa i czy jest na $\mathbb{N}$?
(b) Znaleźć obraz zbioru Sur wszystkich funkcji na $\mathbb{N}$ i obraz zbioru Okr wszystkich funkcji okresowych przy przekształceniu F.
(c) Jakiej mocy jest zbiór $F^{-1}(\text{Pierwsze})$?

R568. Przy oznaczeniach zadania 567:

(a) Znaleźć obraz zbioru Inj wszystkich funkcji różnowartościowych przy operacji F.

[15] Zbiór $X \subseteq \mathbb{N}$ jest *zamknięty w górę* wtw, gdy dla dowolnych $n, m \in \mathbb{N}$ jeśli $n \in X$ i $n \leq m$, to $m \in X$.

(b) Znaleźć wszystkie liczby kardynalne, które są mocami zbiorów postaci $F^{-1}(Y)$.

${}^{\mathsf{R}}$569. Niech $\approx$ będzie relacją w zbiorze $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ określoną następująco: $f \approx g$ oznacza, że dla dowolnej liczby $n \in \mathbb{N}$ zachodzi równoważność:

$f(n)$ jest liczbą pierwszą wtedy i tylko wtedy, gdy $g(n)$ jest liczbą pierwszą.

(a) Dlaczego to jest relacja równoważności?
(b) Jakiej mocy jest zbiór ilorazowy $(\mathbb{N} \to \mathbb{N})/_{\approx}$?
(c) Znaleźć wszystkie liczby kardynalne, które są mocami klas abstrakcji tej relacji.

${}^{\mathsf{R}}$570. Niech $\approx$ będzie relacją w zbiorze $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ określoną następująco: $f \approx g$ oznacza, że dla dowolnej liczby pierwszej p i dowolnego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi równoważność:

$$f(n) = p \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } g(n) = p.$$

(a) Dlaczego to jest relacja równoważności?
(b) Jakiej mocy jest zbiór ilorazowy $(\mathbb{N} \to \mathbb{N})/_{\approx}$?
(c) Znaleźć wszystkie liczby kardynalne, które są mocami klas abstrakcji tej relacji.

${}^{\mathsf{R}}$571. Niech $\approx$ będzie relacją równoważności w zbiorze $\mathsf{P}(\mathsf{P}(\mathbb{N}))$ określoną następująco: dla dowolnych rodzin $\mathcal{R}$ i $\mathcal{S}$:

$$\mathcal{R} \approx \mathcal{S} \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \bigcup \mathcal{R} = \bigcup \mathcal{S}.$$

(a) Jaka jest moc zbioru ilorazowego $\mathsf{P}(\mathsf{P}(\mathbb{N}))/_{\approx}$?
(b) Jaka jest moc klasy abstrakcji $[\{\{0\}\}]_{\approx}$?
(c) Czy istnieją jednoelementowe klasy abstrakcji?
(d) Czy istnieją klasy abstrakcji mocy $\aleph_0$?

${}^{\mathsf{R}}$572. Dla $n \in \mathbb{N}$, przez $\Pi(n)$ oznaczymy zbiór wszystkich dzielników pierwszych liczby n. Ściślej: $\Pi(n) = \{p \in \text{Pierwsze} \mid \exists k \in \mathbb{N}.\, p \cdot k = n\}$. Zdefiniujmy porządek $\preceq$ w $\mathbb{N}$:

$$m \preceq n \quad \Leftrightarrow \quad m = n \ \vee\ \Pi(m) \subsetneq \Pi(n).$$

(a) Jakie są elementy największe, najmniejsze, maksymalne i minimalne?
(b) Jakiej mocy jest zbiór $D = \{k \in \mathbb{N} \mid \exists A \subseteq \mathbb{N}.\, k = \inf A \wedge k \notin A\}$?
(c) Czy ten porządek jest dobrze ufundowany?
(d) Jakiej mocy jest zbiór wszystkich nieskończonych antyłańcuchów?

${}^{\mathsf{R}}$573. Powiemy, że zbiór X jest *prawie zawarty* w zbiorze A i napiszemy $X \Subset A$, jeśli różnica $X - A$ jest skończona. Dla $A \subseteq \mathbb{N}$ niech $\mathsf{P}_{\sim}(A) = \{X \subseteq \mathbb{N} \mid X \Subset A\}$ będzie rodziną wszystkich zbiorów prawie zawartych w A.

(a) Ile elementów ma zbiór $M = \{\, \overline{\overline{\mathsf{P}_{\sim}(A)}} \mid A \subseteq \mathbb{N}\}$?
(b) Czy dla każdej niepustej rodziny $\mathcal{F} \subseteq \mathsf{P}(\mathbb{N})$ zachodzi:
  i. $\mathsf{P}_{\sim}(\bigcap \mathcal{F}) \subseteq \{X \subseteq \mathbb{N} \mid \forall A \in \mathcal{F}.\, X \Subset A\}$?
  ii. $\mathsf{P}_{\sim}(\bigcap \mathcal{F}) \supseteq \{X \subseteq \mathbb{N} \mid \forall A \in \mathcal{F}.\, X \Subset A\}$?

${}^{\mathsf{R}}$574. Rozważmy relację r w zbiorze $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ określoną następująco:

$$f\, r\, g \quad \Leftrightarrow \quad \forall x.\ f^{-1}(\{f(x)\}) = g^{-1}(\{g(x)\}).$$

(a) Dlaczego r jest relacją równoważności?
(b) Czy $[\mathrm{id}_{\mathbb{N}}]_r$ to zbiór wszystkich funkcji różnowartościowych z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{N}$?
(c) Znaleźć wszystkie liczby kardynalne, które są mocami klas abstrakcji relacji r.
(d) Jakiej mocy jest zbiór $(\mathbb{N} \to \mathbb{N})/_r$?

[R]575. Niech Fun oznacza zbiór wszystkich funkcji z $\mathbb{N}$ w $\mathbb{N}$, a Roz, Na, Bij i St jego podzbiory, złożone, odpowiednio, ze wszystkich injekcji, surjekcji, bijekcji i funkcji stałych. Niech $F : \mathsf{Fun} \times \mathsf{Fun} \to \mathsf{Fun}$ będzie taką funkcją, że $F(f, g) = g \circ f$.

(a) Czy F jest różnowartościowa ?
(b) Czy F jest „na" zbiór Fun ?
(c) Czy $F^{-1}(\{\mathrm{id}_{\mathbb{N}}\}) \subseteq \mathsf{Bij} \times \mathsf{Bij}$?
(d) Czy $F^{-1}(\mathsf{Bij}) \subseteq \mathsf{Roz} \times \mathsf{Na}$?
(e) Czy $F^{-1}(\mathsf{St}) \subseteq \mathsf{St} \times \mathsf{Fun} \cup \mathsf{Fun} \times \mathsf{St}$?
(f) Jaka jest moc zbioru retrakcji $\mathsf{Retr} = \{f \mid F(f, f) = f\}$?

[R]576. Przy oznaczeniach zad. 575, niech $G : \mathsf{Fun} \to \mathsf{Fun}$ będzie taką funkcją, że $G(f) = f \circ f$.

(a) Czy G jest różnowartościowa?
(b) Czy $G^{-1}(\mathsf{Bij}) = \mathsf{Bij}$?
(c) Czy $G^{-1}(\mathsf{St}) = \mathsf{St}$?
(d) Jaka jest moc zbioru inwolucji $\mathsf{Inw} = G^{-1}(\{\mathrm{id}_{\mathbb{N}}\})$?
(e) Czy G jest na zbiór Fun ?

[R]577. Niech $\mathbb{I}$ oznacza przedział domknięty $[0, 1]$ na prostej rzeczywistej, uporządkowany w zwykły sposób. Niech $\sim$ będzie relacją równoważności w zbiorze $\mathsf{P}(\mathbb{I})$ określoną następująco:[16] dla dowolnych $X, Y \subseteq \mathbb{I}$:

$$X \sim Y \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \sup_{\mathbb{I}} X = \sup_{\mathbb{I}} Y.$$

(a) Jaka jest moc zbioru ilorazowego $\mathsf{P}(\mathbb{I})/_{\sim}$?
(b) Jakie liczby kardynalne są mocami klas abstrakcji relacji $\sim$?

[R]578. W zbiorze $\mathsf{P}(\mathbb{N})$ określamy relację częściowego porządku $\preceq$, przyjmując dla $A, B \subseteq \mathbb{N}$, że $A \preceq B$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A \subseteq B$ oraz różnica $B - A$ jest skończona.

(a) Jakie są w tym porządku elementy maksymalne, minimalne, największe i najmniejsze?
(b) Czy ten porządek jest dobrze ufundowany?
(c) Jakiej mocy jest rodzina Σ wszystkich podzbiorów $\mathsf{P}(\mathbb{N})$, które mają kres górny ze względu na porządek $\preceq$?
(d) Wiadomo, że w porządku $\langle \mathsf{P}(\mathbb{N}), \subseteq \rangle$ istnieją nieprzeliczalne łańcuchy i antyłańcuchy. A jak jest w porządku $\langle \mathsf{P}(\mathbb{N}), \preceq \rangle$?

579. Funkcja $F : \mathsf{P}(\mathbb{R}) \to \mathsf{P}(\mathbb{R}^2)$ zdefiniowana jest wzorem $F(A) = \{\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2 \mid x - y \in A\}$.

(a) Zaznaczyć w układzie współrzędnych zbiór $F(\{1, 2\})$.
(b) Czy funkcja F jest różnowartościowa? Czy jest surjekcją?
(c) Udowodnić, że $F(\mathbb{N})$ jest porządkiem częściowym w $\mathbb{R}$ i podać przykład nieskończonego antyłańcucha w tym porządku.
(d) Wyznaczyć przeciwobraz zbioru wszystkich relacji zwrotnych w $\mathbb{R}$ przy funkcji F.
(e) Jakiej mocy jest zbiór $F(\mathbb{Q})$?

[R]580. Funkcja $F : \mathsf{P}(\mathbb{Z}) \to \mathsf{P}(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ jest zdefiniowana następująco: dla $A \in \mathsf{P}(\mathbb{Z})$,

$$F(A) = (A \times \mathbb{N}) \cup (\mathbb{N} \times A).$$

(a) Czy F jest różnowartościowa?

[16] Notacja $\sup_{\mathbb{I}}$ oznacza kres w zbiorze $\mathbb{I}$, w szczególności $\sup_{\mathbb{I}} \varnothing = 0$.

(b) Czy F jest „na”?

(c) Wyznaczyć $F^{-1}(\{\mathcal{B} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid \mathbf{1}_{\mathbb{Z}} \subseteq \mathcal{B}\})$.

(d) Wyznaczyć $F^{-1}(\{\mathcal{B} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid \mathbf{1}_{\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{B}\})$.

R581. Funkcja $F : \mathsf{P}(\mathbb{N}) \to \mathsf{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ jest zdefiniowana następująco: dla $A \in \mathsf{P}(\mathbb{N})$,

$$F(A) = (A \times \mathbb{N}) \cup (\mathbb{N} \times A).$$

(a) Czy F jest różnowartościowa?

(b) Czy F jest „na”?

(c) Niech Z, S, P, T oznaczają odpowiednio zbiory wszystkich relacji zwrotnych, symetrycznych, przechodnich i spójnych w $\mathbb{N}$. Wyznaczyć przeciwobrazy tych zbiorów przy przekształceniu F.

R582. Niech $g : \mathsf{P}(\mathbb{N}\times\mathbb{N}) \to (\mathbb{N} \to \mathsf{P}(\mathbb{N}))$ będzie taką funkcją, że $g(A)(n) = \{i \in \mathbb{N} \mid \langle n, i\rangle \in A\}$.

(a) Czy funkcja g jest różnowartościowa?

(b) Czy funkcja g jest na $\mathbb{N} \to \mathsf{P}(\mathbb{N})$?

(c) Znaleźć moc zbioru $Y = \{A \in \mathsf{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \mid g(A) : \mathbb{N} \xrightarrow{\text{na}} \mathsf{P}(\mathbb{N})\}$.

(d) Znaleźć moc obrazu zbioru wszystkich relacji zwrotnych w $\mathbb{N}$.

R583. Przy oznaczeniach zadania 582:

(a) Znaleźć moc przeciwobrazu zbioru wszystkich funkcji stałych przy operacji g.

(b) Znaleźć moc zbioru $X = \{A \in \mathsf{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \mid g(A) : \mathbb{N} \xrightarrow{1-1} \mathsf{P}(\mathbb{N})\}$.

(c) Czym jest przeciwobraz zbioru $\mathcal{A} = \{f \mid \forall n.\, n \in f(n)\}$?

584. Dla $r \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ przyjmijmy oznaczenie $\mathrm{Dom}(r) = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists y\, (\langle x, y\rangle \in r \vee \langle y, x\rangle \in r)\}$. Dalej niech $F : \mathsf{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \to \mathsf{P}(\mathbb{N})$ będzie taką funkcją, że dla $r \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$:

$$F(r) = \{x \in \mathbb{N} \mid x \in \mathrm{Dom}(r) \to \forall y\, (\langle y, x\rangle \in r \to y = x)\}.$$

(a) Czy funkcja F jest różnowartościowa?

(b) Znaleźć obraz zbioru wszystkich częściowych porządków w $\mathbb{N}$ przy funkcji F.

(c) Czy przeciwobraz zbioru $\{\mathbb{N}\}$ przy przekształceniu F jest skończony?

(d) Czy przeciwobraz zbioru $\{\varnothing\}$ przy przekształceniu F jest skończony?

R585. Dla $r \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ przyjmijmy oznaczenie $\mathrm{Dom}(r) = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists y\, (\langle x, y\rangle \in r \vee \langle y, x\rangle \in r)\}$. Dalej niech $G : \mathsf{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \to \mathsf{P}(\mathbb{N})$ będzie taką funkcją, że dla $r \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$:

$$G(r) = \{x \in \mathbb{N} \mid x \in \mathrm{Dom}(r) \wedge \forall y\, (\langle y, x\rangle \in r \to y = x)\}.$$

(a) Czy funkcja G jest różnowartościowa?

(b) Czy funkcja G jest na $\mathsf{P}(\mathbb{N})$?

(c) Znaleźć obraz zbioru wszystkich liniowych porządków w $\mathbb{N}$ przy funkcji G.

(d) Czy przeciwobraz zbioru $\{\varnothing\}$ przy przekształceniu G jest skończony?

R586. Niech $f : \mathsf{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \to \mathsf{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ będzie taka, że $f(R) = R \cup R^{-1}$.

(a) Czy funkcja f jest różnowartościowa?

(b) Czy funkcja f jest na $\mathsf{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$?

(c) Znaleźć $f(\mathsf{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}))$.

(d) Znaleźć przeciwobraz zbioru wszystkich relacji zwrotnych w $\mathbb{N}$.

R587. Niech $\mathbb{R}^*$ oznacza zbiór wszystkich skończonych ciągów (krotek) liczb rzeczywistych. Dla $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, piszemy $\alpha \preceq \beta$, gdy każda liczba występująca w ciągu α występuje też w ciagu β. Natomiast symbol $\approx$ oznacza iloczyn $\preceq \cap \preceq^{-1}$.

(a) Jakiej mocy jest zbiór $\mathbb{R}^*$?
(b) Czy relacja $\preceq$ jest częściowym porządkiem w zbiorze $\mathbb{R}^*$?
(c) Udowodnić, że $\approx$ jest relacją równoważności w $\mathbb{R}^*$. Jakiej mocy jest iloraz $\mathbb{R}^*/_{\approx}$? Jakie liczby kardynalne są mocami klas abstrakcji relacji $\approx$?

R588. Rozważmy funkcję $\Phi : (\mathbb{R} \to \mathbb{N}) \to \mathsf{P}(\mathsf{P}(\mathbb{R}))$, określoną tak:

$$\Phi(f) = \mathbb{R}/_{\ker(f)}$$

Czy Φ jest „na”? Czy jest różnowartościowa? Jaka jest moc zbioru wartości Φ?

R589. Niech $\varphi : \mathsf{P}(\mathbb{N})^{\mathbb{N}} \to \mathsf{P}(\mathbb{N})^{\mathsf{P}(\mathbb{N})}$ będzie zdefiniowane następująco: $\varphi(f)(S) = \bigcup f(S)$.

(a) Czy funkcja φ jest różnowartościowa?
(b) Czy φ jest „na” $\mathsf{P}(\mathbb{N})^{\mathsf{P}(\mathbb{N})}$?
(c) Jaką moc ma przeciwobraz zbioru funkcji stałych przy φ?
(d) Znaleźć obraz zbioru funkcji stałych przy φ.

R590. Funkcja $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ przyjmuje wartość $g(x) = x + 1$ dla parzystych argumentów x, i wartość $g(x) = x - 1$ dla x nieparzystych.

(a) Jaka jest moc rodziny zbiorów $R = \{B \subseteq \mathbb{N} \mid x \in B \leftrightarrow g(x) \notin B\}$?
(b) Relacja $r = \{\langle A, B\rangle \in \mathsf{P}(\mathbb{N}) \times \mathsf{P}(\mathbb{N}) \mid g(A) \cup A = B \cup g(B)\}$ jest relacją równoważności. Ile elementów ma klasa abstrakcji $[\{0, 1, 2\}]_r$?

R591. Funkcja $\Phi : (\mathsf{P}(\mathbb{N}) - \{\varnothing\}) \to (\mathbb{N} \to \mathbb{N})$ przypisuje każdemu zbiorowi $A \in \mathsf{P}(\mathbb{N}) - \{\varnothing\}$ funkcję $\Phi(A) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, która jest zdefiniowana przez indukcję:

- Na początek $\Phi(A)(0) = \min A$.
- Jeśli $\Phi(A)(n)$ jest największym elementem A, to $\Phi(A)(n + 1) = \min A$.
- W przeciwnym razie $\Phi(A)(n + 1) = \min(\{a \in A \mid a > \Phi(A)(n)\})$.

Funkcja $\Psi : (\mathbb{N} \to \mathbb{N}) \to (\mathsf{P}(\mathbb{N}) - \{\varnothing\})$ jest zaś określona wzorem $\Psi(f) = \mathrm{Rg}(f)$.

(a) Czy funkcja Φ jest różnowartościowa?
(b) Czy Φ jest na $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$?
(c) Jakiej mocy jest zbiór $\Phi^{-1}(\{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid \mathrm{Rg}(f) = \mathbb{N}\})$?
(d) Czy $\Psi \circ \Phi$ jest funkcją identycznościową?
(e) Czy $\Phi \circ \Psi$ jest funkcją identycznościową?

R592. Niech $\mathcal{R}$ oznacza rodzinę wszystkich relacji równoważności w $\mathbb{N}$. Określamy funkcję $f : \mathcal{R} \to \mathsf{P}(\mathbb{N})$ tak: $f(r) = \{x \in \mathbb{N} \mid \forall y.\, xry \to x \leq y\}$.

(a) Czy funkcja f jest różnowartościowa? Czy jest na $\mathsf{P}(\mathbb{N})$? Znaleźć zbiór $\mathrm{Rg}(f)$.
(b) Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ podać przykład takiego zbioru $A_n \subseteq \mathbb{N}$, że $f^{-1}(\{A_n\})$ ma dokładnie n elementów.
(c) Dla $A, B \subseteq \mathbb{N}$ przyjmijmy, że $A \simeq B$ wtedy i tylko wtedy, gdy zbiory $f^{-1}(\{A\})$ i $f^{-1}(\{B\})$ są równoliczne. Jakiej mocy jest zbiór ilorazowy $\mathsf{P}(\mathbb{N})/_{\simeq}$?

593. Niech A, B, P będą pewnymi zbiorami i niech $\xi_1 : P \to A$ oraz $\xi_2 : P \to B$. Przypuśćmy, że dla dowolnego zbioru C i dowolnych dwóch funkcji $\alpha : C \to A$ i $\beta : C \to B$ istnieje dokładnie jedna taka funkcja $\gamma : C \to P$, że $\xi_1 \circ \gamma = \alpha$ i $\xi_2 \circ \gamma = \beta$ (por. zadanie 123). Udowodnić, że zbiory P i $A \times B$ są równoliczne. Sformułować analogiczne twierdzenia dla produktu uogólnionego i dla sumy prostej (por. zadanie 124).

594. Jakiej mocy jest zbiór wszystkich łańcuchów
   - w zbiorze $\mathbb{N} - \{0\}$, uporządkowanym przez relację podzielności?
   - w zbiorze słów nad alfabetem $\{a, b\}$, uporządkowanym prefiksowo?
   - w zbiorze słów nad alfabetem $\{a, b\}$, uporządkowanym leksykograficznie?

595. Znaleźć moc zbioru wszystkich łańcuchów maksymalnych w zbiorze $\{0, 1\}^*$ z relacją porządku prefiksowego.

596.* Czy istnieje łańcuch mocy $\mathfrak{C}$ w zbiorze $\mathsf{P}(\mathbb{N})$ uporządkowanym przez inkluzję?

R597.* Ile jest łańcuchów w zbiorze $\mathsf{P}(\mathbb{N})$ uporządkowanym przez inkluzję?

R598. Zbiór wszystkich drzew słów nad alfabetem X oznaczamy przez $\mathbb{T}(X)$. Jaka jest moc zbioru

(a) $\mathbb{T}(\{0, 1\})$?
(b) $\mathbb{T}(\mathbb{N})$?
(c) $\mathbb{T}(\{0\})$?
(d) $\mathbb{T}(\mathbb{T}(\{0\}))$?

599. Ile jest nieskończonych drzew binarnych?

600. Funkcja $F : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ jest określona tak:
$$F(f, g)(n) = \min(f(n), g(n)),$$
dla dowolnych $f, g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ i dowolnego $n \in \mathbb{N}$.

(a) Czy funkcja F jest „na”?
(b) Czy jest to funkcja różnowartościowa?
(c) Jakiej mocy jest zbiór wszystkich klas abstrakcji jądra[17] funkcji F?
(d) Jakiej mocy są klasy abstrakcji tej relacji?

R601. Relacja równoważności r w $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jest określona następująco: $\langle f, g\rangle \in r$ zachodzi, gdy istnieje taka bijekcja $\pi : \mathbb{N} \xrightarrow[\text{na}]{1-1} \mathbb{N}$, że $f = g \circ \pi$. Udowodnić, że $\langle f, g\rangle \in r$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $X \subseteq \mathbb{N}$ przeciwobrazy $g^{-1}(X)$ i $f^{-1}(X)$ są równoliczne.

R602. Jakiej mocy jest zbiór klas abstrakcji relacji r określonej w zadaniu 601?

R603.* Niech r będzie relacją z zadania 601. Znaleźć wszystkie liczby kardynalne $\mathfrak{m}$, dla których istnieje klasa abstrakcji relacji r o mocy $\mathfrak{m}$.

604. Niech $\varphi : \mathsf{P}(\mathbb{N}) \to \mathsf{P}(\mathsf{P}(\mathbb{N}) \times \mathsf{P}(\mathbb{N}))$ będzie taką funkcją, że dla dowolnego $Z \in \mathsf{P}(\mathbb{N})$:
$$\varphi(Z) = \{\langle X, Y\rangle \mid Z \subseteq X \cap Y\}.$$

(a) Czy φ jest funkcją różnowartościową?
(b) Czy φ jest funkcją na $\mathsf{P}(\mathsf{P}(\mathbb{N}) \times \mathsf{P}(\mathbb{N}))$?
(c) Niech R będzie zbiorem wszystkich relacji równoważności w $\mathsf{P}(\mathbb{N})$ a C zbiorem wszystkich częściowych relacji równoważności w $\mathsf{P}(\mathbb{N})$. Znaleźć $\varphi^{-1}(R)$ i $\varphi^{-1}(C)$.
(d) Ile elementów mają klasy abstrakcji jądra[17] funkcji φ?
(e) Czy któraś z poniższych równości zachodzi dla dowolnych $Z_1, Z_2 \in \mathsf{P}(\mathbb{N})$?
   - $\varphi(Z_1 \cap Z_2) = \varphi(Z_1) \cap \varphi(Z_2)$;
   - $\varphi(Z_1 \cup Z_2) = \varphi(Z_1) \cup \varphi(Z_2)$.

[17] *Jądro* przekształcenia $f : A \to B$ to relacja równoważności $\ker(f) = \{\langle x, y\rangle : A \times A \mid f(x) = f(y)\}$.

605. Niech $\varphi : \mathsf{P}(\mathbb{N}) \to \mathsf{P}(\mathsf{P}(\mathbb{N}) \times \mathsf{P}(\mathbb{N}))$ będzie taką funkcją, że dla dowolnego $Z \in \mathsf{P}(\mathbb{N})$:
$$\varphi(Z) = \{\langle X, Y\rangle \mid X \cap Y \subseteq Z\}.$$
(a) Czy φ jest funkcją różnowartościową?
(b) Czy φ jest funkcją na $\mathsf{P}(\mathsf{P}(\mathbb{N}) \times \mathsf{P}(\mathbb{N}))$?
(c) Niech R będzie zbiorem wszystkich relacji równoważności w $\mathsf{P}(\mathbb{N})$ a C zbiorem wszystkich częściowych relacji równoważności w $\mathsf{P}(\mathbb{N})$. Znaleźć $\varphi^{-1}(R)$ i $\varphi^{-1}(C)$.
(d) Ile elementów mają klasy abstrakcji jądra funkcji φ?
(e) Czy któraś z poniższych równości zachodzi dla dowolnych $Z_1, Z_2 \in \mathsf{P}(\mathbb{N})$?
- $\varphi(Z_1 \cap Z_2) = \varphi(Z_1) \cap \varphi(Z_2)$;
- $\varphi(Z_1 \cup Z_2) = \varphi(Z_1) \cup \varphi(Z_2)$.

R606. Niech $\langle K, \leq\rangle$ będzie kratą zupełną i niech S będzie zbiorem wszystkich punktów stałych funkcji ciągłej $f : K \to K$. Załóżmy, że $P \subseteq S$ i niech a będzie kresem górnym zbioru P w kracie K.

(a) Udowodnić, że zbiór $\{b \in S \mid b \geq a\}$ ma element najmniejszy.
(b) Czy ten element najmniejszy to musi być a?
(c) Czy zbiór uporządkowany $\langle S, \leq\rangle$ jest kratą zupełną?

R607. Czy następujące stwierdzenia są prawdziwe? Jeśli nie, co należy wpisać zamiast wielokropka?

(a) Przeciwobraz obrazu zbioru a przy ... przekształceniu f pokrywa się ze zbiorem a.
(b) Jeśli d jest relacją równoważności w a oraz $b, c \in a$ ... to $[b]_d \cap [c]_d = \varnothing$.
(c) W każdym drzewie nieskończonym ... istnieje gałąź nieskończona.
(d) Produkt uogólniony dowolnej ... rodziny zbiorów skończonych jest zawsze skończony lub nieprzeliczalny
(e) Każde ciągłe ... przekształcenie kraty zupełnej w siebie ma najmniejszy punkt stały.
(f) Jeśli $\overline{\overline{A}} = \mathfrak{C}$ i B jest ... zbiorem przeliczalnym, to $\overline{\overline{A^B}} = \mathfrak{C}$.
(g) Jeśli A jest ... zbiorem przeliczalnym, to $\overline{\overline{A^A}} = \mathfrak{C}$.
(h) Każdy przedział ... w zbiorze liczb rzeczywistych można dobrze uporządkować.

R608. Rozpatrzmy następujące częściowe uporządkowanie zbioru $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$:
$$f \leq g \quad \Leftrightarrow \quad \forall x\, (f(x) \leq g(x)).$$
(a) Czy ten porządek jest liniowy?
(b) Czy ten porządek jest dobrym ufundowaniem?
(c) Czy ten porządek jest kratą zupełną?
(d) Czy istnieje w tym porządku łańcuch nieskończony?
(e) Czy istnieje w tym porządku antyłańcuch nieskończony?
(f)* Czy istnieje w tym porządku antyłańcuch nieprzeliczalny?
(g)* Czy istnieje łańcuch nieprzeliczalny w zbiorze $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ uporządkowanym w analogiczny sposób, tj. przez relację:
$$f \leq g \quad \Leftrightarrow \quad \forall x\, (f(x) \leq g(x))?$$

R609. Rozpatrzmy taką relację r w zbiorze $\mathsf{P}([0,1])$, że $A\, r\, B$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy zbiory A i B mają to samo infimum i supremum.

(a) Udowodnić (jak najkrócej), że to relacja równoważności.

(b) Jakie liczby kardynalne są mocami klas abstrakcji tej relacji?
(c) Jakiej mocy jest zbiór ilorazowy tej relacji?

R610. Powiemy, że zbiór funkcji $F \subseteq 2^X$ *rozróżnia elementy zbioru* $A \subseteq X$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych różnych $x, y \in A$ istnieje taka funkcja $f \in F$, że $f(x) \neq f(y)$.

(a) Czy istnieje minimalny (ze względu na inkluzję) zbiór $F \subseteq 2^{\mathbb{N}}$, który rozróżnia elementy zbioru $\mathbb{N}$?
(b) Czy istnieje maksymalny (ze względu na inkluzję) zbiór $F \subseteq 2^{\mathbb{N}}$, który nie rozróżnia elementów zbioru $\mathbb{N}$?
(c) Jakiej mocy jest rodzina wszystkich tych podzbiorów zbioru $2^{\mathbb{N}}$, które rozróżniają elementy zbioru $\mathbb{N}$?
(d) Czy dla każdego $F \subseteq 2^X$ istnieje maksymalny (ze względu na inkluzję) zbiór $A \subseteq X$, którego elementy rozróżnia zbiór F?

R611. Nie powołując się na twierdzenie Cantora, proszę udowodnić następujący wariant tego twierdzenia: *Dla żadnego zbioru A nie istnieje surjekcja z A na 2^A.*

R612. Dla wszystkich $k \in \mathbb{N}$ określamy funkcje $f_k : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ jak niżej:

$$f_k(a)(n) = \begin{cases} a(n) + a(n+1) - a(n)a(n+1), & \text{dla } n = k, \\ a(n)a(n+1), & \text{dla } n = k+1, \\ a(n), & \text{w przeciwnym razie.} \end{cases}$$

Każdą z takich funkcji nazywamy *wesołą transformacją*. Wyznaczyć moc zbioru G wszystkich tych ciągów należących do $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, które za pomocą złożenia skończonej liczby wesołych transformacji można przekształcić w jakiś element zbioru

$$B = \{a \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \mid \exists n \in \mathbb{N}(\forall i < n(a(i) = 1) \wedge \forall i \geq n(a(i) = 0))\}.$$

R613. Rozpatrzmy następującą relację $\sim$ w $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$:

$$f \sim g \quad \text{wtw, gdy} \quad (\forall k \exists \ell\, f(k) \leq g(\ell)) \wedge (\forall k \exists \ell\, g(k) \leq f(\ell)).$$

(a) Udowodnić, że $\sim$ jest relacją równoważności w $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$.
(b) Znaleźć moc ilorazu $(\mathbb{N} \to \mathbb{N})/_\sim$.
(c) Znaleźć wszystkie liczby kardynalne, które są mocami klas abstrakcji $[f]_\sim$.
(d) Zbiór $F \subseteq \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jest *niezależny*, gdy żadne dwa elementy F nie są w relacji $\sim$. Czy istnieje maksymalny (ze względu na inkluzję) zbiór niezależny?

R614. Niech $\sim$ będzie relacją z zadania 613. Rozpatrzmy następującą definicję porządku częściowego $\preceq$ w $(\mathbb{N} \to \mathbb{N})/_\sim$:

$$[f]_\sim \preceq [g]_\sim \quad \text{wtw, gdy} \quad \forall k \exists \ell\, f(k) \leq g(\ell).$$

(a) Uzasadnić, że ta definicja jest poprawna i że relacja $\preceq$ jest porządkiem częściowym. Wskazać elementy największe, najmniejsze, maksymalne i minimalne przy tym uporządkowaniu.
(b) Czy $\preceq$ jest porządkiem liniowym?
(c) Czy $\preceq$ jest dobrym ufundowaniem?
(d) Czy każdy podzbiór $(\mathbb{N} \to \mathbb{N})/_\sim$ ma kres dolny (górny) ze względu na porządek $\preceq$?

R615. Rozpatrzmy następującą relację $\sim$ w $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$:

$$f \sim g \quad \text{wtw, gdy} \quad \forall k \exists \ell(\ell \geq k \wedge f(k) \leq g(\ell)) \wedge \forall k \exists \ell(\ell \geq k \wedge g(k) \leq f(\ell)).$$

(a) Udowodnić, że $\sim$ jest relacją równoważności w $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

(b) Znaleźć moc ilorazu $(\mathbb{N} \to \mathbb{N})/_{\sim}$.
(c) Znaleźć wszystkie liczby kardynalne, które są mocami klas abstrakcji $[f]_{\sim}$.

616. Niech $\sim$ będzie relacją z zadania 615 i niech
$$[f]_{\sim} \preceq [g]_{\sim} \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad \forall k \exists \ell (\ell \geq k \wedge f(k) \leq g(\ell)).$$
(a) Uzasadnić, że ta definicja jest poprawna i że relacja $\preceq$ jest porządkiem częściowym. Wskazać elementy największe, najmniejsze, maksymalne i minimalne przy tym uporządkowaniu.
(b) Czy $\preceq$ jest porządkiem liniowym?
(c) Czy $\preceq$ jest dobrym ufundowaniem?
(d) Czy $\langle (\mathbb{N} \to \mathbb{N})/_{\sim}, \preceq \rangle$ jest kratą zupełną?

R617. Dane są trzy zwrotne i symetryczne relacje w $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$:
- $\langle f, g \rangle \in r_1$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy dla pewnego n zbiory $f^{-1}(\{n\})$ i $g^{-1}(\{n\})$ są równoliczne.
- $\langle f, g \rangle \in r_2$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje takie n_0, że dla każdego $n > n_0$ zbiory $f^{-1}(\{n\})$ i $g^{-1}(\{n\})$ są równoliczne.
- $\langle f, g \rangle \in r_3$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $n : \mathbb{N}$ zbiory $f^{-1}(\{n\})$ i $g^{-1}(\{n\})$ są równoliczne.

(a) Które z relacji r_1, r_2 i r_3 są relacjami równoważności?
(b) Jakie funkcje wyznaczają skończone klasy abstrakcji (dotyczy tych relacji spośród r_1, r_2 i r_3, które są relacjami równoważności)?

R618. Podzbiór B zbioru częściowo uporządkowanego A nazwiemy *parterowym*, gdy wszystkie łańcuchy zawarte w B są co najwyżej dwuelementowe.

(a) Udowodnić, że każdy częściowy porządek ma maksymalny podzbiór parterowy.
(b) Znaleźć moc rodziny wszystkich parterowych podzbiorów zbioru $\mathsf{P}(\mathbb{N})$ uporządkowanego przez inkluzję. *Wskazówka: Czy istnieje parterowy podzbiór o mocy $\mathfrak{C}$?*

R619. Niech $\mathcal{P}$ będzie rodziną wszystkich podziałów w zbiorze $\mathbb{N}$. Wiadomo, że jest to rodzina mocy continuum. Dla $P \in \mathcal{P}$ niech $f(P) = \{\min(X) \mid X \in P\}$, gdzie $min(X)$ oznacza najmniejszy element niepustego zbioru X.

(a) Zbadać, czy funkcja f jest różnowartościowa i czy jest na zbiór $\mathsf{P}(\mathbb{N})$.
(b) Znaleźć moc ilorazu $\mathcal{P}/_{\ker(f)}$ oraz zbioru $\mathrm{Rg}(f)$.
(c) Znaleźć wszystkie możliwe moce klas abstrakcji relacji $\ker(f)$.

R620. Niech $\Phi : \mathsf{P}(\{0,1\}^*) \to \{0,1\}^*$, będzie taką funkcją, że dla dowolnego A, słowo $\Phi(A)$ jest najmniejszym elementem A w porządku leksykograficznym, a jeśli w A nie ma elementu najmniejszego, to $\Phi(A) = \varepsilon$.

(a) Czy Φ jest różnowartościowa, czy Φ jest „na" ?
(b) Jaka jest moc zbioru klas abstrakcji i jakich mocy są klasy abstrakcji relacji $\ker(\Phi)$?
(c) Czy istnieje taki zbiór A, że $\inf(A)$ jest określone i $\Phi(A) = \varepsilon \neq \inf(A)$?
(d) Znaleźć moc zbioru $\Phi(\{A \in \mathsf{P}(\{0,1\}^*) \mid \forall w \in A.\ w \preceq 11111011010\})$, gdzie $\preceq$ oznacza porządek leksykograficzny.

R621. Funkcja $F : \mathsf{P}(\mathbb{N}) \to \mathsf{P}(\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}})$ dana jest wzorem:
$$F(A) = \{\langle f, g \rangle \mid \forall a{:}\mathbb{N}\, ((a \in A \to f(a) \leq g(a)) \wedge (a \notin A \to g(a) \leq f(a)))\}.$$

(a) Udowodnić, że dla każdego A relacja $F(A)$ jest częściowym porządkiem.
(b) Znaleźć $F^{-1}(L)$, gdzie L to zbiór wszystkich porządków liniowych w $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.
(c) Znaleźć $F^{-1}(M)$, gdzie M to zbiór tych porządków, które mają element minimalny.
(d) Znaleźć $F^{-1}(D)$, gdzie D to zbiór wszystkich dobrych ufundowań zbioru $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

R622. Funkcja $G : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathsf{P}(\mathbb{N})$ jest określona tak: $G(f) = \{n \in \mathbb{N} \mid f(n) \leq f(n+1)\}$.
(a) Czy funkcja G jest na $\mathsf{P}(\mathbb{N})$?
(b) Czy jest to funkcja różnowartościowa?
(c) Jakiej mocy jest zbiór wszystkich klas abstrakcji jądra funkcji G?
(d) Jakiej mocy są klasy abstrakcji tej relacji?

R623. Jakiej mocy jest zbiór tych wszystkich funkcji $f : \mathsf{P}(\mathbb{N}) \to \mathsf{P}(\mathbb{N})$, że:
(a) każda rodzina zbiorów $\mathcal{A} \subseteq \mathsf{P}(\mathbb{N})$ spełnia równość $f(\bigcup \mathcal{A}) = \bigcup\{f(Z) \mid Z \in \mathcal{A}\}$?
(b)* dowolne dwa zbiory A i B spełniają równość $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$?

R624. Niech $\varphi : \mathsf{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \to \mathsf{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ będzie zdefiniowane tak, że $\varphi(r)$ to najmniejsza relacja równoważności w $\mathbb{N}$ zawierająca r, dla $r \in \mathsf{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ (zob. zadanie 303).
(a) Czy φ jest różnowartościowa?
(b) Czy φ jest na $\mathsf{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$?
(c) Rozważmy takie $d \in \mathsf{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$, że $a\,d\,b$ wtedy i tylko wtedy gdy a i b mają wspólny dzielnik różny od 1 (dokładniej: jeśli istnieją $k, a', b' \in \mathbb{N}$ spełniające $a = k \cdot a'$, $b = k \cdot b'$ i $k \neq 1$). Znaleźć $\varphi(d)$.
(d) Niech p będzie relacją równoważności, której wszystkie klasy abstrakcji są zbiorami postaci $\{2k, 2k+1\}$ dla $k \in \mathbb{N}$. Jakiej mocy jest $\varphi^{-1}(\{p\})$?

R625. Dwa koła na płaszczyźnie są w relacji s, jeśli różnica ich promieni jest liczbą całkowitą. Udowodnić, że s jest relacją równoważności. Jaka jest moc zbioru wszystkich klas abstrakcji relacji s? Jaką moc ma klasa abstrakcji wyznaczona przez koło $K(\langle 0, 0\rangle, 1)$?

R626. Dla $Z \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ określmy relację r_Z w zbiorze $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ w następujący sposób:

$$f\, r_Z\, g \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad \forall x, y{:}\mathbb{N}(\langle x, y\rangle \in Z \to (f(x) = y \leftrightarrow g(x) = y)).$$

Wiadomo, że wtedy r_Z jest relacją równoważności. Niech $F = \lambda Z.\, r_Z : \mathsf{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \to \mathcal{R}$, gdzie $\mathcal{R}$ oznacza zbiór wszystkich relacji równoważności w $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$.
(a) Czy funkcja F jest różnowartościowa?
(b) Czy funkcja F jest na zbiór $\mathcal{R}$?
(c) Podać przykład takiego zbioru Z, że relacja r_Z ma dokładnie 5 klas abstrakcji.
(d) Niech $\mathcal{K} = \{Z \in \mathsf{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \mid \overline{\overline{(\mathbb{N} \to \mathbb{N})/_{r_Z}}} < \aleph_0\}$. Znaleźć $\bigcup \mathcal{K}$ i $\bigcap \mathcal{K}$.

R627. Jakiej mocy jest zbiór wszystkich takich funkcji $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, że
(a) $f(\{1, 2\}) = \varnothing$?
(b) $f(\{1, 2\}) = \{3, 4, 5\}$?
(c) $f(\{1, 2\}) = \{1, 4\}$?
(d) $f(-\{1, 2\}) = \{0\}$?
(e) $f^{-1}(\{1, 2\}) = \varnothing$?

R628. Niech $\mathbb{R}_+$ oznacza zbiór wszystkich dodatnich liczb rzeczywistych, a $\sim$ relację w zbiorze $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$, określoną warunkiem:

$$\langle x_1, y_1\rangle \sim \langle x_2, y_2\rangle, \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad \forall n : \mathbb{N}(x_1 < y_1 n \ \leftrightarrow\ x_2 < y_2 n).$$

(a) Udowodnić, że relacja $\sim$ jest relacją równoważności.
(b) Jaka jest moc zbioru $(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+)/_\sim$?
(c) Znaleźć wszystkie liczby kardynalne, które są mocami klas abstrakcji relacji $\sim$.

R629. Niech $\Phi : \mathbb{N}^\mathbb{N} \times \mathbb{N}^\mathbb{N} \to \mathsf{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ będzie zdefiniowana następująco:

$$\Phi(f, g) = \{\langle m, n\rangle \mid f(m) = g(n)\}$$

(a) Czy Φ jest 1-1?
(b) Czy Φ jest „na"?
(c) Niech $\mathcal{R}$ oznacza zbiór wszystkich relacji równoważności w $\mathbb{N}$, a $\mathbf{1}_{\mathbb{N}^\mathbb{N}}$ relację identycznościową w $\mathbb{N}^\mathbb{N}$. Udowodnić, że $\Phi(\mathbf{1}_{\mathbb{N}^\mathbb{N}}) = \mathcal{R}$.
(d) Niech $B = \Phi^{-1}(\{\mathbb{N} \times \mathbb{N}\})$. Znaleźć wszystkie liczby kardynalne, które są mocami zbiorów postaci $R_{f,g} = \mathrm{Rg}(f) \cup \mathrm{Rg}(g)$, dla $\langle f, g\rangle \in B$.

R630. Niech $\Phi : \mathbb{N}^\mathbb{N} \to \mathsf{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ będzie funkcją określoną wzorem:

$$\Phi(f) = \{\langle x, y\rangle \mid f(x) = y \wedge \exists x'(x' \neq x \wedge f(x') = y)\}.$$

(a) Czy Φ jest różnowartościowa?
(b) Czy Φ jest na $\mathsf{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$?
(c) Jaka jest moc $\Phi(\mathbb{N}^\mathbb{N})$?
(d) Jakie są moce zbiorów $\Phi(f)$ dla różnych $f \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$?
(e) Jaka jest moc zbioru $\Phi^{-1}(\{\mathbb{N} \times \{0\}\})$?
(f) Jaka jest moc zbioru $\Phi^{-1}(\{\{0\} \times \mathbb{N}\})$?

R631. Rozpatrzmy następującą relację równoważności R_k w zbiorze $\mathbb{N}^\mathbb{N}$:

$$f\ R_k\ g \quad\Leftrightarrow\quad \forall i < k\, (f(i) \bmod 7 = g(i) \bmod 7),$$

gdzie $n \bmod p$ oznacza resztę z dzielenia liczby n przez p.

(a) W zależności od k, jaka jest moc zbioru ilorazowego relacji R_k?
(b) Jaka jest moc zbioru ilorazowego relacji równoważności $R = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} R_k$?

632. Dana jest następująca relacja równoważności r w $\mathbb{N}$:

$$m\ r\ n \Leftrightarrow m \text{ i } n \text{ mają równą liczbę jedynek w zapisie dwójkowym.}$$

Jaka jest moc zbioru ilorazowego relacji r i jakie liczby kardynalne są mocami klas abstrakcji tej relacji?

633. Dla danego k definiujemy relację równoważności R_k w zbiorze $\mathbb{N}^\mathbb{N}$ następująco:

$$f\ R_k\ g \;\Leftrightarrow\; \forall i < k\ f(i)\ r\ g(i),$$

gdzie r jest relacją z zadania 632.

(a) W zależności od k, jaka jest moc zbioru ilorazowego relacji R_k i jakie liczby kardynalne są mocami klas abstrakcji?
(b) Niech $R = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} R_k$. Łatwo zauważyć, że $f\ R\ g \Leftrightarrow \forall k\ f(k)\ r\ g(k)$. Jaka jest moc zbioru ilorazowego relacji R i jakie liczby kardynalne są mocami klas abstrakcji?

R634. Niech $\mathcal{R}$ oznacza zbiór wszystkich relacji równoważności w $\mathbb{N}$. Powiemy, że relacja $r \in \mathcal{R}$ jest *zgodna* z funkcją $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, gdy wykres f jest zawarty w r (czyli $\langle n, f(n)\rangle \in r$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$). Niech teraz $\varphi(f) = \{r \in \mathcal{R} \mid r \text{ zgodne z } f\}$.

(a) Czy jakaś relacja równoważności jest zgodna z każdą funkcją? Czy istnieje funkcja, z którą zgodne są wszystkie relacje równoważności?
(b) Jakiej mocy są zbiory $\varphi(\lambda n.\, 17)$ oraz $\varphi(\lambda n.\, 2 \cdot \lfloor n/2 \rfloor)$?

(c) Czy funkcja $\varphi : (\mathbb{N} \to \mathbb{N}) \to \mathsf{P}(\mathcal{R})$ jest różnowartościowa? Czy jest na zbiór $\mathsf{P}(\mathcal{R})$?

$^{\mathsf{R}}$635. Niech $\mathcal{U}$ będzie rodziną wszystkich relacji częściowo porządkujących zbiór $\mathbb{N}$, które są dobrze ufundowane. Rozważmy relację $\sqsubseteq$ w zbiorze $\mathcal{U}$ określoną następująco:

$$r \sqsubseteq s \qquad \Leftrightarrow \qquad \exists B \subseteq \mathbb{N}\,(r = s - \{\langle x, y\rangle \mid x \neq y \wedge y \in B\}).$$

(a) Udowodnić, że $\langle \mathcal{U}, \sqsubseteq\rangle$ jest częściowym porządkiem.
(b) Czy $\langle \mathcal{U}, \sqsubseteq\rangle$ jest dobrze ufundowany?
(c) Czy $\langle \mathcal{U}, \sqsubseteq\rangle$ ma element maksymalny, minimalny, największy, najmniejszy?
(d) Jakiej mocy jest rodzina wszystkich maksymalnych elementów porządku $\langle \mathcal{U}, \sqsubseteq\rangle$?

$^{\mathsf{R}}$636. Mówimy, że dwie relacje równoważności r i s w $\mathbb{N}$ są podobne wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka bijekcja $f : \mathbb{N} \xrightarrow[\text{na}]{1-1} \mathbb{N}$, że dla każdych x, y zachodzi równoważność

$$x\ r\ y \ \Leftrightarrow\ f(x)\ s\ f(y).$$

(a) Jaka jest moc zbioru wszystkich relacji równoważności podobnych do $\mathbf{1}_{\mathbb{N}}$ (relacji identycznościowej)?
(b) Jaka jest moc zbioru relacji równoważności podobnych do $\{\langle 0, 1\rangle, \langle 1, 0\rangle\} \cup \mathbf{1}_{\mathbb{N}}$?
(c) Czy istnieje taka relacja równoważności, że zbiór relacji równoważności podobnych do niej jest mocy continuum?

$^{\mathsf{R}}$637. Niech U będzie ustalonym zbiorem. Dla $C \subseteq U$ przyjmijmy, że $C^1 = C$ i $C^0 = U - C$. Niech teraz $\mathcal{C} = \{C_i\}_{i\in I}$, gdzie $I \neq \varnothing$, oraz $C_i \subseteq U$, dla wszystkich $i \in I$.

(a) Niech $U \neq \varnothing$. Wykazać, że rodzina wszystkich niepustych uogólnionych składowych[18] nad $\mathcal{C}$ jest podziałem zbioru U.
(b) Udowodnić, że jeśli $\overline{\overline{U}} = \aleph_0$, to wszystkie uogólnione składowe nad rodziną $\mathcal{C}$ są przeliczalne.
(c) Jaką moc ma rodzina wszystkich uogólnionych składowych nad $\mathcal{C}$, gdy $U = \varnothing$?

$^{\mathsf{R}}$638. Przy oznaczeniach zadania 637, niech $U = [0, 1]^{\mathbb{N}}$, $I = \mathbb{N}$ oraz $\mathcal{C} = \{C_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, gdzie:

$$C_i = \{f \in [0, 1]^{\mathbb{N}} \mid \tfrac{1}{2} \leq f(i) \leq 1\}, \text{ dla } i \in \mathbb{N}.$$

(a) Wykazać, że zbiór $\{C_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ ma moc $\aleph_0$.
(b) Udowodnić, że uogólnione składowe wyznaczone przez funkcje stałe $\lambda i.\,0$ i $\lambda i.\,1$, to odpowiednio zbiory $[0, \frac{1}{2})^{\mathbb{N}}$ i $[\frac{1}{2}, 1]^{\mathbb{N}}$.
(c) Wykazać, że każda uogólniona składowa nad rodziną $\mathcal{C}$ jest niepusta.

$^{\mathsf{R}}$639. Mając dany zbiór A oraz relację $r \subseteq A \times A$, *cyklem* w relacji r nazwiemy każdy niepusty ciąg skończony $\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ parami różnych elementów zbioru A, taki że

$$\langle x_1, x_2\rangle \in r, \ldots, \langle x_{n-1}, x_n\rangle \in r, \langle x_n, x_1\rangle \in r.$$

(Uwaga: jeśli $\langle x_1, x_1\rangle \in r$, to jednowyrazowy ciąg $\langle x_1\rangle$ jest cyklem.) Relację r nazwiemy *cykliczną*, jeśli każdy element $x \in A$ należy do pewnego cyklu.

(a) Czy suma dwóch relacji cyklicznych w A jest cykliczna?
(b) Czy przecięcie dwóch relacji cyklicznych w A jest cykliczne?
(c) Czy złożenie dwóch relacji cyklicznych w A jest cykliczne?
(d) Czy jeśli r jest cykliczna, to r^* jest relacją równoważności?
(e) Jaka jest moc rodziny wszystkich relacji cyklicznych w $\mathbb{N}$?

[18] Zob. zadanie 148.

R640. Niech $\Phi : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathsf{P}(\mathbb{N})$ będzie dana wzorem $\Phi(f) = \{x \mid f(x) = x\}$, dla $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

(a) Czy funkcja Φ jest różnowartościowa?
(b) Czy Φ jest na $\mathsf{P}(\mathbb{N})$?
(c) Czy relacja $\{\langle f, g\rangle \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid f^{-1}(\Phi(f)) = g^{-1}(\Phi(g))\}$ jest relacją równoważności?
(d) Czy relacja $\{\langle f, g\rangle \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid \Phi(f) \subseteq \Phi(g)\}$ jest częściowym porządkiem?
(e) Jakiej mocy jest $\Phi^{-1}(\{\mathbb{N}\})$?

R641. Niech $\mathcal{R}$ oznacza zbiór wszystkich relacji równoważności w $\mathbb{N}$ i niech $\Psi : \mathcal{R} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ będzie określona tak:

$$\Psi(r)(a) = \begin{cases} \overline{\overline{[a]_r}}, & \text{jeśli klasa } [a]_r \text{ jest skończona;} \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

(a) Czy Ψ jest różnowartościowa?
(b) Czy Ψ jest na $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$?
(c) Jakiej mocy jest zbiór $\mathcal{R}/_{\ker \Psi}$? (Wiadomo, że $\overline{\overline{\mathcal{R}}} = \mathfrak{C}$.)
(d) Czy istnieje taka relacja r, że (a) klasa $[r]_{\ker \Psi}$ ma 1 element? (b) klasa $[r]_{\ker \Psi}$ jest skończona ale ma więcej niż 1 element? (c) klasa $[r]_{\ker \Psi}$ jest nieskończona?

R642. Niech $D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ i niech $\mathcal{C} = D^{\mathbb{N}}$. Określamy relację równoważności $\sim$ w zbiorze $\mathcal{C}$, przyjmując $a \sim b$ wtedy i tylko wtedy, gdy ciągi a i b są wzajemnie swoimi podciągami.[19]

(a) Jakiej mocy jest zbiór ilorazowy $\mathcal{C}/_{\sim}$?
(b) Jakie liczby kardynalne są mocami klas abstrakcji tej relacji?

643. Niech $\mathbb{Z}_+$ oznacza zbiór liczb całkowitych dodatnich. Relacja $\lesssim$ w zbiorze $\mathsf{P}(\mathbb{Z}_+) - \{\varnothing\}$ określona jest następująco: $A \lesssim B$ wtedy i tylko wtedy, gdy każda liczba ze zbioru B dzieli się przez pewną liczbę ze zbioru A. Udowodnić, że relacja $\lesssim$ nie jest porządkiem częściowym, ale jest *quasiporządkiem*, czyli jest przechodnia i zwrotna.

644. Relacja $\lesssim$ z zadania 643 wyznacza następującą relację $\sim$ w zbiorze $\mathsf{P}(\mathbb{Z}_+) - \{\varnothing\}$:

$$A \sim B \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } A \lesssim B \text{ i } B \lesssim A.$$

(a) Udowodnić, że $\sim$ jest relacją równoważności.
(b) Niech $\preceq$ będzie relacją w zbiorze ilorazowym $\mathsf{P}(\mathbb{Z}_+) - \{\varnothing\}/_{\sim}$ określoną warunkiem

$$[A]_{\sim} \preceq [B]_{\sim} \quad \Leftrightarrow \quad A \lesssim B.$$

Pokazać, że $\preceq$ jest relacją częściowego porządku.

R645. Niech $\sim$ będzie relacją równoważności, o której mowa w zadaniu 644.

(a) Jaka jest moc zbioru ilorazowego relacji $\sim$?
(b) Jakie liczby kardynalne są mocami klas abstrakcji tej relacji?

646. Przy oznaczeniach zadań 643–645, niech $A \lessapprox B$ oznacza, że każda liczba ze zbioru A dzieli pewną liczbę ze zbioru B. Dalej, niech $A \approx B$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $A \lessapprox B$ i $B \lessapprox A$.

(a) Udowodnić, że relacje $\sim$ i $\approx$ są różne.
(b) Jaka jest moc zbioru ilorazowego relacji $\approx$?
(c) Jakie liczby kardynalne są mocami klas abstrakcji tej relacji?

[19] Ciąg a jest *podciągiem* ciągu b, gdy istnieje taka rosnąca funkcja $\psi : \mathbb{N} \xrightarrow{1-1} \mathbb{N}$, że $\forall i (b(\psi(i)) = a(i))$.

R647. Niech $\mathcal{R}$ będzie zbiorem wszystkich relacji równoważności w $\mathbb{N}$. Wiadomo, że jest to zbiór mocy continuum. Określamy funkcję $\mathcal{F} : \mathcal{R} \to (\mathsf{P}(\mathbb{N}) \to \mathsf{P}(\mathbb{N}))$ w ten sposób, że

$$\mathcal{F}(r)(A) = \{\min[x]_r \mid x \in A\}.$$

(a) Czy funkcja $\mathcal{F}$ jest różnowartościowa? Czy jest na $\mathsf{P}(\mathbb{N}) \to \mathsf{P}(\mathbb{N})$?.
(b) Dla jakich relacji r funkcja $\mathcal{F}(r)$ jest różnowartościowa? Dla jakich r jest „na"?
(c) Jaka jest moc zbioru $\mathcal{S} = \{r \in \mathcal{R} \mid \exists i.\ \mathcal{F}(r)(\{i\}) \subseteq \mathcal{F}(r)(\{i+1\})\}$?

R648. Niech $R \subseteq X \times X$ będzie relacją spełniającą warunek:

dla każdego $x \in X$ zbiór $R^{-1}(x) = \{y \in X \mid y\, R\, x\}$ jest skończony. (*)

Dla $A \subseteq X$, niech $R[A] = \{x \in X \mid R^{-1}(x) \subseteq A\}$. (Nieformalnie: element x należy do $R[A]$ gdy wszystkie jego „R-poprzedniki" są w zbiorze A.) Mówimy, że zbiór A jest *R-indukcyjny*, gdy $R[A] \subseteq A$. Zbiór $\overline{R} = \bigcap\{A \mid R[A] \subseteq A\}$, to iloczyn wszystkich takich zbiorów. Zdefiniujmy jeszcze $A_0 = \varnothing$, $A_{n+1} = A_n \cup R[A_n]$, $A_\omega = \bigcup\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

(a) Co to jest $R[\varnothing]$, w szczególności co to jest $\varnothing[\varnothing]$?
(b) Niech $R = \{\langle m, n\rangle \in (\mathbb{N} - \{0,1\})^2 \mid m \,|\, n \wedge m \neq n\}$ będzie relacją właściwej podzielności w zbiorze $\mathbb{N} - \{0,1\}$. Czy $6 \in A_2$? Czy $24 \in \mathcal{A}_2$? Czy $24 \in \mathcal{A}_\omega$?
(c) Udowodnić, że zbiór $\overline{R}$ jest R-indukcyjny.
(d) Udowodnić, że $\overline{R} = A_\omega$.
(e) Czy założenie (*) jest istotne w zadaniu (648d)?

R649. Niech $\mathcal{R}$ będzie zbiorem wszystkich relacji częściowego porządku w $\mathbb{N}$. Wiadomo, że jest to zbiór mocy continuum. Określamy funkcję $F : \mathcal{R} \to \mathsf{P}(\mathbb{N})$ w ten sposób, że dla $r \in \mathcal{R}$:

$$F(r) = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ jest elementem minimalnym zbioru uporządkowanego } \langle \mathbb{N}, r\rangle\}.$$

(a) Czy funkcja F jest różnowartościowa? Czy jest na $\mathsf{P}(\mathbb{N})$?.
(b) Wyznaczyć obraz zbioru $D = \{r \in \mathcal{R} \mid r \text{ jest dobrze ufundowany}\}$ przy przekształceniu F. Jaka jest moc zbioru D?
(c) Niech $\mathcal{Z} = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid \overline{\overline{A}} \leq 1\}$. Jaka jest moc zbioru $F^{-1}(\mathcal{Z})$?

R650. W zbiorze $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ określamy relację r w taki sposób, że $f\, r\, g$, wtedy i tylko wtedy, gdy różnica $f(n) - g(n)$ jest dla każdego $n \in \mathbb{N}$ liczbą wymierną. Wiadomo, że jest to relacja równoważności.

(a) Znaleźć wszystkie liczby kardynalne $\mathfrak{m}$, dla których istnieje klasa abstrakcji relacji r o mocy $\mathfrak{m}$.
(b) Jakiej mocy jest zbiór wszystkich klas abstrakcji relacji r?

R651. Dla $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ piszemy $f \preceq g$, gdy istnieje taka funkcja $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, że $f(n) \leq h(g(n))$ dla dowolnego n. Napiszemy zaś $f \equiv g$, gdy zarówno $f \preceq g$ jak i $g \preceq f$.

(a) Udowodnić, że $f \preceq g$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego zbioru $S \subseteq \mathbb{N}$, jeśli obraz $g(S)$ jest ograniczony z góry, to obraz $f(S)$ też jest ograniczony z góry.
(b) Jakiej mocy jest zbiór ilorazowy relacji $\equiv$?
(c) Jakie są moce klas abstrakcji tej relacji?

Logika zdaniowa

652. Zbadać, czy następujące formuły są tautologiami rachunku zdań i czy są spełnialne:

(a) $(p \to r) \wedge (q \to s) \wedge (\neg p \vee \neg s) \to (\neg p \vee \neg q)$;

(b) $(p \to q) \vee (q \to r)$;
(c) $((p \to q) \to r) \wedge \neg(((q \to r) \to r) \to r)$;
(d) $(p \to q) \wedge (\neg p \to r) \to (\neg q \to r)$;
(e) $(p \to q) \wedge (\neg p \to r) \to (r \to \neg q)$;
(f) $((\neg p \to q) \to r) \to \neg(p \to q)$;
(g) $p \vee (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$;
(h) $(p \to q) \vee (p \to \neg q)$;
(i) $q \vee r \to (p \vee q \to p \vee r)$;
(j) $(p \vee q \vee r) \wedge (q \vee (\neg p \wedge s)) \wedge (\neg s \vee q \vee r) \to q$;
(k) $(p \vee q) \leftrightarrow ((p \to q) \to q)$;
(l) $(p \wedge q) \leftrightarrow \neg(p \to \neg q)$;
(m) $((p \to q) \to r) \to ((r \to p) \to (s \to p))$;
(n) $((p \to q) \to p) \to (p \to q)$.

653. Zbadać, czy następujące formuły są tautologiami rachunku zdań i czy są spełnialne:
(a) $((p \to q) \to q) \to p$;
(b) $((p \to q) \to q) \leftrightarrow (\neg p \to q)$;
(c) $(p \to q \vee r) \to (p \to q) \vee (p \to r)$;
(d) $((p \vee q) \to r) \to (p \to r) \vee (q \to r)$;
(e) $(p \to q) \wedge (\neg p \to r) \to (r \to \neg q)$;
(f) $(p \wedge q \to r) \to ((p \wedge \neg r) \to \neg q)$;
(g) $(p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)) \leftrightarrow ((p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r)$;
(h) $(r \to p) \wedge (\neg r \to q) \leftrightarrow (r \wedge p) \vee (\neg r \wedge q)$;
(i) $(p \to q) \wedge (r \to s) \leftrightarrow (p \wedge r \to q \wedge s)$;

654. Czy zachodzą następujące wynikania?
(a) $p \to q, q \models p$;
(b) $p \wedge q \to \neg r, p \models r \to \neg q$;
(c) $p \to q, p \to (q \to r) \models p \to r$;
(d) $p \to (q \to r), p \to q \models q \to r$;
(e) $(p \to q) \to r, \neg p \models r$;
(f) $(p \to q) \to r, \neg r \models p$;
(g) $(p \to q) \to r, \neg q \models \neg r$;
(h) $p \to q, r \to \neg q \models r \to \neg p$.

655. Udowodnić, że dla dowolnej funkcji $f : \{0,1\}^k \to \{0,1\}$ istnieje formuła α, w której występują tylko zmienne zdaniowe ze zbioru $\{p_1, \ldots, p_k\}$, o tej własności, że dla dowolnego wartościowania zdaniowego v zachodzi równość $v(\alpha) = f(v(p_1), \ldots, v(p_k))$. (Inaczej mówiąc, formuła α definiuje funkcję zerojedynkową f.)

R656. Znaleźć (o ile istnieje) taką formułę zdaniową α, aby następująca formuła była tautologią rachunku zdań:
(a) $((r \to (\neg q \wedge p)) \to \alpha) \to (\alpha \wedge (p \to q) \wedge r)$;
(b) $(\alpha \to p) \to (p \to q)$;
(c) $((p \to \alpha) \to q) \to (q \to (\neg p \to \neg \alpha))$;
(d) $(\alpha \to p) \to (\neg \alpha \to q)$;

(e) $((\alpha \wedge q) \to \neg p) \to ((\alpha \to p) \to \neg q)$;
(f) $((\neg\alpha \to p) \to q) \to (\alpha \wedge q \to \neg p)$;
(g) $((\alpha \to p) \wedge q) \to (\alpha \vee q \to p)$;
(h) $((\alpha \to p) \wedge q) \to (\alpha \vee q \to \neg p)$.

657. Znaleźć (o ile istnieje) taką formułę zdaniową α, aby następujące formuły były jednocześnie tautologiami rachunku zdań:
   (a) $(\alpha \wedge p) \leftrightarrow (p \wedge q)$ oraz $(\alpha \vee p) \leftrightarrow (p \vee r)$;
   (b) $(q \to \alpha) \leftrightarrow (q \to (p \wedge r))$ oraz $(\alpha \to q) \leftrightarrow (\neg(p \vee r) \to q)$;
   (c) $(p \to \alpha) \leftrightarrow (q \to (\neg p \vee r))$ oraz $((r \to q) \to p) \leftrightarrow (\neg p \to \neg\alpha)$.

658. Załóżmy, że zmienna zdaniowa p nie występuje w formułach $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1 \dots, \beta_m$. Pokazać, że formuła $(\alpha_1 \vee \dots \vee \alpha_n) \wedge (\beta_1 \vee \dots \vee \beta_m)$ jest tautologią rachunku zdań wtedy i tylko wtedy, gdy tautologią jest formuła $(p\wedge\alpha_1)\vee\dots\vee(p\wedge\alpha_n)\vee(\neg p\wedge\beta_1)\vee\dots\vee(\neg p\wedge\beta_m)$.

659. Załóżmy, że zmienna zdaniowa p nie występuje w formułach $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1 \dots, \beta_m$. Pokazać, że formuła $(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n) \vee (\beta_1 \wedge \dots \wedge \beta_m)$ jest spełnialna wtedy i tylko wtedy, gdy spełnialna jest formuła $(p \vee \alpha_1) \wedge \dots \wedge (p \vee \alpha_n) \wedge (\neg p \vee \beta_1) \wedge \dots \wedge (\neg p \vee \beta_m)$.

660. Załóżmy, że zmienne zdaniowe $q_1, \dots, q_{n-3}$ (gdzie $n \geq 4$) nie występują w formułach $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Udowodnić, że formuła $(\alpha_1 \vee \dots \vee \alpha_n)$ jest spełnialna wtedy i tylko wtedy, gdy spełnialna jest formuła $(\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee q_1) \wedge (\alpha_3 \vee \neg q_1 \vee q_2) \wedge \dots \wedge (\alpha_{n-2} \vee \neg q_{n-4} \vee q_{n-3}) \wedge (\alpha_{n-1} \vee \alpha_n \vee \neg q_{n-3})$.

R661. Niech S będzie pewnym nieskończonym zbiorem formuł zdaniowych zbudowanych ze zmiennych $p_1, \dots, p_n$. Udowodnić, że istnieje taki nieskończony podzbiór A zbioru S, że wszystkie formuły w A są parami równoważne.[20]

662. Metodą naturalnej dedukcji udowodnić następujące formuły:
   R (a) $(p \wedge q \to r) \to (p \to (q \to r))$;
   R (b) $(p \to q) \to ((\neg p \to q) \to q)$;
   R (c) $(p \to q \vee r) \to (\neg((p \to q) \vee r) \to (p \to q))$;
   R (d) $(p \to q \vee r) \to (p \to q) \vee r$; (*Wskazówka: rozwiązać najpierw zadanie 662c*);
   R (e) $(\neg p \to \neg q) \wedge (\neg p \to q) \to p$;
   (f) $(p \to q \vee r) \to (p \to q) \vee (p \to r)$;
   (g) $(p \to q) \vee (q \to p)$.

663.* Metodą naturalnej dedukcji udowodnić następujące formuły:
   (a) $((p \to q) \to r) \to ((q \to s) \to r) \to r$;
   (b) $(p \to q) \vee (\neg p \to r)$.

Logika predykatów

664. Zapisać następujące stwierdzenia w języku arytmetyki liczb naturalnych $(+, \cdot, 0, 1, =)$ używając symboli logicznych i kwantyfikatorów:
   (a) *Liczba a jest mniejsza lub równa liczbie b.*
   (b) *Liczba a jest resztą z dzielenia liczby b przez c.*
   (c) *Liczba a jest pierwsza.*
   (d) *Liczba a jest największym wspólnym dzielnikiem liczb b i c, chyba, że jest parzysta.*

[20] Zadanie ściągnięte z Uniwersytetu Wrocławskiego

(e) *Liczby x i y mają te same dzielniki pierwsze.*
(f) *Pewne liczby są parzyste a inne nie są.*
(g) *Nie każda liczba jest parzysta.*
(h) *Żadna liczba parzysta nie jest mniejsza od każdej liczby pierwszej.*
(i) *Zbiór liczb pierwszych jest nieskończony.*
(j) *Warunkiem koniecznym na to, aby n było nieparzyste, jest aby n było podzielne przez 6.*
(k) *Prawie wszystkie liczby naturalne są parzyste.*

665. W strukturze $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, P^{\mathcal{A}}, Q^{\mathcal{A}} \rangle$, gdzie:
$\langle a, b\rangle \in P^{\mathcal{A}}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a + b \geq 6$;
$\langle a, b\rangle \in Q^{\mathcal{A}}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $b = a + 2$,
wyznaczyć wartość formuł:

(a) $\forall x P(x, y) \to \exists x Q(x, y)$;
(b) $\forall x P(x, y) \to \forall x Q(x, y)$;
(c) $\forall x P(x, y) \to \exists x Q(x, z)$;

przy wartościowaniach $v(y) = 7$, $v(z) = 1$ oraz $u(y) = 3, u(z) = 2$.

666. Wyznaczyć wartość formuły

(a) $\forall y(\forall x(r(z, f(x, y)) \to r(z, y)))$;
(b) $\forall y(\forall x(r(z, f(x, y))) \to r(z, y))$;
(c) $\forall x(\neg r(x, z) \to \exists y\, r(f(x, y), z))$.

w strukturze $\mathcal{A} = \langle \mathbb{Z}, f^{\mathcal{A}}, r^{\mathcal{A}} \rangle$, przy wartościowaniach $v(z) = 5$ i $w(z) = 7$, jeżeli:

(a) $f^{\mathcal{A}}(m, n) = \min(m, n)$, dla $m, n \in \mathbb{Z}$, a $r^{\mathcal{A}}$ jest relacją $\geq$;
(b) $f^{\mathcal{A}}(m, n) = m^2 + n^2$, dla $m, n \in \mathbb{Z}$, a $r^{\mathcal{A}}$ jest relacją $\leq$;
(c) $f^{\mathcal{A}}(m, n) = 5mn$, dla $m, n \in \mathbb{Z}$, a $r^{\mathcal{A}}$ jest relacją podzielności.

667. Wyznaczyć wartość zdania $\forall xy(\exists z(r(z, x) \wedge r(z, y)) \to r(x, y))$

(a) w strukturze $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, r^{\mathcal{A}} \rangle$, gdzie $r^{\mathcal{A}}$ jest relacją podzielności;
(b) w strukturze $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, r^{\mathcal{A}} \rangle$, gdzie $r^{\mathcal{A}}$ jest relacją przystawania modulo 7,

668. Wyznaczyć wartości następujących formuł przy wartościowaniu $v(x) = 9$, $v(y) = 2$, $v(z) = 0$, w strukturze $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, L^{\mathcal{A}}, E^{\mathcal{A}}, f^{\mathcal{A}} \rangle$, gdzie $L^{\mathcal{A}}$ to relacja ostrej mniejszości, $E^{\mathcal{A}}$ to parzystość, a f to dodawanie, oraz w strukturze $\mathcal{B} = \langle \mathbb{N}, L^{\mathcal{B}}, E^{\mathcal{B}}, f^{\mathcal{B}} \rangle$, gdzie $L^{\mathcal{B}}$ to relacja podzielności, $E^{\mathcal{B}}$ to pierwszość, a f to mnożenie.

(a) $\forall xy\, L(x, f(x, y))$;
(b) $\forall y\, L(x, f(x, y))$;
(c) $\forall x \exists y\, (E(y) \wedge L(x, y))$;
(d) $\forall xy\, (E(x) \wedge E(y) \to E(f(x, y))$;
(e) $\forall y\, (E(x) \wedge E(y) \to E(f(x, y))$;
(f) $\forall y\, (\neg E(f(x, y)) \leftrightarrow E(f(y, z)))$;

669. Wyznaczyć wartość formuły $\forall x(\neg r(x, y) \to \exists z(r(f(x, z), g(y))))$ w $\mathcal{A} = \langle \mathbb{Q}, f^{\mathcal{A}}, g^{\mathcal{A}}, r^{\mathcal{A}} \rangle$, gdzie $f^{\mathcal{A}}$ jest mnożeniem, relacja $r^{\mathcal{A}}$ jest równością, a $g^{\mathcal{A}}(q) = q + 1$ dla $q \in \mathbb{Q}$, przy wartościowaniach $v(y) = 0$, $w(y) = -1$ i $u(y) = 2$.

670. Podać przykład modelu i wartościowania, przy którym formuła
$$P(x, f(x)) \to \forall x \exists y P(f(y), x)$$
a) jest spełniona; b) nie jest spełniona.

671. Dla każdej z poniższych par struktur wskazać formułę otwartą (bez kwantyfikatorów) spełnialną w jednej z nich, a w drugiej nie.

(a) $\langle \mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1, = \rangle$ i $\langle \mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, = \rangle$;
(b) $\langle \mathbb{N}, +, 0, = \rangle$ i $\langle \mathbb{N}, \cdot, 1, = \rangle$;
(c) $\langle P_2, \| \rangle$ i $\langle P_2, \perp \rangle$, gdzie P_2 oznacza zbiór wszystkich prostych w $\mathbb{R}^2$;
(d) $\langle P_2, \perp \rangle$ i $\langle P_3, \perp \rangle$, gdzie P_2 i P_3 to zbiory wszystkich prostych w $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$;
(e) $\langle \mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, = \rangle$ i $\langle P(\mathbb{N}), \cup, \cap, \varnothing, \mathbb{N}, = \rangle$;
(f) $\langle \mathbb{N}, \leq, 0 \rangle$ i $\langle \mathbb{Z}, \leq, 0 \rangle$;
(g) $\langle \mathbb{N}, +, 0, = \rangle$ i $\langle \{a, b\}^*, \cdot, \varepsilon, = \rangle$.

R672. Podać przykład zdania prawdziwego w strukturze $\langle \mathbb{N}, +, 0, = \rangle$ ale nie w $\langle \mathbb{N}^2, \#, \langle 0, 0 \rangle, = \rangle$, gdzie operacja # jest określona tak: $\langle a, b \rangle \# \langle c, d \rangle = \langle a + c, b + d \rangle$.

R673. Napisać takie zdania φ i ψ. że:

(a) zdanie φ jest prawdziwe dokładnie w tych modelach $\mathcal{A} = \langle A, R^{\mathcal{A}}, S^{\mathcal{A}} \rangle$, w których relacje dwuargumentowe $R^{\mathcal{A}}$, $S^{\mathcal{A}}$ są przechodnie, ale ich suma nie jest przechodnia;
(b) zdanie ψ jest prawdziwe dokładnie w tych modelach $\mathcal{A} = \langle A, r^{\mathcal{A}}, s^{\mathcal{A}}, g^{\mathcal{A}}, = \rangle$, w których zbiór $s^{\mathcal{A}}$ jest obrazem iloczynu kartezjańskiego $r^{\mathcal{A}} \times r^{\mathcal{A}}$ przy dwuargumentowej funkcji $g^{\mathcal{A}}$.

674. Symbole relacyjne R i S i symbol funkcyjny f są jednoargumentowe. Napisać zdanie φ, które jest prawdziwe w modelu $\mathcal{A} = \langle A, R^{\mathcal{A}}, S^{\mathcal{A}}, f^{\mathcal{A}}, = \rangle$, wtedy i tylko wtedy, gdy:

(a) obraz zbioru $R^{\mathcal{A}}$ przy funkcji $f^{\mathcal{A}}$ zawiera się w zbiorze $S^{\mathcal{A}}$.
(b) zbiór $S^{\mathcal{A}}$ jest przeciwobrazem zbioru $R^{\mathcal{A}}$ przy przekształceniu f.

675. Napisać zdanie φ, które jest prawdziwe w modelu $\langle \mathbb{N}, s, = \rangle$, gdzie s oznacza następnik, a nie jest prawdziwe

(a) w modelu $\langle \mathbb{N}, q, = \rangle$, gdzie $q(n) = n^2 + 1$, dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$.
(b) w modelu $\langle \mathbb{N}, g, = \rangle$, gdzie $g(n) = n^2 \bmod 7$, dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$.

676. Czy istnieje zdanie φ, które jest prawdziwe w modelu z zadania 675b, ale nie jest prawdziwe w modelu $\langle \mathbb{N}, h, = \rangle$, gdzie $h(n) = n^2 \bmod 9$, dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$?

677. Dla każdej z par struktur:

(a) $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ i $\langle \{m - \frac{1}{n} \mid m, n \in \mathbb{N} - \{0\}\}, \leq \rangle$;
(b) $\langle \mathbb{N}, +, = \rangle$ i $\langle \mathbb{Z}, +, = \rangle$;
(c) $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ i $\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$;
(d) $\langle \mathbb{Q}, +, = \rangle$ i $\langle \mathbb{R}, \cdot, = \rangle$,

wskazać zdanie prawdziwe w jednej z nich a w drugiej nie.

678. Czy istnieje formuła otwarta:

(a) spełnialna w strukturze $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$, ale nie w $\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$?
(b) spełnialna w strukturze $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$, ale nie w $\langle \mathbb{R}, \leq \rangle$?
(c) spełnialna w $\langle P_2, \| \rangle$, ale nie w $\langle P_3, \| \rangle$, gdzie P_2 i P_3 są jak w zadaniu 671d?

679. Wskazać (o ile istnieje) model i wartościowanie spełniające daną formułę i nie spełniające tej formuły:

(a) $\forall y(r(x) \to r(y))$;
(b) $\forall y(r(x) \wedge r(y) \to r(f(x,y)))$;
(c) $\forall x(q(x,y) \to q(f(x),y))$;
(d) $\forall x \forall y(r(x) \wedge r(y) \to r(f(x,y)))$;
(e) $\forall x(r(x) \vee p(x)) \to (\forall x r(x) \vee \forall x p(x))$;
(f) $\forall x \exists y(q(x,y) \vee \forall y \neg q(x,y))$;
(g) $\exists x \forall y \exists z(q(x,z) \wedge \neg q(x,y))$;
(h) $\forall x \forall y(\neg(x=y) \to \exists z(P(x,z) \wedge P(y,z))$;
(i) $\forall x \exists y \exists z(\neg(y=z) \wedge P(x,y) \wedge P(x,z))$.

680. Wskazać (o ile istnieje) model spełniający dane zdanie i nie spełniający tego zdania:

(a) $\forall x \forall y \exists z\,(R(x,y) \to R(x,z) \wedge R(z,y))$;
(b) $\forall x\,(P(x) \leftrightarrow \neg P(f(x))) \wedge \forall x(Q(x) \leftrightarrow \neg Q(f(f(x)))) \wedge \exists x\,(P(x) \wedge \neg Q(x))$.
(c) $\forall x \exists y \forall z(P(x,y) \leftrightarrow \neg P(y,z))$.
(d) $\exists x \forall y \exists z\,(P(x,y) \vee (P(x,z) \wedge P(z,y)))$;
(e) $\forall x \exists y \forall z\,(P(x,z) \vee (P(x,y) \wedge P(z,y)))$.

681. Napisać zdanie prawdziwe dokładnie w tych modelach $\langle A, r^A\rangle$, w których $r^A = B \times C$, dla pewnych zbiorów B, C.

682. Symbol relacyjny S jest dwuargumentowy, a symbol relacyjny P jest jednoargumentowy. Napisać zdanie prawdziwe dokładnie w tych modelach $\mathcal{A} = \langle A, S^{\mathcal{A}}, P^{\mathcal{A}}, =\rangle$, w których

(a) relacja $S^{\mathcal{A}}$ jest funkcją o dziedzinie $P^{\mathcal{A}}$;
(b) $S^{\mathcal{A}}$ jest relacją równoważności i ma dokładnie trzy klasy abstrakcji;
(c) zbiór $P^{\mathcal{A}}$ jest rzutem relacji $S^{\mathcal{A}}$ na pierwszą współrzędną.

683. Symbole relacyjne S i R są dwuargumentowe. Napisać zdanie prawdziwe dokładnie w tych modelach $\mathcal{A} = \langle A, S^{\mathcal{A}}, R^{\mathcal{A}}, =\rangle$, w których

(a) Złożenie relacji R^A z relacją S^A jest identyczne ze złożeniem relacji S^A z relacją R^A.
(b) Relacja S^A jest najmniejszą relacją symetryczną zawierajacą R^A.

684. Symbole f, g są jednoargumentowe, a symbol relacji r jest dwuargumentowy. Napisać zdanie φ, które jest prawdziwe dokładnie w tych modelach $\mathcal{A} = \langle A, f^{\mathcal{A}}, g^{\mathcal{A}}, r^{\mathcal{A}}, =\rangle$, gdzie

(a) funkcja $f^{\mathcal{A}}$ jest odwrotna do $g^{\mathcal{A}}$;
(b) funkcja $f^{\mathcal{A}}$ jest funkcją stałą;
(c) relacja $r^{\mathcal{A}}$ nie jest ani spójna ani symetryczna.

685. Symbole f, g są jednoargumentowe, a symbol relacji r jest dwuargumentowy. Napisać zdanie φ, prawdziwe dokładnie w tych modelach $\mathcal{A} = \langle A, f^{\mathcal{A}}, g^{\mathcal{A}}, r^{\mathcal{A}}, =\rangle$, gdzie

(a) jednoargumentowe funkcje $f^{\mathcal{A}}$ i $g^{\mathcal{A}}$ są różne;
(b) jednoargumentowa funkcja $f^{\mathcal{A}}$ nie jest różnowartościowa;
(c) $r^{\mathcal{A}}$ nie jest przechodnia.

R686. Symbole f, r i s są dwuargumentowe. Napisać (możliwie najprostsze) zdanie, prawdziwe dokładnie w tych modelach $\mathcal{A} = \langle A, r^{\mathcal{A}}, s^{\mathcal{A}}, f^{\mathcal{A}}, =\rangle$, gdzie

(a) Iloczyn mnogościowy relacji $r^{\mathcal{A}}$ i $s^{\mathcal{A}}$ zawiera się w ich złożeniu;

(b) Iloczyn mnogościowy relacji $r^{\mathcal{A}}$ i $s^{\mathcal{A}}$ zawiera się w ich sumie;
(c) Obraz iloczynu $\mathrm{id}_A \cap r^{\mathcal{A}}$ przy funkcji $f^{\mathcal{A}}$ ma mniej niż dwa elementy.

R687. Symbole relacyjne r i s i symbol funkcyjny f są dwuargumentowe Napisać (możliwie najkrótsze) zdanie, które jest prawdziwe dokładnie w tych modelach $\mathcal{A} = \langle A, r^{\mathcal{A}}, s^{\mathcal{A}}, f^{\mathcal{A}} \rangle$, gdzie

(a) Złożenie relacji $r^{\mathcal{A}}$ i $s^{\mathcal{A}}$ zawiera się w ich iloczynie $r^{\mathcal{A}} \cap s^{\mathcal{A}}$;
(b) Zbiór wartości funkcji f jest rzutem sumy $r^{\mathcal{A}} \cup s^{\mathcal{A}}$ na pierwszą współrzędną;
(c) Relacja $r^{\mathcal{A}}$ nie jest funkcją z A w A;
(d) Obraz zbioru $A \times A$ przy funkcji $f^{\mathcal{A}}$ jest pusty.

688. Podać przykład nieskończonego zbioru parami nierównoważnych formuł, w których występuje tylko jeden symbol relacyjny i tylko jedna zmienna wolna.

R689. Zbadać czy następujące formuły są tautologiami i czy są spełnialne:

(a) $\exists x \forall y (P(x) \vee Q(y)) \to \forall y (P(f(y)) \vee Q(y))$
(b) $\forall y (P(f(y)) \vee Q(y)) \to \exists x \forall y (P(x) \vee Q(y))$.

R690. Zbadać, czy następujące formuły są tautologiami:

(a) $\exists y \forall z (P(y) \to Q(z)) \to (\exists y P(y) \to \forall z Q(z))$;
(b) $(\exists y P(y) \to \forall z Q(z)) \to \forall y \forall z (P(y) \to Q(z))$.

R691. Zbadać, czy następujące formuły są tautologiami:

(a) $\exists x (P(x) \to \forall y Q(y)) \to \exists x \forall y (P(x) \to Q(y))$;
(b) $\exists x (\forall y Q(y) \to P(x)) \to \exists x \forall y (Q(y) \to P(x))$;
(c) $\exists x (\forall y Q(y) \to P(x)) \to \exists x (Q(x) \to P(x))$.

R692. Pokazać, że następujące formuły są tautologiami:[21]

(a) $(\forall x \exists y\, r(x,y) \to \exists x \forall y\, r(y,x)) \to \exists x \forall y (r(x,y) \to r(y,x))$;
(b) $\forall x \exists y ((p(x) \to q(y)) \to r(y)) \to ((\forall x p(x) \to \forall y q(y)) \to \exists y r(y))$;
(c) $\forall x (p(x) \to \exists y q(y)) \to \exists y (\exists x p(x) \to q(y))$.
(d) $(\forall x\, P(x) \to \forall y\, Q(y)) \to \exists x\, (P(x) \to \forall y\, Q(y))$;
(e) $\exists y (P \to Q(y)) \leftrightarrow (P \to \exists y\, P(y))$.

R693. Czy następujące formuły są tautologiami?

(a) $\forall x (p(x) \to q(x)) \vee \forall x (q(x) \to p(x))$;
(b) $\exists x (P(x) \to \forall y\, P(y))$;
(c) $\forall x \exists y \forall u \exists v\, P(x,y,u,v) \to \forall u \exists v \forall x \exists y\, P(x,y,u,v)$;
(d) $(\exists x \exists y\, P(x,y) \to \forall y\, R(y)) \to \forall x\, (P(x,x) \to R(x)))$.

694. Zbadać, czy następujące formuły są tautologiami:

(a) $\forall x \exists y (P(x) \to R(x,y)) \to \forall x (P(x) \to \exists y R(x,y))$;
(b) $\forall x \exists y (R(x,y) \to P(x)) \to \forall x (\exists y R(x,y) \to P(x))$.

695. Zbadać czy następujące formuły są tautologiami i czy są spełnialne:

(a) $\forall y (\exists x R(x,y) \to R(y,y)) \to \forall y R(y,y)$.
(b) $(\forall y P(y) \to Q(x)) \to \exists y (P(y) \to Q(x))$.

[21]Wskazówka: Przekształcić formuły do odpowiedniej postaci, stosując prawa De Morgana i prawa dystrybutywności.

696. Które z następujących formuł są spełnialne i które są tautologiami?
   (a) $\exists x \exists y (Q(x) \to P(y)) \to (\forall x Q(x) \to \exists y P(y))$;
   (b) $\forall x \exists y (f(y) = x) \to \forall x \forall y (f(x) = f(y) \to x = y)$?

697. Które z następujących formuł są spełnialne i które są tautologiami?
   (a) $\forall x \exists y (R(x, y) \vee \forall z \neg R(x, z))$;
   (b) $\forall x((P(x) \to P(y)) \to Q) \to Q$;
   (c) $\exists x \exists y (P(x) \to Q(y)) \to \exists x (P(x) \to Q(x))$;

698. Pokazać, że formuła $\forall x \exists y\, (R(x, y) \to P(x, y)) \to \forall x\, (\exists y\, R(x, y) \to \exists y\, P(x, y))$ jest spełnialna, ale nie jest tautologią.

699. Czy formuła $(\forall x \exists y Q(x, y) \to \forall x P(x)) \to \forall x \exists y (Q(x, y) \to P(x))$ jest tautologią? A implikacja odwrotna?

700. Które z następujących zdań są spełnialne i które są tautologiami?
   (a) $\exists x (Q(x) \to P(x)) \to (\forall x Q(x) \to \exists y P(y))$;
   (b) $\forall x (P(x) \to P(f(x))) \to \forall x P(f(x))$;
   (c) $\forall x P(f(x)) \to \forall x P(x)$?

701. Które z następujących zdań są spełnialne i które są tautologiami?
   (a) $\forall xyz (R(x, y) \vee R(y, z) \vee R(z, x)) \to \forall xy (R(x, y) \vee R(y, x))$;
   (b) $\forall xy (R(x, y) \vee R(y, x)) \to \forall xyz (R(x, y) \vee R(y, z) \vee R(z, x))$;
   (c) $\forall xyz (R(x, y) \vee R(y, z) \vee R(z, x)) \to \forall xy \exists z (R(x, z) \vee R(z, y))$?

702. Czy następujące formuły są tautologiami i czy są spełnialne?
   (a) $\exists x \exists y (P(x) \to Q(y)) \to \exists x (P(x) \to Q(x))$;
   (b) $\forall x \exists y \forall z (R(x, y) \wedge (R(y, z) \to R(x, z))$?

R703. Która z następujących implikacji jest tautologią, a która nie?
   (a) $\forall x \exists y ((P(x) \to Q(y)) \to R(y)) \to ((\forall x P(x) \to \forall y Q(y)) \to \exists y R(y))$;
   (b) $\forall x \exists y ((P(x) \to Q(y)) \to R(y)) \to ((\forall x P(x) \to \exists y Q(y)) \to \exists y R(y))$.

R704. Która z następujących implikacji jest tautologią, a która nie?
   (a) $\forall x (P(x) \to \exists y Q(y)) \to \exists y (\exists x P(x) \to Q(y))$;
   (b) $\exists y (\forall x P(x) \to Q(y)) \to \forall x (P(x) \to \exists y Q(y))$.

705. Pokazać, że poniższe formuły są spełnialne tylko w strukturach nieskończonych:
   (a) $\forall x \exists y \forall z (R(z, y) \Leftrightarrow z = x) \wedge \neg \exists y R(y, x)$;
   (b) $\neg \forall y P(y) \wedge \forall x \exists y (P(y) \wedge x = f(y))$.

   Podać przykład formuły o tej własności, w której nie występuje równość.

R706. Która z następujących formuł jest tautologią?
   (a) $(\forall x R(x) \to \exists y S(y)) \to \forall x \exists y (R(x) \to S(y))$;
   (b) $(\forall x\, R(x) \to \exists y\, S(y)) \to \exists x (R(x) \to S(x))$.

R707. Pokazać, że zdanie $\neg \forall x \exists y\, (x = f(y)) \wedge \forall xy (f(x) = f(y) \to x = y)$ jest spełnialne, ale tylko w modelach nieskończonych. Czy można napisać takie zdanie w języku, w którym nie ma symboli funkcyjnych ani równości?

Klasówki i egzaminy:

- Klasówka 11 grudnia 2007: zad. 108.
- Dwie klasówki 13 grudnia 2007: zad. 604, 605.
- Egzamin 31 stycznia 2008: zad. 431, 501, 601, 602, 603.
- Egzamin poprawkowy 3 marca 2008: zad. 90, 224, 317, 475.

- Klasówka 11 grudnia 2008: zad. 44a, 44b, 346.
- Egzamin 6 lutego 2009: zad. 235, 617, 618, 661,.
- Egzamin poprawkowy 5 marca 2009: zad. 236, 526, 613 (bez 613d), 614.

- Klasówka 10 grudnia 2009: zad. 273, 355.
- Klasówka poprawkowa 16 stycznia 2010: zad. 274, 362.
- Egzamin 28 stycznia 2010: zad. 17, 43, 446, 544, 619.
- Egzamin poprawkowy 4 marca 2010: zad. 56, 360, 487, 620.

- Klasówka 9 grudnia 2010: zad. 590, 591.
- Klasówka poprawkowa 11 stycznia 2011: zad. 214, 592.
- Egzamin 27 stycznia 2011: zad. 483, 621, 622, 623.
- Egzamin poprawkowy 3 marca 2011: zad. 100, 238, 365, 447.

- Klasówka 8 grudnia 2011: zad. 270, 315.
- Klasówka poprawkowa 14 stycznia 2012: zad. 285, 316.
- Egzamin 26 stycznia 2012: zad. 141, 241, 527, 625,
- Egzamin poprawkowy 1 marca 2012: zad. 449, 626, 627

- Klasówka 13 grudnia 2012: zad. 628, 629.
- Klasówka poprawkowa 15 stycznia 2013: zad. 630, 631.
- Egzamin 4 lutego 2013: zad. 139, 634, 635.
- Egzamin poprawkowy 7 marca 2013: zad. 140, 452, 636.

- Klasówka 5 grudnia 2013: zad. 382, 384.
- Klasówka poprawkowa 14 stycznia 2014: zad. 383, 385.
- Egzamin 4 lutego 2014: zad. 245, 302, 587, 458.
- Egzamin poprawkowy 6 marca 2014: zad. 561a, 639, 640, 641.

- Klasówka 4 grudnia 2014: zad. 580, 411.
- Klasówka poprawkowa 13 stycznia 2015: zad. 94, 441a, 441d, 441g.
- Egzamin 28 stycznia 2015: zad. 97, 213a, 442, 642a.
- Egzamin poprawkowy 19 lutego 2015: zad. 95, 213b, 488, 645.

- Klasówka 10 grudnia 2015: zad. 109, 443.
- Klasówka poprawkowa 12 stycznia 2016: zad. 110, 444.
- Egzamin 4 lutego 2016: zad. 150a, 150c, 150d, 151, 368, 468.
- Egzamin poprawkowy 19 lutego 2016: zad. 246, 370, 469, 562.

- Klasówka 8 grudnia 2016: zad. 105b, 456.
- Klasowka poprawkowa 17 stycznia 2017: zad. 457, 581.
- Egzamin 3 lutego 2017: zad. 366, 480, 563, 589.
- Egzamin poprawkowy 21 lutego 2017: zad. 286, 412, 582, 609.

- Klasówka 7 grudnia 2017: zad. 422b, 422c, 422e, 584a, 584b, 584c.
- Klasowka poprawkowa 17 stycznia 2017: zad. 423b, 423c, 423d, 585.
- Egzamin 2 lutego 2018: zad. 647, 450a, 450b, 450c, 450e, 648c, 648d, 648e.
- Egzamin poprawkowy 22 lutego 2018: zad. 451a, 451c, 451d, 649, 650.

- Klasówka 13 grudnia 2018: zad. 269, 438.
- Klasowka poprawkowa 22 stycznia 2019: zad. 271, 440.
- Egzamin 1 lutego 2019: zad. 272, 387 (bez 460d), 460.
- Egzamin poprawkowy 21 lutego 2019: zad. 152, 388, 461 (bez 461e).

- Klasówka 12 grudnia 2019: zad. 221, 310.
- Klasowka poprawkowa 11 stycznia 2020: zad. 222, 319.
- Egzamin 30 stycznia 2020: zad. 66, 575, 578.
- Egzamin poprawkowy 21 lutego 2020: zad. 67, 577, 576.

- Klasówka 12 grudnia 2020: zad. 566, 571.
- Klasowka poprawkowa 19 stycznia 2021: zad. 567, 569.
- Egzamin zerowy 19 stycznia 2021: zad. 462a–462d, 568, 570.
- Egzamin 1 lutego 2021: zad. 572, 573, 574.
- Egzamin poprawkowy 23 lutego 2021: zad. 247, 369, 464.

- Klasówka 11 grudnia 2021: zad. 113, 295.
- Klasówka poprawkowa 15 stycznia 2022: zad. 296, 565.
- Egzamin 31 stycznia 2022: zad. 114, 297, 420.
- Egzamin poprawkowy 26 lutego 2022: zad. 298, 418, 564.

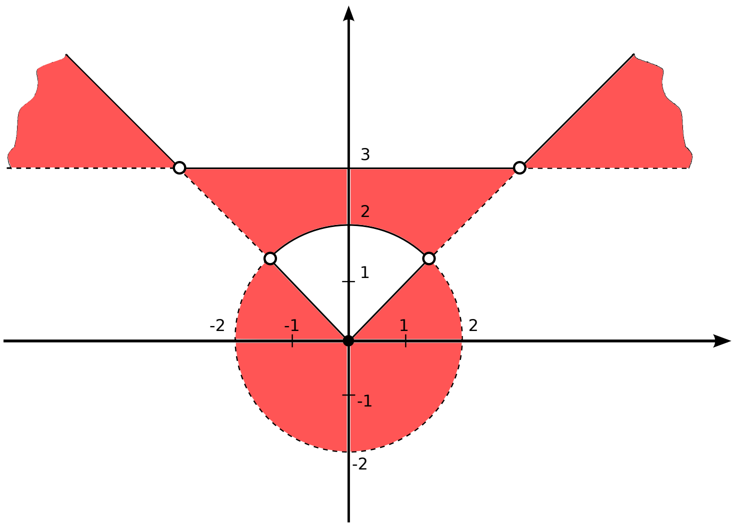
- Klasówka 15 grudnia 2022: zad. 153, 321(321c, 321d).
- Klasówka poprawkowa 17 stycznia 2023: zad. 154, 389.
- Egzamin 30 stycznia 2023: zad. 390, 155, 466.
- Egzamin poprawkowy 25 lutego 2023: zad. 156, 467, 154.

Rozwiązania i wskazówki do niektórych zadań

10a: Należy rozpatrzyć dwie możliwości: albo formuły po dwóch stronach równoważności są spełnione, albo nie. Pierwsza możliwość daje nam obszar powyżej wykresu $y = |x|$, ograniczony od dołu okręgiem o środku w początku układu współrzędnych i promieniu 2, a od góry prostą $y = 3$; do obszaru należą odpowiednie fragmenty okręgu oraz fragment prostej, a wykres $y = |x|$ nie.
Druga możliwość zachodzi dla punktów należących do sumy dwóch zbiorów (odpowiadających członom koniunkcji po prawej stronie). Są to:

- obszar poniżej wykresu $y = |x|$ leżący we wnętrzu koła o środku w początku układu współrzędnych i promieniu 2; odpowiednie fragmenty wykresu $y = |x|$ należą do obszaru, a fragmenty okręgu na obwodzie koła nie;
- obszar poniżej wykresu $y = |x|$ ograniczony od dołu prostą $y = 3$; odpowiednie fragmenty wykresu $y = |x|$ należą do obszaru, a fragmenty prostej $y = 3$ nie.

Całość przedstawia rysunek 1.



Rysunek 1: Zadanie 10a.

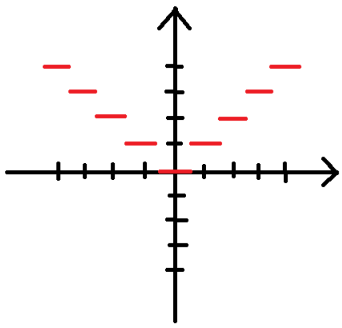
10b: Zauważmy, że aby para $\langle x, y\rangle$ należała do tego zbioru, musi dla pewnego $z \in \mathbb{Z}$ należeć do zbioru $X_z = \{\langle x, y\rangle \mid \forall w(||w - |z|| = \frac{1}{2} \rightarrow |w - y| \leq \frac{1}{2} \wedge |z - x| \leq \frac{1}{2})\}$. Wtedy $\langle x, y\rangle$ spełnia warunek $|w - y| \leq \frac{1}{2} \wedge |z - x| \leq \frac{1}{2}\}$ dla wszystkich w o własności $|w - |z|| = \frac{1}{2}$. Ale dla każdego z istnieją dwie wartości w, które spełniają to równanie: $w_1 = |z| + \frac{1}{2}$ i $w_2 = |z| - \frac{1}{2}$. Zatem zbiór X_z to przecięcie zbiorów $X_{z,1} = \{\langle x, y\rangle \mid |w_1 - y| \leq \frac{1}{2} \wedge |z - x| \leq \frac{1}{2}\}$ i $X_{z,2} = \{\langle x, y\rangle \mid |w_2 - y| \leq \frac{1}{2} \wedge |z - x| \leq \frac{1}{2}\}$. Zbiory te to kwadraty o boku 1 i środkach odpowiednio $(z, |z| + \frac{1}{2})$ i $(z, |z| - \frac{1}{2})$, a ich przecięcie to odcinek stanowiący górny bok dolnego i dolny bok górnego z tych kwadratów – patrz rysunek 2.

11: Pierwsza równoważność jest oczywiście prawdziwa, wprost z definicji notacji $\{\ldots | \ldots\}$. Druga nie. Wyrażenie $\{\sin x \mid x > 0\}$ jest uproszczonym zapisem zbioru $\{z \in \mathbb{R} \mid \exists x \in \mathbb{R}\, (x > 0 \wedge z = \sin x)\}$. Do tego zbioru należy np. liczba $-1 = \sin \frac{3\pi}{2} = \sin(-\frac{\pi}{2})$, chociaż $-\frac{\pi}{2} \notin \mathbb{R}_+$.

14a: *Pewien pies goni każdego kota.* (Zaprzeczeniem dania zaczynającego się od „*Żaden* ...” nie jest „*Każdy...*” ale „*Pewien* ...”. Mamy tu bowiem schemat postaci $\forall x \neg P(x)$, którego negacja jest równoważna schematowi $\exists x P(x)$.)

14b: *Każdy pies goni jakiegoś kota.*

15a: Tak naprawdę powinniśmy napisać: *Zbiór A jest* żółty, *wtedy i tylko wtedy, gdy ma co najmniej dwa elementy.* Ale w definicjach słowo *jeśli* jest potocznie używane jako skrót *wtedy i tylko wtedy*.



Rysunek 2: Zadanie 10b.

15b: Powtórzone słowo *jeśli* utrudnia zrozumienie definicji. Lepiej napisać: *Zbiór A jest* czerwony*, jeśli każdy jego parzysty element jest podzielny przez* 3.

15c: Mamy tu warunek $\exists x \in A\,(2|x \to 3|x)$, który można wypowiedzieć bez pomocy implikacji jako $\exists x \in A\,(2 \nmid x \vee 3 \,|\, x)$. A więc po polsku będzie tak: *W zbiorze A jest element, który jest nieparzysty lub podzielny przez trzy.*

17: Przyczyną błędu jest dwuznaczna konstrukcja „dla każdego x i pewnego y", która spowodowała pomieszanie kolejności kwantyfikatorów. W przypadku pierwszym zakładamy w istocie, że zachodzi warunek $\exists y \forall x.\, x \leq y$. Zaprzeczeniem tego warunku jest $\forall y \exists x.\, x > y$, a w przypadku drugim założono silniejszą własność $\exists x \forall y.\, x > y$.

25a: Załóżmy, że $A - B = B - A$ i przypuśćmy, że $x \in A$. Gdyby $x \notin B$ to $x \in A - B$, ale skoro $A - B = B - A$, to $x \notin A$, sprzeczność. Zatem $x \in B$. Udowodniliśmy więc, że $A \subseteq B$. Dowód inkluzji odwrotnej jest podobny.

27: Należy udowodnić dwie implikacje. Dla dowodu części ($\Rightarrow$) załóżmy, że zachodzi równość

$$(A - C) \cup (C - B) \cup (B - A) = C \cup B.$$

Aby udowodnić $A \subseteq C \cup B$, weźmy dowolny $x \in A$ i pokażmy, że $x \in C \cup B$. Rozpatrzymy dwa przypadki. Jeśli $x \in C$, to tym bardziej $x \in C \cup B$. A jeśli $x \notin C$, to $x \in A - C$. Wtedy x należy do lewej strony założonej równości, a zatem i do prawej.

Teraz pokażemy, że $A \cap B \cap C = \varnothing$. Gdyby $x \in A \cap B \cap C$, to mielibyśmy w szczególności $x \in B$, więc $x \in C \cup B$. Z założenia, $x \in (A - C) \cup (C - B) \cup (B - A)$. Tymczasem x nie należy do żadnego ze składników tej sumy. Istotnie, $x \notin A - B$ oraz $x \notin C - B$, bo $x \in B$. Ponadto, $x \notin B - A$ bo $x \in A$. A więc x należy do prawej strony równości, a nie należy do lewej. Zatem $A \cap B \cap C = \varnothing$.

Dla dowodu ($\Leftarrow$) załóżmy, że $A \subseteq C \cup B$ oraz $A \cap B \cap C = \varnothing$. Mamy do udowodnienia dwa zawierania zbiorów. Aby pokazać, że $(A - C) \cup (C - B) \cup (B - A) \subseteq C \cup B$, weźmy dowolny element $x \in (A - C) \cup (C - B) \cup (B - A)$. Mamy do rozpatrzenia trzy przypadki: $x \in A - C$, $x \in C - B$, oraz $x \in B - A$. W pierwszym przypadku wiemy, że $x \in A$, a zatem z założenia $x \in C \cup B$. W pozostałych dwóch przypadkach otrzymujemy odpowiednio $x \in C$ lub $x \in B$, a zatem we wszystkich trzech przypadkach zachodzi $x \in C \cup B$, co kończy dowód zawierania.
Aby pokazać zawieranie odwrotne, załóżmy, że $x \in C \cup B$. Najwygodniej nam będzie rozpatrzyć trzy przypadki: ($x \in C$ i $x \in B$), ($x \in C$ i $x \notin B$) oraz ($x \notin C$ i $x \in B$). W pierwszym przypadku wiemy, że $x \notin A$, bo inaczej $x \in A \cap B \cap C = \varnothing$. A zatem $x \in B - A$. W drugim przypadku $x \in C - B$. W trzecim przypadku, jeśli $x \in A$, mamy $x \in A - C$, a jeśli nie, to mamy $x \in B - A$. A zatem $x \in (A - C) \cup (C - B) \cup (B - A)$, co kończy nasz dowód.

28a: Tak. Załóżmy, że $\mathsf{P}(Y) \subseteq X$. Pokażemy, że wtedy $Y \subseteq \bigcup X$. Weźmy dowolne $y \in Y$. Zauważmy, że wtedy $\{y\} \in \mathsf{P}(Y)$. Z założenia $\mathsf{P}(Y) \subseteq X$ wynika, że $\{y\} \in X$. Mamy zatem $y \in \{y\}$ i $\{y\} \in X$. Na mocy definicji $\bigcup X$ wynika stąd, że $y \in \bigcup X$.

28b: Nie. Jeśli $X = \{\{1,2\}\}$ i $Y = \{1\}$, to $Y \subseteq \bigcup X = \{1,2\}$, ale $\mathsf{P}(Y) = \{\varnothing, \{1\}\} \not\subseteq X$.

29a: Nie. Przyjmijmy $A = \{1,2,3\}$, $B = \{1,2\}$, $C = \{1,2,3\}$. Wówczas $A \cup C = B \cup C = \{1,2,3\}$, $C - B = \{3\}$, ale $C - A = \varnothing$, czyli $C - B \not\subseteq C - A$

29b: Tak. Załóżmy, że $(A \cap C \subseteq B \cap C)$. Weźmy dowolny x należący do $C - B$. Pokażemy, że należy on do $C - A$. W tym celu wystarczy dowieść, że x należy do C i x nie należy do A. Ponieważ x należy do $C - B$, zatem x należy do C. Pozostaje pokazać, że x nie należy do A.

Przypuśćmy więc, że x należy do A. Wiemy, że x należy do C, zatem x należy do $(A \cap C)$. Z założenia możemy wywnioskować, że x należy do $(B \cap C)$, więc x należy do B i x należy do C. Skoro jednak x należy do $C - B$, to x nie należy do B – sprzeczność.

32: Tak. Załóżmy, że $A \cap B \cap C = \varnothing$ i pokażmy, że wtedy zachodzi inkluzja $A \cap B \subseteq (A-C) \cap (B-C)$. Weźmy dowolny $x \in A \cap B$. Ponieważ, z założenia, zbiór $A \cap B$ jest rozłączny z C, to $x \notin C$. Wiemy też, że $x \in A$ i $x \in B$. Zatem $x \in A - C$ i $x \in B - C$. Podsumowując, $x \in (A - C) \cap (B - C)$, czego należało dowieść.

33: Tak. Mamy do pokazania dwie implikacje.
Najpierw załóżmy, że $B \subseteq C$ zachodzi i pokażmy $A \cup B \cup C = (A - B) \cup C$. Zacznijmy od inkluzji $(A - B) \cup C \subseteq A \cup B \cup C$. Jeśli $x \in (A - B) \cup C$ to oczywiście $x \in A \cup C$, a więc też $x \in A \cup B \cup C$. Aby udowodnić inkluzję przeciwną $A \cup B \cup C \subseteq (A-B) \cup C$ weźmy dowolny x taki, że $x \in A \cup B \cup C$. Wtedy zachodzą następujące możliwości: albo $x \in C$, albo $x \in B$, albo $x \in A - B$. Jeśli $x \in C$ lub $x \in A - B$, to oczywiście $x \in (A - B) \cup C$; w pozostałym przypadku $x \in B$, ale używając założenia $B \subseteq C$ znów wnioskujemy, że $x \in (A - B) \cup C$.

Teraz załóżmy, że $A \cup B \cup C = (A - B) \cup C$ i udowodnijmy, że $B \subseteq C$. Niech $x \in B$. Wtedy oczywiście $x \in A \cup B \cup C$, a więc z założenia $x \in (A - B) \cup C$. Czyli $x \in A - B$ lub $x \in C$. Ale $x \in A - B$ jest niemożliwe, bo $x \in B$. Ostatecznie $x \in C$, co należało dowieść.

34: Nie. Jeśli $A = \{1\}$, $B = \{2\}$, to $(A \cup B) - B = \{1,2\} - \{2\} = \{1\}$, $(A - B) \cup B = \{1\} \cup \{2\} = \{1,2\}$, czyli $A = (A \cup B) - B$ zachodzi, ale $A = (A - B) \cup B$ nie.

36: Musimy pokazać dwie implikacje.
($\Rightarrow$) Załóżmy, że $A \cap B = \varnothing$. Pokażemy, że wówczas $\mathsf{P}(A) \cap \mathsf{P}(B) = \{\varnothing\}$. Inkluzja $\{\varnothing\} \subseteq \mathsf{P}(A) \cap \mathsf{P}(B)$ jest oczywista, bo $\varnothing \in \mathsf{P}(Y)$ dla dowolnego zbioru Y. Pokażemy teraz, że $\mathsf{P}(A) \cap \mathsf{P}(B) \subseteq \{\varnothing\}$. Niech $X \in \mathsf{P}(A) \cap \mathsf{P}(B)$. Wtedy $X \in \mathsf{P}(A)$ i $X \in \mathsf{P}(B)$. Skoro $X \in \mathsf{P}(A)$, to $X \subseteq A$. Analogicznie $X \subseteq B$. Stąd wynika, że $X \subseteq A \cap B$. Jednak z założenia $A \cap B = \varnothing$, a zatem $X = \varnothing$. Wtedy $X \in \{\varnothing\}$.
($\Leftarrow$) Załóżmy, że $\mathsf{P}(A) \cap \mathsf{P}(B) = \{\varnothing\}$. Udowodnimy, że $A \cap B = \varnothing$. Przypuśćmy przeciwnie, że istnieje $x \in A \cap B$. Wówczas $\{x\} \in \mathsf{P}(A)$ i $\{x\} \in \mathsf{P}(B)$. To jednak oznacza, że $\{x\} \in \mathsf{P}(A) \cap \mathsf{P}(B)$. To jest sprzeczne z założeniem, że $\mathsf{P}(A) \cap \mathsf{P}(B) = \{\varnothing\}$.

41a: Tak. Zawieranie zachodzi dla każdej rodziny $\mathcal{A}$ postaci $\mathsf{P}(X)$ dla pewnego X. Jak wiemy z zadania 40, dla każdego X zachodzi równość $\bigcup \mathsf{P}(X) = X$. Biorąc $\mathcal{A} = \mathsf{P}(X)$ dostajemy

$$\mathsf{P}(\bigcup \mathcal{A}) = \mathsf{P}(\bigcup \mathsf{P}(X)) = \mathsf{P}(X) = \mathcal{A}.$$

Konkretny przykład takiej rodziny to $\mathcal{A} = \mathsf{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$.

41b: Nie. Rozważmy rodzinę $\mathcal{A} = \varnothing$. Wtedy $\bigcup \mathcal{A} = \varnothing$ oraz $\mathsf{P}(\bigcup \mathcal{A}) = \mathsf{P}(\varnothing) = \{\varnothing\} \not\subseteq \varnothing = \mathcal{A}$.

41c: Tak. Inkluzja zachodzi dla każdej rodziny $\mathcal{A}$ postaci $\mathsf{P}(X)$. Jak zauważyliśmy w rozwiązaniu 41a, zachodzi wtedy równość $\mathsf{P}(\bigcup \mathcal{A}) = \mathcal{A}$. Konkretnym przykładem może być znowu $\mathcal{A} = \{\varnothing\}$.

41d: Tak. Weźmy $X \in \mathcal{A}$. Na mocy definicji $\bigcup \mathcal{A}$ każdy element $x \in X$ należy do zbioru $\bigcup \mathcal{A}$. Zatem $X \subseteq \bigcup \mathcal{A}$. To zaś oznacza, że $X \in \mathsf{P}(\bigcup \mathcal{A})$.

43a: Tak. Zacznijmy od tego, że $\bigcap \mathsf{P}(B) = \{x \in B \mid \forall Z.\, Z \in \mathsf{P}(B) \to x \in Z\} = \{x \mid x \in \varnothing\} = \varnothing$, dla dowolnego zbioru B. Zatem po prawej stronie pierwszej równości mamy singleton $\{\varnothing\}$ i należy udowodnić, że $\bigcap \{\mathsf{P}(B) \mid B \subseteq A\} = \{\varnothing\}$. Inkluzja „$\supseteq$” wynika stąd, że zawsze $\varnothing \in \mathsf{P}(B)$, przypuśćmy więc, że $Z \in \bigcap \{\mathsf{P}(B) \mid B \subseteq A\}$. Wtedy $Z \in \mathsf{P}(B)$ dla wszystkich $B \subseteq A$ (w tym dla $B = \varnothing$). Jedynym zbiorem o tej własności jest $Z = \varnothing$.

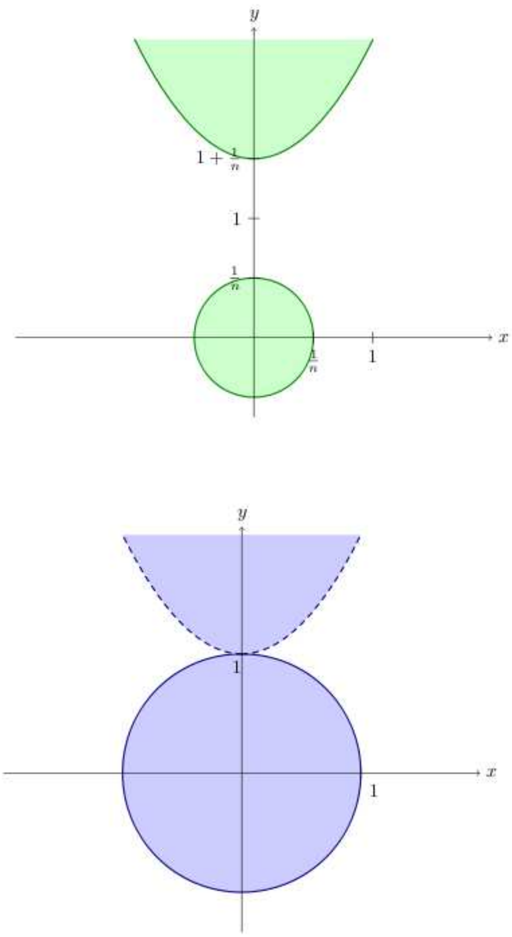
43b: Tak. Z zadania 40 wiemy, że $\bigcup \mathsf{P}(B) = B$, dla dowolnego zbioru B, zatem prawa strona równości to $\{B \mid B \subseteq A\} = \mathsf{P}(A)$. Mamy więc pokazać, że $\bigcup \{\mathsf{P}(B) \mid B \subseteq A\} = \mathsf{P}(A)$. Niech najpierw $Z \in \bigcup \{\mathsf{P}(B) \mid B \subseteq A\}$. Wtedy $Z \in \mathsf{P}(B)$, dla pewnego $B \subseteq A$, skąd $Z \subseteq A$, czyli $Z \in \mathsf{P}(A)$. Na odwrót, jeśli $Z \in \mathsf{P}(A)$, to Z należy do zbioru po lewej stronie, bo $Z \in \mathsf{P}(Z)$.

44a: Równość jest zawsze prawdziwa. Udowodnimy najpierw inkluzję „$\subseteq$”. Niech $x \in \bigcap A \cap \bigcap B$. Oznacza to, że $x \in \bigcap A$ oraz $x \in \bigcap B$. A zatem, dla dowolnego $a \in A$ zachodzi $x \in a$, a także dla dowolnego $b \in B$ zachodzi $x \in b$. Należy wykazać, że $x \in c$ dla dowolnego $c \in A \cup B$. Jeśli jednak $c \in A \cup B$, to albo $c \in A$ albo $c \in B$. W każdym przypadku mamy $x \in c$.

Teraz zajmijmy się inkluzją „$\supseteq$”. Załóżmy, że $x \in \bigcap(A \cup B)$. A więc $x \in a$ dla każdego $a \in A \cup B$, w szczególności dla każdego $a \in A$. Stąd $x \in \bigcap A$. Podobnie $x \in \bigcap B$, a zatem $x \in \bigcap A \cap \bigcap B$.

44b: To nie zawsze prawda, np. jeśli $A = \{\{0\}, \{1\}\}$, $B = \{\{0\}, \{2\}\}$, to $\bigcap A \cap \bigcap B = \varnothing \cap \varnothing = \varnothing$, ale $\bigcap(A \cap B) = \bigcap\{\{0\}\} = \{0\}$.

47: Do zbioru A_n należą te pary $\langle x, y\rangle$, które spełniają warunek $x^2 + y^2 > \frac{1}{n^2} \to n(y - x^2 - 1) \geq 1$. Implikacja jest spełniona wtedy i tylko wtedy, gdy jej poprzednik nie jest spełniony lub następnik jest spełniony. Szukamy zatem tych par, które spełniają warunek $x^2 + y^2 \leq \frac{1}{n^2}$ (negacja poprzednika) lub $n(y - x^2 - 1) \geq 1$ (następnik). Pierwszy warunek opisuje koło o środku w punkcie $\langle 0, 0\rangle$ i promieniu $\frac{1}{n}$. Drugi warunek jest równoważny nierówności $y \geq x^2 + 1 + \frac{1}{n}$, która opisuje obszar powyżej paraboli o równaniu $y = x^2 + 1 + \frac{1}{n}$. Ostatecznie, dla ustalonego n, zbiór A_n wygląda tak, jak w górnej części rysunku 3.



Rysunek 3: Zadanie 47.

Poszukamy teraz $\bigcup_{n \in \mathbb{N} - \{0\}} A_n$. Łatwo zauważyć, że koła o środku $\langle 0, 0\rangle$ i promieniu $\frac{1}{n}$ zawierają się w kole o środku $\langle 0, 0\rangle$ i promieniu 1. Ponadto jeśli $m > n$, to obszar ograniczony od dołu parabolą o równaniu $y = x^2 + 1 + \frac{1}{m}$ zawiera obszar ograniczony od dołu parabolą o równaniu $y = x^2 + 1 + \frac{1}{n}$ (obszary wyznaczone przez parabole tworzą ciąg wstępujący). Wszystkie A_n są więc zawarte w obszarze widocznym w dolnej części rysunku 3 i to samo dotyczy sumy $\bigcup_{n\in\mathbb{N}-\{0\}} A_n$.

Z drugiej strony, ten obszar także zawiera się w naszej sumie. Istotnie, jeśli n rośnie do nieskończoności, to parabola o równaniu $y = x^2 + 1 + \frac{1}{n}$ znajduje się coraz bliżej paraboli $y = x^2 + 1$. Każdy punkt $\langle x, y\rangle$ znajdujący się powyżej wykresu $y = x^2 + 1$ leży więc, dla dostatecznie dużego n, powyżej paraboli $y = x^2 + 1 + \frac{1}{n}$, a więc należy do sumy. A każdy punkt z koła należy do A_1. Zatem $\bigcup_{n\in\mathbb{N}-\{0\}} A_n$ wygląda jak na rysunku 3 (dolna część). (Punkty należące do paraboli $y = x^2 + 1$ nie należą do żadnego ze zbiorów A_n, nie należą więc do sumy.)

48a: Pokażemy, że $\bigcap_{t\in\mathbb{R}_+} A_t = [1, 2]$.

($\subseteq$) Niech $x \in \bigcap_{t\in\mathbb{R}_+} A_t$. Gdyby $x < 1$, to dla $t = \frac{1}{1-x} \in \mathbb{R}_+$ mielibyśmy $x \in A_t$. Ale wtedy $x = 1 - \frac{1}{t} \notin A_t$, sprzeczność. Gdyby zaś $x > 2$, to $x \notin A_t$ dla $t = (x-2)^2 \in \mathbb{R}_+$, bo mamy wtedy $x = 2 + (x-2) = 2 + \sqrt{t} \notin A_t$. Zatem $1 \le x \le 2$, czyli $x \in [1, 2]$.

($\supseteq$) Niech $1 \le x \le 2$. Wtedy dla dowolnego $t > 0$ zachodzi $1 - \frac{1}{t} < x < 2 + \sqrt{t}$, więc $x \in A_t$.

Teraz udowodnimy, że $\bigcup_{t\in\mathbb{R}_+} A_t = \mathbb{R}$. Oczywiście wytarczy pokazać zawieranie z prawej do lewej. Dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ wystarczy wskazać takie t, że $x \in A_t$. Jeśli $x < 1$, to wybierzmy $t < \frac{1}{1-x}$, dla $x > 2$ przyjmijmy $t > (x-2)^2$, a dla $x \in [1, 2]$ mozna wziąć jakiekolwiek t. W każdym z trzech przypadków łatwo sprawdzić nierówności $1 - \frac{1}{t} < x < 2 + \sqrt{t}$.

56a: Tak. Aby udowodnić inkluzję z lewej do prawej, załóżmy, że $\langle x, y\rangle \in \bigcap A \times \bigcap B$. Chcemy udowodnić, że $\langle x, y\rangle \in \bigcap\{\alpha \times \beta \mid \alpha \in A \wedge \beta \in B\}$, czyli, że $\langle x, y\rangle \in \alpha \times \beta$, dla każdego $\alpha \in A$ i $\beta \in B$. Ale jeśli $\alpha \in A$ i $\beta \in B$, to $\bigcap A \subseteq \alpha$ i $\bigcap B \subseteq \beta$. Ponieważ $\langle x, y\rangle \in \bigcap A \times \bigcap B$, więc $x \in \bigcap A \subseteq \alpha$ oraz $y \in \bigcap B \subseteq \beta$, a zatem $\langle x, y\rangle \in \alpha \times \beta$, i dobrze.

Na odwrót, załóżmy, że $\langle x, y\rangle \in \bigcap\{\alpha \times \beta \mid \alpha \in A \wedge \beta \in B\}$. Aby pokazać, że $\langle x, y\rangle \in \bigcap A \times \bigcap B$, udowodnimy najpierw, że $x \in \bigcap A$. Weźmy więc jakieś $\alpha \in A$. Zbiór B jest niepusty, więc istnieje jakieś $\beta \in B$. Wtedy $\langle x, y\rangle \in \alpha \times \beta$, skąd $x \in \alpha$. Podobnie dowodzimy, że $y \in \bigcap B$.

56b: Tak.

60: Przypuśćmy najpierw, że $\mathcal{A} = \varnothing$ lub $\mathcal{A} = \{\varnothing\}$. Jeśli $\mathcal{A} = \varnothing$ to, ponieważ $\bigcup \varnothing = \varnothing$, mamy $\mathsf{P}(\bigcup \mathcal{A}) = \mathsf{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$. Jeśli $\mathcal{A} = \{\varnothing\}$ to, ponieważ $\bigcup\{\varnothing\} = \varnothing$, mamy $\mathsf{P}(\bigcup \mathcal{A}) = \mathsf{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$. Załóżmy zatem, że $\mathcal{A} \neq \varnothing$ oraz $\mathcal{A} \neq \{\varnothing\}$. Wtedy istnieje takie $X \in \mathcal{A}$, że $X \neq \varnothing$. Niech np. $x \in X$. Wtedy $x \in \bigcup \mathcal{A}$. Stąd $\{x\} \in \mathsf{P}(\bigcup \mathcal{A})$, więc $\mathsf{P}(\bigcup \mathcal{A}) \neq \varnothing$.

61a: Nie. Weźmy jednoelementową rodzinę $\mathcal{A} = \{\{\{0\}, \{1\}\}\}$. Wiadomo z zadania 40, że $\bigcup \mathsf{P}(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$, więc $\bigcup\bigcap\bigcup \mathsf{P}(\mathcal{A}) = \bigcup\bigcap \mathcal{A} = \bigcup\bigcap\{\{\{0\}, \{1\}\}\} = \bigcup\{\{0\}, \{1\}\} = \{0, 1\}$. Z drugiej strony mamy równości $\bigcap\bigcup \mathcal{A} = \bigcap\bigcup\{\{\{0\}, \{1\}\}\} = \bigcap\{\{0\}, \{1\}\} = \varnothing$.

61b: Nie. Weźmy $\mathcal{A} = \{\{\{0\}\}, \varnothing\}$. Wtedy $\bigcap\bigcup \mathcal{A} = \bigcap\bigcup\{\{\{0\}\}, \varnothing\} = \bigcap\{\{0\}\} = \{0\}$. Z drugiej strony $\bigcup\bigcap\bigcup \mathsf{P}(\mathcal{A}) = \bigcup\bigcap \mathcal{A} = \bigcup\bigcap\{\{\{0\}\}, \varnothing\} = \bigcup \varnothing = \varnothing$.

61c: Tak. Ponieważ $\varnothing \in \mathsf{P}(\bigcup \mathcal{A})$, więc $\bigcap \mathsf{P}(\bigcup \mathcal{A}) = \varnothing \subseteq \bigcap \mathcal{A}$.

61d: Tak. Zacznijmy od tego, że rodzina $\mathcal{B}$ jest niepusta, ma więc jakiś element $b \in \mathcal{B}$. Niech teraz $\langle x, y\rangle \in \bigcup \mathcal{A} \times \bigcap \mathcal{B}$. Wtedy $x \in \bigcup \mathcal{A}$, więc istnieje takie $a \in \mathcal{A}$, że $x \in a$. Ponadto $y \in \bigcap \mathcal{B}$, więc $y \in b$. Zatem $\langle x, y\rangle \in a \times b$. Czyli $\langle x, y\rangle \in \bigcup\{a \times b \mid a \in \mathcal{A} \wedge b \in \mathcal{B}\}$.

62: Równości nie muszą zachodzić. Np. dla $\mathcal{X} = \{\{0\}\}$ nie zachodzi żadna z nich. Zauważmy najpierw, że $\mathbb{R} \notin \mathcal{X}$, zatem $\mathbb{R} \in -\mathcal{X}$. Stąd $\mathbb{R} \subseteq \bigcup -\mathcal{X}$. Z drugiej strony oczywiście $\bigcup -\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}$, zatem $\bigcup -\mathcal{X} = \mathbb{R}$. Jednak $\bigcup \mathcal{X} = \{0\}$, czyli $-\bigcup \mathcal{X} = -\{0\}$, zatem $\bigcup -\mathcal{X} \not\subseteq -\bigcup \mathcal{X}$ i pierwsza równość nie zachodzi. Podobnie, $\bigcap \mathcal{X} = \{0\}$, czyli $-\bigcap \mathcal{X} = -\{0\}$, zatem $\bigcup -\mathcal{X} \not\subseteq -\bigcap \mathcal{X}$ i druga równość także nie zachodzi.

63a: Tak. Weźmy $t \in \bigcup\big\{\{a\} \times A \,\big|\, a \in A \wedge A \in \mathcal{Z}\big\}$. Istnieją wtedy takie $A \in \mathcal{Z}$ i $a \in A$, że $t \in \{a\} \times A$. Stąd $t = \langle a, b\rangle$, dla pewnego $b \in A$. W takim razie mamy $t \in A \times \{b\}$, a zatem również $t \in \bigcup\big\{A \times \{a\} \,\big|\, a \in A \wedge A \in \mathcal{Z}\big\}$. Dowód inkluzji przeciwnej jest analogiczny.

63b: Tak. Aby udowodnić inkluzję z lewej do prawej, załóżmy, że

$$t \in \bigcap\big\{\{a\} \times A \,\big|\, a \in A \wedge A \in \mathcal{Z}\big\}. \tag{1}$$

Chcemy pokazać, że $t \in \bigcap \{A \times \{a\} \mid a \in A \wedge A \in \mathcal{Z}\}$. W tym celu należy udowodnić, że $t \in A \times \{a\}$ dla każdego $A \in \mathcal{Z}$ i $a \in A$. Niech więc $A \in \mathcal{Z}$ i $a \in A$. Ponieważ $\{a\} \times A$ jest elementem rodziny $\{\{a\} \times A \mid a \in A \wedge A \in \mathcal{Z}\}$, więc na mocy (1) mamy $t \in \{a\} \times A$. Innymi słowy, istnieje takie $b \in A$, że $t = \langle a, b\rangle$. Jednak $\{b\} \times A$ jest również elementem rodziny $\{\{a\} \times A \mid a \in A \wedge A \in \mathcal{Z}\}$, zatem $t \in \{b\} \times A$. Stąd wynika, że $t = \langle b, c\rangle$ dla pewnego $c \in A$. To zaś oznacza, że $\langle a, b\rangle = \langle b, c\rangle$, czyli $a = b$ i $t = \langle a, a\rangle$. W takim razie, $t \in A \times \{a\}$. Dowód inkluzji przeciwnej jest analogiczny.

66a: Oczywiście $\bigcup L_1, \bigcup L_2 \subseteq \bigcup L$, należy więc pokazać że $\bigcup L \subseteq \bigcup L_1$ lub $\bigcup L \subseteq \bigcup L_2$. Przypuśćmy, że $\bigcup L \not\subseteq \bigcup L_1$. Jest więc takie $x \in \bigcup L$, że $x \notin \bigcup L_1$. Pokażemy, że wtedy $\bigcup L \subseteq \bigcup L_2$. Niech $y \in \bigcup L$. Istnieje takie $Y \in L$, że $y \in Y$. Istnieje też takie $X \in L$, że $x \in X$. Ponieważ L jest łańcuchem, więc istnieje takie $Z \in L$, że $x, y \in Z$ (w istocie $Z = X$ lub $Z = Y$). Ale wówczas $Z \notin L_1$, bo $x \notin \bigcup L_1$. A więc $Z \in L_2$, skąd $y \in \bigcup L_2$.

66b: Nie. Niech $I_n = (-n, n)$ i $L_k = \{I_n \mid n \leq k\}$ dla $n, k \in \mathbb{N} - \{0\}$. Rodzina $\mathcal{L} = \{L_k \mid k \in \mathbb{N} - \{0\}\}$ jest łańcuchem łańcuchów. Jeśli $L = \bigcup \mathcal{L}$, to $L = \{I_n \mid n \in \mathbb{N} - \{0\}\}$. Tymczasem suma $\bigcup L = \mathbb{R}$ nie jest równa żadnej sumie postaci $\bigcup L_k = I_k$.

67a: Niech $\mathcal{L} \subseteq \bigcap \Theta$ będzie łańcuchem. Wtedy $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{R}$ dla wszystkich $\mathcal{R} \in \Theta$, skąd $\bigcup \mathcal{L} \in \mathcal{R}$ dla wszystkich $\mathcal{R} \in \Theta$. A zatem $\bigcup \mathcal{L} \in \bigcap \Theta$ i już.

67b: Niech $\mathcal{R}$ i $\mathcal{S}$ będą łańcuchowo zamknięte i niech $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{R} \cup \mathcal{S}$ będzie łańcuchem zbiorów. Wtedy $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L} \cap \mathcal{R}$ i $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L} \cap \mathcal{S}$ są łańcuchami zawartymi odpowiednio w $\mathcal{R}$ i $\mathcal{S}$, skąd $\bigcup \mathcal{L}_1 \in \mathcal{R}$ oraz $\bigcup \mathcal{L}_2 \in \mathcal{S}$. Ponadto $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$, z zadania 66a wynika więc, że $\bigcup \mathcal{L} = \bigcup \mathcal{L}_1$ lub $\bigcup \mathcal{L} = \bigcup \mathcal{L}_2$. Zatem $\bigcup \mathcal{L} \in \mathcal{R}$ lub $\bigcup \mathcal{L} \in \mathcal{S}$, czyli $\bigcup \mathcal{L} \in \mathcal{R} \cup \mathcal{S}$.

67c: Nie. Trywialny kontrprzykład to pusty łańcuch rodzin łańcuchowo zamkniętych. Jego suma jest pusta i zawiera się w tej sumie pusty łańcuch. Ale suma pustego łańcucha nie należy do pustej rodziny. *Inne rozwiązanie:* Niech $I_n = (-n, n) \subseteq \mathbb{R}$, dla $n \in \mathbb{N} - \{0\}$. Zbiory potęgowe $\mathsf{P}(I_n)$ są łańcuchowo zamknięte, ale suma (tym razem niepustego!) łańcucha $\mathcal{L} = \{\mathsf{P}(I_n) \mid n \in \mathbb{N} - \{0\}\}$ nie jest łańcuchowo zamknięta. Istotnie, zbiór $P = \{I_n \mid n \in \mathbb{N} - \{0\}\}$ jest łańcuchem zbiorów oraz $P \subseteq \bigcup \mathcal{L}$. Tymczasem $\bigcup P = \mathbb{R} \notin \bigcup \mathcal{L}$, bo zbiór wszystkich liczb rzeczywistych nie jest podzbiorem żadnego z przedziałów I_n.

70: Intuicja w tym zadaniu może być następująca: Wyobraźmy sobie nieskończony graf, którego wierzchołki są numerowane liczbami naturalnymi. Każde dwa wierzchołki są połączone czerwoną albo zieloną krawędzią. Chcemy mieć nieskończenie wiele wierzchołków, z których każde dwa są połączone tym samym kolorem.

Definiujemy przez indukcję ciąg nieskończonych zbiorów $\mathbb{N}_i \subseteq \mathbb{N}$, zaczynając od $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N}$, w ten sposób, że liczby $n_i = \min \mathbb{N}_i$ będą tworzyły ciąg ostro rosnący: $n_0 < n_1 < \ldots$ Załóżmy, że $\mathbb{N}_i$ jest już określone i niech $X_i = \{n \in \mathbb{N}_i \mid \{n_i, n\} \in X\}$ oraz $Y_i = \{n \in \mathbb{N}_i \mid \{n_i, n\} \in Y\}$. Jako $\mathbb{N}_{i+1}$ wybieramy ten ze zbiorów X_i, Y_i, który jest nieskończony (jeśli oba są nieskończone, to wybieramy X_i). Oczywiście $\mathbb{N}_j \subseteq \mathbb{N}_i$ dla $i < j$, skąd wynika, że dla każdego i albo wszystkie pary $\{n_i, n_j\}$ dla $i < j$ są w X, albo wszystkie są w Y. Zatem nieskończony zbiór $\{n_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ jest sumą dwóch składników $A_X = \{n_i \mid \forall j(i < j \to \{n_i, n_j\} \in X)\}$ oraz $A_Y = \{n_i \mid \forall j(i < j \to \{n_i, n_j\} \in Y)\}$. Jeden z tych dwóch składników musi więc być nieskończony. Jest to szukany zbiór A.

81: Funkcja F jest na $\mathsf{P}(\mathbb{N})$, bo każdy podzbiór $A \subseteq \mathbb{N}$ jest postaci $F(x)$, gdzie x jest ciągiem stale równym A. Ale nie jest różnowartościowa, bo np. $F(x) = F(y)$ dla ciągu stałego $x(i) = \mathbb{N}$ i ciągu

$$y(i) = \begin{cases} \mathbb{N}, & \text{jeśli } i \text{ jest parzyste;} \\ \varnothing, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Dla $A = \varnothing$, jedyny ciąg x spełniający warunek $F(x) = \varnothing$ to ciąg stały $x(i) = \varnothing$. Zatem $F^{-1}(\{\varnothing\})$ jest jednoelementowy. Natomiast jeśli $A \neq \varnothing$ to $F^{-1}(\{A\})$ musi być nieskończony. Do tego przeciwobrazu należą bowiem wszystkie funkcje y_k postaci

$$y_k(i) = \begin{cases} A, & \text{jeśli } i = k; \\ \varnothing, & \text{jeśli } i \neq k, \end{cases}$$

gdzie k jest dowolną liczbą naturalną. A więc nie istnieje taki zbiór $A \subseteq \mathbb{N}$, że $F^{-1}(\{A\})$ ma dokładnie cztery elementy.

82a: Obrazem jest odcinek $B = [2, 5]$. Najpierw pokażemy, że $f(A) \subseteq B$. Jeśli $\langle x, y\rangle \in A$, to $2 \leq x \leq 4$ oraz $-1 \leq y \leq 3$, zatem $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \geq \sqrt{4 + 0} = 2$ i $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \leq \sqrt{16 + 9} = 5$. Stąd wartość funkcji $f(x,y)$ dla $\langle x,y\rangle \in A$ jest zawsze elementem przedziału $[2,5]$.

Teraz pokażemy, że $B \subseteq f(A)$, tj. dla każdego $z \in B$ istnieje takie $\langle x,y\rangle \in A$, że $f(x,y) = z$. Dla $z \leq 4$ bierzemy $x = z$, $y = 0$. Dla $z > 4$ bierzemy $x = 4, y = \sqrt{z^2 - 16}$. Łatwo sprawdzić, że w obu przypadkach $\langle x,y\rangle$ istotnie jest elementem zbioru A.

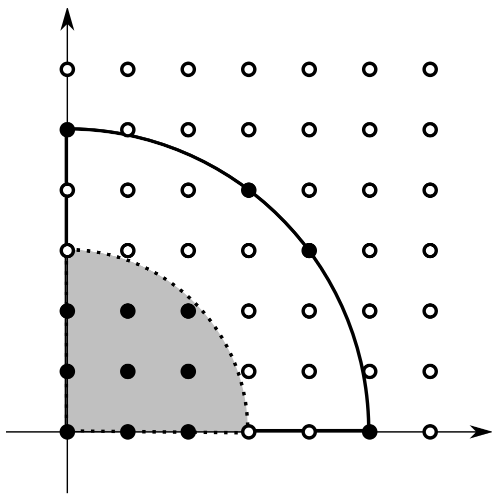
82b: Szukamy par $\langle x,y\rangle \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$, dla których $f(x,y) \in (-3,3)\cup\{5\}$. Kwadrat jest zawsze nieujemny, więc $f^{-1}((-3,3)\cup\{5\}) = \{\langle x,y\rangle \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid (x^2+y^2<9)\vee(x^2+y^2=25)\}$, co w przecięciu z $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ daje zbiór $\{0,1,2\}^2 \cup \{\langle 3,4\rangle, \langle 4,3\rangle, \langle 0,5\rangle, \langle 5,0\rangle\}$ o 13 elementach. Rozwiązanie ilustruje rysunek 4. Jak wiadomo ze szkolnej geometrii, $f(x,y)$ to odległość punktu $\langle x,y\rangle$ od początku układu. Zatem interesują nas punkty (zaznaczone czarnymi kropkami), których odległość od $\langle 0,0\rangle$ jest mniejsza od 3 albo równa 5.

90: Załóżmy przeciwnie, że dla każdego n istnieje taki zbiór $C_n \in \mathsf{P}(\mathbb{N})$, że $C_n \neq f(n)$ dla wszystkich $f \in \mathcal{F}_n$. Jeśli $f = \lambda n.C_n$ to $f \in \mathcal{F}_m$ dla pewnego m. Wtedy $C_m = f(m)$, sprzeczność.

92: Sprawdzimy, że podane warunki są spełnione przez funkcje:

$$f(n) = \begin{cases} k & \text{dla } n \text{ postaci } 2k \\ k & \text{dla } n \text{ postaci } 2k+1 \end{cases} \qquad g(n) = \begin{cases} 2k+1 & \text{dla } n \text{ postaci } 2k \\ 2k & \text{dla } n \text{ postaci } 2k+1 \end{cases}$$

(a) Liczby x i $g(x)$ mają zawsze inną parzystość, zatem $g(x) \neq x$. (b) Dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$ mamy $g(g(2k)) = g(2k+1) = 2k$, i $g(g(2k+1)) = g(2k) = 2k+1$. A więc zawsze $g(g(x)) = x$. (c) Dla $k \in \mathbb{N}$ zachodzą równości $f(g(2k)) = f(2k+1) = k = f(2k)$ oraz $f(g(2k+1)) = f(2k) = k = f(2k+1)$. Zatem $f \circ g = f$. (d) Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy $f(2n) = n$, więc f jest na $\mathbb{N}$. (e) Obraz zbioru wszystkich liczb parzystych w odwzorowaniu g to zbiór $\{g(n) \mid n \text{ parzyste}\}$. Aby wykazać, że jest to zbiór liczb nieparzystych, zauważmy, że (i) jeśli $n = 2k$ to $g(n) = 2k+1$ jest nieparzyste; (ii) jeśli $m = 2k+1$ jest nieparzyste, to $g(2k) = m$.



Rysunek 4: Zadanie 82b.

93: Niech $h(x) = c(f^{-1}(\{g(x)\}))$, dla $x \in A$. Wtedy $h(x) \in f^{-1}(\{g(x)\}$, czyli $f(h(x)) \in \{g(x)\}$, dla każdego x. A więc $f \circ h = g$.

94a: Najpierw zauważmy, że dla dowolnych $n \in \mathbb{Z}$ i $A \subseteq \mathbb{Z}$, mamy $\langle n,n\rangle \in F(A)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $n \in A$. Istotnie, jeśli $\langle n,n\rangle \in (A\times(A+\mathbb{N}))\cup((A+\mathbb{N})\times A)$, to albo $\langle n,n\rangle \in (A\times(A+\mathbb{N}))$ albo $\langle n,n\rangle \in ((A+\mathbb{N})\times A)$. W każdym przypadku $n \in A$. Implikacja w drugą stronę jest oczywista.

Funkcja F jest różnowartościowa. Jeśli bowiem $F(X_1) = F(X_2)$, to z obserwacji uczynionej powyżej wynika natychmiast, że $n \in X_1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $n \in X_2$.

94b: Funkcja F nie jest „na". Dla każdego $X \neq \varnothing$ zbiór $F(X)$ jest nieskończony, gdyż $X + \mathbb{N}$ jest nieskończony. Zatem np. nie istnieje takie X, że $F(X) = \{\langle -1,1\rangle\}$.

94c: Ponieważ $\mathbb{N} + \mathbb{N} = \mathbb{N}$, więc $F(\mathbb{N}) = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Skoro F jest różnowartościowa, to $F(X) = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ zachodzi tylko dla $X = \mathbb{N}$. Stąd $F^{-1}(\{\mathbb{N} \times \mathbb{N}\}) = \{\mathbb{N}\}$.

94d: Jeśli $X \in F^{-1}(\{\mathcal{B} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid \mathbf{1}_\mathbb{Z} \subseteq \mathcal{B}\})$, to $\mathbf{1}_\mathbb{Z} \subseteq F(X)$, czyli $\langle n, n\rangle \in F(X)$, dla wszystkich $n \in \mathbb{Z}$. Z rozważań części 94a wynika, że ma to miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy $X = \mathbb{Z}$. A więc $F^{-1}(\{\mathcal{B} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid \mathbf{1}_\mathbb{Z} \subseteq \mathcal{B}\}) = \{\mathbb{Z}\}$.

95a: Funkcja F nie jest na $\mathbb{N}^{\mathsf{P}(\mathbb{N})}$, ponieważ dla dowolnego $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ zachodzi $F(f)(\varnothing) = 0$, co w szczególności oznacza, że $F(f) \neq \lambda A.1$ dla każdego f. Inne uzasadnienie wynika stąd, że $\overline{\overline{\mathbb{N}^{\mathsf{P}(\mathbb{N})}}} = 2^{\mathfrak{C}}$, a $\overline{\overline{\mathbb{N}^\mathbb{N}}} = \mathfrak{C}$, zatem nie może istnieć funkcja z $\mathbb{N}^\mathbb{N}$ na $\mathbb{N}^{\mathsf{P}(\mathbb{N})}$.

95b: Funkcja F jest różnowartościowa. Łatwo zauważyć, że dla dowolnej funkcji f oraz $k \in \mathbb{N}$ zachodzi $F(f)(\{k\}) = f(k)$. Stąd jeśli $F(f) = F(g)$, to dla dowolnego k mamy $f(k) = g(k)$, a zatem $f = g$.

95c: Niech $f \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$ będzie dowolną funkcją. Ponieważ $F(f)(\varnothing) = 0$, więc $\varnothing \in F(f)^{-1}(\{0\})$, a zatem $F(f)^{-1}(\{0\}) \neq \varnothing$, skąd $F(f) \in L$. A zatem $F^{-1}(L) = \mathbb{N}^\mathbb{N}$.

95d: Ponieważ $F(f)(\varnothing) = 0$, więc jeśli $F(f)$ jest funkcją stałą, to jest to funkcja $\lambda A.0$ stale równa 0. A ponieważ dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$ mamy $F(f)(\{k\}) = f(k)$, więc f również jest funkcją stale równą 0 (czyli funkcją $\lambda k.0$). A więc przeciwobrazem zbioru funkcji stałych jest jednoelementowy zbiór $\{\lambda k.0\}$.

97a: Funkcja F nie jest na $\mathbb{N}^{\mathsf{P}_+(\mathbb{N})}$, ponieważ w ogóle nie istnieje surjekcja z $\mathbb{N}^\mathbb{N}$ na $\mathbb{N}^{\mathsf{P}_+(\mathbb{N})}$. Wynika to stąd, że $\overline{\overline{\mathbb{N}^{\mathsf{P}_+(\mathbb{N})}}} = 2^{\mathfrak{C}} > \overline{\overline{\mathbb{N}^\mathbb{N}}} = \mathfrak{C}$.

97b: Funkcja F jest różnowartościowa. Łatwo zauważyć, że dla dowolnej funkcji f oraz $k \in \mathbb{N}$ zachodzi $F(f)(\{k\}) = f(k)$. Stąd jeśli $F(f) = F(g)$, to dla dowolnego k mamy $f(k) = g(k)$, a zatem $f = g$.

97c: Pokażemy, że $F^{-1}(L) = \{f \mid 0 \in \mathrm{Rg}(f)\}$.
($\subseteq$) Niech $f \in F^{-1}(L)$. Wtedy $F(f) \in L$, czyli $F(f)^{-1}(\{0\}) \neq \varnothing$. To znaczy, że istnieje taki zbiór A, że $F(f)(A) \in \{0\}$, inaczej $\min f(A) = 0$. W szczególności $0 \in f(A)$, czyli $f(a) = 0$ dla pewnego $a \in A$. A więc $0 \in \mathrm{Rg}(f)$.
($\supseteq$) Teraz załóżmy, że $0 \in \mathrm{Rg}(f)$, czyli $0 = f(a)$, dla pewnej liczby $a \in \mathbb{N}$. Wtedy $F(f)(\{a\}) = 0$, więc $\{a\} \in F(f)^{-1}(\{0\})$, a więc $F(f)^{-1}(\{0\}) \neq \varnothing$. Mamy więc $f \in F^{-1}(L)$.

97d: Przeciwobrazem zbioru $\mathbf{S}$ wszystkich funkcji stałych z $\mathsf{P}(\mathbb{N}) - \{\varnothing\}$ do $\mathbb{N}$ jest zbiór S wszystkich funkcji stałych z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{N}$. Aby pokazać, że $S \subseteq F^{-1}(\mathbf{S})$, załóżmy, że funkcja $f \in S$ jest stała, powiedzmy stale równa k. Wtedy $F(f)(A) = \min f(A) = \min\{k\} = k$, dla dowolnego niepustego A, zatem $F(f) \in \mathbf{S}$. Na odwrót, jeśli $f \in F^{-1}(\mathbf{S})$, to $F(f)$ jest funkcją stałą, w szczególności dla dowolnego n, wartość $F(f)(\{n\}) = \min f(\{n\}) = \min\{f(n)\} = f(n)$ jest zawsze ta sama. Funkcja f musi więc być stała.

100a: Nie, bo obraz niepustego zbioru $\mathcal{P}$ musi być niepusty, więc $\varnothing \notin \mathrm{Rg}(\varphi)$.

100b: Nie, bo $f(\mathcal{P}) = g(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$, gdy $f = \mathrm{id}_\mathbb{N}$ oraz $g = \lambda n.\,\mathsf{if}\ n \in \mathcal{P}\ \mathsf{then}\ n\ \mathsf{else}\ 0$.

100c: Na początek zauważmy, że $f \in C$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\varphi(f) = f(\mathcal{P}) \in \mathsf{P}(\mathcal{P})$, czyli gdy dla wszystkich $p \in \mathcal{P}$ zachodzi $f(p) \in \mathcal{P}$. Niech teraz $h \in C \bullet C$. Wtedy $h = f \circ g$ dla pewnych $f, g \in C$ i dla każdego $p \in \mathcal{P}$ mamy $g(p) \in \mathcal{P}$, a więc też i $h(p) = f(g(p)) \in \mathcal{P}$. Stąd $h \in C$. Na odwrót, jeśli $h \in C$, to $h = h \circ \mathrm{id}_\mathbb{N} \in C \bullet C$, bo oczywiście $\mathrm{id}_\mathbb{N} \in C$.

101: Funkcja F nie jest na $\mathsf{P}(\mathbb{N}) \to \mathsf{P}(\mathbb{N})$. Niech $\varphi : \mathsf{P}(\mathbb{N}) \to \mathsf{P}(\mathbb{N})$ będzie taka, że $\varphi(\mathbb{N}) = \varnothing$. Jeśli $\varphi = F(f)$, to $f(\mathbb{N}) = F(f)(\mathbb{N}) = \varphi(\mathbb{N}) = \varnothing$. Ale $f(1) \in f(\mathbb{N})$ – sprzeczność. A zatem $\varphi \notin \mathrm{Rg}(F)$.

Funkcja F jest 1–1. Przypuśćmy, że $F(f) = F(g)$. Wtedy dla dowolnego $X \in \mathsf{P}(\mathbb{N})$ zachodzi równość $f(X) = g(X)$. W szczególności, dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ mamy
$$\{f(n)\} = f(\{n\}) = g(\{n\}) = \{g(n)\},$$
skąd $f(n) = g(n)$. A zatem $f = g$.

102: Funkcja ψ nie jest różnowartościowa, bo na przykład $\psi(\mathrm{id}_\mathbb{R}) = \psi(\lambda x.\, x + 1) = \mathbb{IQ}$. Aby wykazać, że $\psi : \mathbb{R}^\mathbb{R} \xrightarrow{\text{na}} \mathsf{P}(\mathbb{R}) - \{\varnothing\}$, zauważmy, że dla każdego niepustego zbioru $B \subseteq \mathbb{R}$ zachodzi $\overline{\overline{B}} \leq \mathfrak{C}$. Istnieje więc funkcja $f_B : \mathbb{IQ} \xrightarrow{\text{na}} B$. Wtedy $\psi(f) = B$, gdzie
$$f(x) = \begin{cases} f_B(x), & \text{jeśli } x \in \mathbb{IQ}, \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku:} \end{cases}$$

104: Funkcja φ nie jest różnowartościowa. Jeśli np. $f(x) = x + 1$ dla $x \in \mathbb{R}$, to $\varphi(\mathrm{id}_\mathbb{R}) = \varphi(f) = \mathbb{IQ}$. Ale $\varphi : \mathbb{R}^\mathbb{R} \stackrel{\text{na}}{\longrightarrow} \mathsf{P}(\mathbb{R})$, bo dla dowolnego $B \subseteq \mathbb{R}$ zachodzi $B = \varphi(f)$, gdzie

$$f(x) = \begin{cases} \pi, & \text{jeśli } x \in B, \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Jeśli f jest funkcją stale równą d, to zbiór $f^{-1}(\mathbb{IQ})$ jest albo równy $\mathbb{R}$ albo pusty, zależnie od tego czy d jest liczbą wymierną czy nie. Zatem obraz zbioru wszystkich funkcji stałych to rodzina $\{\varnothing, \mathbb{R}\}$. Natomiast przeciwobraz zbioru $\mathsf{P}(\mathbb{IQ})$ przy przekształceniu φ to zbiór

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}(\mathsf{P}(\mathbb{IQ})) &= \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f^{-1}(\mathbb{IQ}) \in \mathsf{P}(\mathbb{IQ})\} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f^{-1}(\mathbb{IQ}) \subseteq \mathbb{IQ}\} \\ &= \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \forall y(f(y) \in \mathbb{IQ} \to y \in \mathbb{IQ})\} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \forall y(y \in \mathbb{Q} \to f(y) \in \mathbb{Q}\} \\ &= \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f\restriction_\mathbb{Q} : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}\}. \end{aligned}$$

A więc jest to zbiór tych wszystkich funkcji typu $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, które „zachowują wymierność”.

105b: Przede wszystkim sprawdźmy, czy równanie ma sens, tj. czy lewa i prawa strona jest tego samego typu (i jaki to jest typ). Ponieważ $\mathcal{R}$ jest podzbiorem zbioru wartości funkcji Φ, więc elementami rodziny $\mathcal{R}$ są podzbiory zbioru A. Suma tej rodziny jest też podzbiorem zbioru A. Natomiast $\Phi^{-1}(\mathcal{R})$ to przeciwobraz rodziny $\mathcal{R}$ przy Φ, czyli podzbiór zbioru $\mathsf{P}(B)$. Inaczej mówiąc, jest to rodzina podzbiorów B. Suma tej rodziny jest też podzbiorem B, więc lewa strona równania to wartość funkcji Φ dla tej sumy, czyli podzbiór zbioru A. Zatem obie strony równania to podzbiory zbioru A.

($\subseteq$) Niech $x \in \Phi(\bigcup \Phi^{-1}(\mathcal{R}))$. Ale $\Phi(\bigcup \Phi^{-1}(\mathcal{R})) = f^{-1}(\bigcup \Phi^{-1}(\mathcal{R}))$, więc mamy $f(x) \in \bigcup \Phi^{-1}(\mathcal{R})$, czyli istnieje taki element X rodziny $\Phi^{-1}(\mathcal{R})$, że $f(x) \in X$. Skoro $X \in \Phi^{-1}(\mathcal{R})$, to $\Phi(X) \in \mathcal{R}$, a skoro $f(x) \in X$, to $x \in f^{-1}(X) = \Phi(X)$. Mamy więc $x \in \Phi(X) \in \mathcal{R}$ skąd $x \in \bigcup \mathcal{R}$.

($\supseteq$) Niech $x \in \bigcup \mathcal{R}$. Jest takie $X \in \mathcal{R}$, że $x \in X$. Ponieważ $\mathcal{R} \subseteq \mathrm{Rg}(\Phi)$, więc $X = \Phi(Y)$ dla pewnego $Y \subseteq B$. Skoro $x \in X = \Phi(Y) = f^{-1}(Y)$, to $f(x) \in Y$. Ponadto $Y \in \Phi^{-1}(\mathcal{R})$, bo $\Phi(Y) = X \in \mathcal{R}$. Stąd $f(x) \in Y \in \Phi^{-1}(\mathcal{R})$, więc $f(x) \in \bigcup \Phi^{-1}(\mathcal{R})$, czyli $x \in f^{-1}(\bigcup \Phi^{-1}(\mathcal{R})) = \Phi(\bigcup \Phi^{-1}(\mathcal{R}))$.

107a: Tak. Weźmy $f, g \colon X \to Y$ takie, że $f \neq g$. Wtedy dla pewnego $x \in X$ zachodzi $f(x) \neq g(x)$. Zatem $\mathcal{C}_{X,Y}(f)(\{f(x)\}) \neq \mathcal{C}_{X,Y}(g)(\{f(x)\})$.

107b: Nie. Nie istnieje taka funkcja f, że $\mathcal{C}_{\{0\}\{0\}}(f)(\{0\}) = f^{-1}(\{0\}) = \varnothing$.

107c: Nie. Weźmy $X = Y = \mathbb{N}$ i $f(n) = 2n$. Wtedy $\mathcal{C}_{\mathbb{N},\mathbb{N}}(f)(\{1\}) = \mathcal{C}_{\mathbb{N},\mathbb{N}}(f)(\{3\}) = \varnothing$.

107d: Nie. Weźmy $X = Y = \mathbb{N}$ i $f(n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Wtedy $\mathcal{C}_{\mathbb{N},\mathbb{N}}(f)(A) \neq \{0\}$, dla każdego A. Jeśli bowiem $0 \in \mathcal{C}_{\mathbb{N},\mathbb{N}}(f)(A) = f^{-1}(A)$, to $0 = f(0) \in A$. Ale wtedy także $1 \in \mathcal{C}_{\mathbb{N},\mathbb{N}}(f)(A)$, bo $f(1) = \lfloor \frac{1}{2} \rfloor = 0$.

107e: Tak. Weźmy $A \subseteq X$. Szukamy takiego $B \subseteq Y$, że $\mathcal{C}_{X,Y}(f)(B) = A$. Skoro f jest różnowartościowa, to $f^{-1}(f(A)) = A$, więc można przyjąć $B = f(A)$.

107f: Tak. Weźmy $A, B \subseteq Y$, $A \neq B$. Bez straty ogólności zakładamy, że istnieje takie $y \in Y$, że $y \in A$ i $y \notin B$. Skoro f jest *na*, to istnieje takie $x \in X$, że $f(x) = y$. Zatem $x \in \mathcal{C}_{X,Y}(f)(A)$ i $x \notin \mathcal{C}_{X,Y}(f)(B)$.

109a: Nie, na przykład $f(\mathbb{N}) = f(\mathbb{N} - \{0\}) = \mathrm{id}_\mathbb{N}$. Istotnie, dla dowolnego n mamy

$$n = \max\{x \in \mathbb{N} \cup \{0\} \mid x \leq n\} = \max\{x \in \mathbb{N} \mid x \leq n\} = \max\{x \in (\mathbb{N} - \{0\}) \cup \{0\} \mid x \leq n\}.$$

109b: Nie, na przykład funkcja stała $\lambda n.\,3$ nie jest postaci $f(S)$ dla żadnego zbioru S. Niemożliwe jest bowiem, aby $f(S)(2) = 3$, bo $\max\{x \in S \cup \{0\} \mid x \leq 2\} \in \{0, 1, 2\}$.

109c: Inkluzja $f(\mathbb{N})(\mathbb{N}) \subseteq \mathbb{N}$ jest oczywista, bo $f(\mathbb{N})$ jest funkcją z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{N}$. Z drugiej strony, dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$ mamy $k \in f(\mathbb{N})(\mathbb{N})$, ponieważ $f(\mathbb{N})(k) = k$.

109d: ($\Rightarrow$) Załóżmy, że $f(S)^{-1}(S) = \mathbb{N}$. W szczególności $0 \in f(S)^{-1}(S)$, czyli $f(S)(0) \in S$. Ponieważ $f(S)(0) = \max\{x \in S \cup \{0\} \mid x \leq 0\} = 0$, więc $0 \in S$.

($\Leftarrow$) Załóżmy, że $0 \in S$ i niech $n \in \mathbb{N}$. Wtedy $f(S)(n) = \max\{x \in S \cup \{0\} \mid x \leq n\} \in S$. Skoro $f(S)(n) \in S$, to $n \in f(S)^{-1}(S)$.

109e: Łatwo widzieć, że $f(\varnothing) = f(\{0\}) = \lambda x.\,0 \in \mathcal{C}$, zatem $\{\varnothing, \{0\}\} \subseteq f^{-1}(\mathcal{C})$. Na odwrót, jeśli $S \in f^{-1}(\mathcal{C})$, czyli $f(S)$ jest funkcją stałą, to tak samo jak w punkcie 109b udowodnimy, że nie moze to być żadna stała inna niz zero. Stąd $\max\{x \in S \cup \{0\} \mid x \leq n\} = 0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, czyli $S \cup \{0\} = \{0\}$, inaczej mówiąc, albo $S = \varnothing$ albo $S = \{0\}$.

110a: Zauważmy, że $\varphi(\langle f, \lambda x.1\rangle) = \lambda x.x + 1$, dla dowolnego $f \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$. Zatem funkcja φ nie jest różnowartościowa, bo np. $\varphi(\langle \lambda x.17, \lambda x.1\rangle) = \varphi(\langle \lambda x.42, \lambda x.1\rangle)$.

110b: Tak, ponieważ $f = \varphi(\langle f, \lambda x.0\rangle)$, dla dowolnego $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

110c: Niech $g_m = \lambda x.\mathsf{if}\ x = m\ \mathsf{then}\ 1\ \mathsf{else}\ 0$. Dla każdego $m \in \mathbb{N}$ mamy $\varphi(\langle \lambda x.1, g_m\rangle) = \lambda n.1$, więc przeciwobraz $\varphi^{-1}(\{\lambda n.1\})$ jest nieskończony, bo funkcje g_m są różne dla różnych m.

Dla $k \neq 1$ pokażemy, że przeciwobraz $\varphi^{-1}(\{\lambda n.\,k\})$ jest skończony, a dokładniej jednoelementowy. Niech więc $k \neq 1$ i niech $\varphi(\langle f, g\rangle) = \lambda n.k$. Wtedy $g = \lambda x.\,0$. Istotnie, w przeciwnym razie niech $n = \min\{x \mid g(x) = 1\}$. Wtedy $\varphi(\langle f, g\rangle)(n) = 1 \neq k$, sprzeczność. A skoro zawsze $g(n) = 0$, to także $f(n) = \varphi(\langle f, g\rangle)(n) = k$ dla każdego n. Stąd wynika, że para $\langle \lambda x.\,k, \lambda x.\,0\rangle$ jest jedynym elementem przeciwobrazu $\varphi^{-1}(\{\lambda n.k\})$.

110d: Załóżmy najpierw, że $h \in \varphi(\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \{g \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \mid \overline{\overline{g^{-1}(\{1\})}} = 1\})$, to jest, że $h = \varphi(\langle f, g\rangle)$, gdzie $\overline{\overline{g^{-1}(\{1\})}} = 1$. W szczególności, zbiór $g^{-1}(\{1\}) = \{x \mid g(x) = 1\}$ jest niepusty, a już wcześniej widzieliśmy, że $\varphi(\langle f, g\rangle)(n) = 1$ dla $n = \min\{x \mid g(x) = 1\}$. A więc $1 \in \mathrm{Rg}(h)$.

Na odwrót, jeśli $1 \in \mathrm{Rg}(h)$, to niech $m = \min\{y \mid h(y) = 1\}$. Wtedy $h = \varphi(\langle h, g_m\rangle)$, gdzie g_m jest funkcją, o której mowa w rozwiązaniu zadania 110c. Oczywiście $\overline{\overline{g_m^{-1}(\{1\})}} = 1$, więc h należy do lewej strony równania.

113a: Funkcja $\varphi(s)$ jest różnowartościowa, bo zbiory $\varphi(s)(n) = \{k \mid k > n\}$ są różne dla różnych liczb $n \in \mathbb{N}$. Natomiast $\varphi(g)$ jest funkcją stałą, bo $\varphi(g) = \lambda n.\,\{0, 1\}$.

113b: Zbiór G jest nieskończony (mocy $\mathfrak{C}$). Należą do niego na przykład wszystkie funkcje postaci

$$\Phi_A = \lambda n.\,\mathsf{if}\ n \le 1\ \mathsf{then}\ 1 - n\ \mathsf{else\ if}\ n \in A\ \mathsf{then}\ 0\ \mathsf{else}\ 1,$$

gdzie $A \subseteq \mathbb{N} - \{0, 1\}$. Jest tych funkcji nieskończenie wiele, bo oczywiście $\Phi_A \neq \Phi_B$ gdy $A \neq B$. Zbiór E jest pusty: przypuśćmy bowiem, że $h \in E$, czyli $\varphi(h)(n) = \mathbb{N}$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Wtedy np. $1 \in \varphi(h)(0)$ oraz $0 \in \varphi(h)(1)$, więc są takie $k, m > 0$, że $h^k(0) = 1$ oraz $h^m(1) = 0$, skąd $h^{k+m}(0) = 0$. Ale to znaczy, że zbiór $\varphi(h)(0) = \{h^i(0) \mid 0 < i\} = \{h^i(0) \mid 0 < i \le k+m\}$ jest skończony i różny od $\mathbb{N}$ – sprzeczność. Pokażemy jeszcze, że zbiór S jest jednoelementowy, tj, że jeśli $\varphi(h) = \varphi(s)$, to $h = s$. Przypuśćmy więc, że dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ zachodzi $\varphi(h)(n) = \varphi(s)(n) = \{k \mid k > n\}$. To znaczy, że $h^r(n) > n$ dla wszystkich n i wszystkich $r > 0$. Weźmy teraz dowolną liczbę $p \in \mathbb{N}$. Z powyższego wynika, że $h(p) \ge s(p)$. Ale gdyby ta nierówność była ostra, to dla pewnego t mielibyśmy też $h^t(h(p)) = p + 1$, bo przecież $p + 1 \in \varphi(h)(p)$. I tu jest sprzeczność, bo $p + 1 < h(p) \le h^t(h(p))$.

113c: Negatywne odpowiedzi na oba te pytania wynikają wprost z zadania 113b. Skoro zbiór E jest pusty, to funkcja φ nie jest „na", a skoro zbiór G ma więcej niż 1 element, to φ nie jest różnowartościowa.

113d: Skoro $\varphi(f)(n) \subseteq \mathbb{N}$, oraz $\varphi(f) : \mathbb{N} \to \mathsf{P}(\mathbb{N})$, to wyrażenie $\varphi(f)(\varphi(f)(n))$ oznacza obraz zbioru $\varphi(f)(n)$ przy operacji $\varphi(f)$, czyli rodzinę zbiorów $X = \{\varphi(f)(k) \mid k \in \varphi(f)(n)\}$, której suma jest podzbiorem $\mathbb{N}$. Aby udowodnić inkluzję $\bigcup X \subseteq \varphi(f)(n)$, rozpatrzmy dowolny element $m \in \bigcup X$. Z definicji sumy istnieje jakiś element rodziny X, do którego należy m. Inaczej: istnieje takie $k \in \varphi(f)(n)$, że $m \in \varphi(f)(k)$. To znaczy tyle, że $k = f^t(n)$ i $m = f^u(k)$, dla pewnych $t, u > 0$. Ale wtedy $m = f^{t+u}(n)$ skąd $m \in \varphi(f)(n)$ i gotowe.

114: ($a \Rightarrow b$) Załóżmy (a) i przypuśćmy, że $W(g) \subseteq \bigcup\{W(f) \mid f \in F\}$. Ponieważ $W(f) \subseteq X$ dla wszystkich $f \in F$, więc zbiór $\bigcup\{W(f) \mid f \in F\}$ jest zawarty w X. Stąd $W(g) \subseteq X$, a więc $g \in F$.
($b \Rightarrow a$) Niech $X = \bigcup\{W(f) \mid f \in F\}$. Dowodzimy, że $F = \{f : A \to B \mid W(f) \subseteq X\}$.
($\subseteq$) Jeśli $f \in F$, to $W(f) \subseteq X$ wprost z definicji X.
($\supseteq$) A jeśli $W(f) \subseteq X$, to z warunku (b) wynika $f \in F$.

130: Dla dowolnego $m \in \mathbb{N}$ niech $A_m = \mathrm{Rg}(f^m)$, w szczególności $A_0 = A$. Przyjmijmy, że każdy ze zbiorów A_m ma a_m elementów. Ponieważ $f|_{A_m} : A_m \xrightarrow{\text{na}} A_{m+1}$ (dlaczego?), więc ciąg $\{a_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ jest nierosnący, a zatem od pewnego miejsca stały: istnieje takie m, że dla wszystkich $k \ge m$ zachodzi równość $a_k = a_m$. Ponieważ jest tylko skończenie wiele a_m-elementowych podzbiorów skończonego zbioru A, więc istnieją takie liczby p, q, że $m \le p < q$ oraz $A_p = A_q$. Funkcja $(f|_{A_p})^{q-p}$ jest więc bijekcją zbioru A_p w siebie. Zbiór A_p jest oczywiście skończony, więc dla pewnego r mamy $(f|_{A_p})^{r\cdot(q-p)} = \mathrm{id}_{A_p}$. Niech teraz $n = r\cdot p\cdot(q-p)$. Ponieważ $n \ge m$, więc $\mathrm{Rg}(f^n) = A_n = A_p$; ponadto $f^n = \mathrm{id}^p_{A_p} = \mathrm{id}_{A_p}$. A więc funkcja f^n jest identycznością na swoim zbiorze wartości, spełnia więc warunek $f^n \circ f^n = f^n$ na mocy zadania 126.

136a: Przykładem funkcji $f : \mathsf{P}(\mathbb{N}) \to \mathsf{P}(\mathbb{N})$, która dla żadnego T nie jest postaci $\Phi(T)$, jest

$$f(A) = \begin{cases} \mathbb{N}, & \text{jeśli } A = \varnothing; \\ \varnothing, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

136b: Jeśli $T = \{\langle\{x\}, x\rangle \mid x \in \mathbb{N}\}$, to $\Phi(T) = \mathrm{id}_{\mathsf{P}(\mathbb{N})}$, bo wtedy
$$\Phi(T)(a) = \{x \in \mathbb{N} \mid \{x\} \subseteq a\} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \in a\} = a.$$
Aby uzyskać funkcję stałą musimy przyjąć $T = \{\langle\varnothing, x\rangle \mid x \in A\}$, dla wybranego A. Wtedy
$$\Phi(T)(a) = \{x \in \mathbb{N} \mid x \in A\} = A.$$

136c: Przypuśćmy, że $\Phi(T) = \Phi(S)$ i przy tym $T \neq S$, na przykład $\langle a, x\rangle \in T - S$. Skoro x należy do $\Phi(T)(a) = \Phi(S)(a)$, to $\langle b, x\rangle \in S$ dla pewnego $b \subseteq a$. Stąd $x \in \Phi(S)(b) = \Phi(T)(b)$, więc jest takie $c \subseteq b$, że $\langle c, x\rangle \in T$. Wtedy $c \subseteq a$, więc $c = a$. Zatem $\langle a, x\rangle = \langle c, x\rangle \in S$ i mamy sprzeczność.

137: Niech $f(0) = 0$ oraz $f(n) = n - 1$, gdy $n > 0$. Jeśli teraz $X = \{0\}$, to mamy $g(i) = f^{-i}(\{0\}) = \{n \mid f^i(n) = 0\} = \{0, \ldots, i\}$. A zatem $g(i) \neq g(j)$, dla $i \neq j$.

138: Tak, podany warunek spełnia funkcja
$$f(n) = \begin{cases} n + 2 & \text{gdy } n \text{ jest parzyste,} \\ n - 2 & \text{gdy } n \text{ jest nieparzyste i } n \geq 3, \\ 0 & \text{gdy } n = 1. \end{cases}$$
Niech $m \geq 1$. Zauważmy, że jeśli n jest parzyste, to $f^m(n) > n$, zaś jeśli n jest nieparzyste, to $f^m(n)$ jest albo mniejsze od n, albo parzyste.

139a: ($\Rightarrow$) Niech $A \subseteq B$ i niech $f \in B^{\#}$. Wtedy $f^{-1}(B) = \varnothing$. Z inkluzji $A \subseteq B$ wnioskujemy, że $f^{-1}(A) = \{n \in \mathbb{N} \mid f(n) \in A\} \subseteq \{n \in \mathbb{N} \mid f(n) \in B\} = f^{-1}(B) = \varnothing$, skąd $f \in A^{\#}$.
($\Leftarrow$) Niech $B^{\#} \subseteq A^{\#}$ i niech $a \in A$. Przypuśćmy, że $a \notin B$ i niech f będzie funkcją stale równą a. Wtedy $f^{-1}(B) = \{n \in \mathbb{N} \mid f(n) \in B\} = \{n \in \mathbb{N} \mid a \in B\} = \varnothing$, więc $f \in B^{\#} \subseteq A^{\#}$. Ale mamy także $f^{-1}(A) = \{n \in \mathbb{N} \mid f(n) \in A\} = \{n \in \mathbb{N} \mid a \in A\} = \mathbb{N}$, zatem $f \notin A^{\#}$, sprzeczność.

139b: Nastepujące równoważności wynikają wprost z definicji:
$$\begin{aligned} f \in \textstyle\bigcap_{t\in T} D_t^{\#} &\quad\Leftrightarrow\quad \forall t \in T \forall n \in \mathbb{N}.\, f(n) \notin D_t; \\ f \in \textstyle\bigcup_{t\in T} D_t^{\#} &\quad\Leftrightarrow\quad \exists t \in T \forall n \in \mathbb{N}.\, f(n) \notin D_t; \\ f \in (\textstyle\bigcup_{t\in T} D_t)^{\#} &\quad\Leftrightarrow\quad \forall n \in \mathbb{N} \neg(\exists t \in T.\, f(n) \in D_t); \\ f \in (\textstyle\bigcap_{t\in T} D_t)^{\#} &\quad\Leftrightarrow\quad \forall n \in \mathbb{N} \neg(\forall t \in T.\, f(n) \in D_t). \end{aligned}$$

Dwie ostatnie równoważności możemy jeszcze przepisać tak:
$$\begin{aligned} f \in (\textstyle\bigcup_{t\in T} D_t)^{\#} &\quad\Leftrightarrow\quad \forall n \in \mathbb{N} \forall t \in T.\, f(n) \notin D_t; \\ f \in (\textstyle\bigcap_{t\in T} D_t)^{\#} &\quad\Leftrightarrow\quad \forall n \in \mathbb{N} \exists t \in T.\, f(n) \notin D_t. \end{aligned}$$

Wynika stąd od razu, że zachodzi równość (i), wystarczy przestawić kolejność kwantyfikatorów uniwersalnych. W przypadku (ii) możemy wywnioskować tylko inkluzję z lewej do prawej. Równość (ii) w ogólności nie zachodzi: niech na przykład $T = \mathbb{N}$ oraz $D_t = \{n \mid n \geq t\}$. Wtedy $\bigcap_{t\in T} D_t = \varnothing$, więc zbiór $(\bigcap_{t\in T} D_t)^{\#}$, czyli zbiór $\varnothing^{\#}$, to zbiór wszystkich funkcji z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{N}$, bo przeciwobraz zbioru pustego jest zawsze pusty. Tymczasem funkcja identycznościowa $\mathrm{id}_{\mathbb{N}}$ nie należy do zbioru $\bigcup_{t\in T} D_t^{\#}$, bo zbiory $\mathrm{id}_{\mathbb{N}}^{-1}(D_t)$ są niepuste (mamy $\mathrm{id}_{\mathbb{N}}^{-1}(D_t) = D_t$).

140a: ($\Rightarrow$) Niech $A \subseteq B$ i niech $f \in A^!$. Wtedy $f^{-1}(\mathbb{N}) \subseteq A \subseteq B$, zatem $f \in B^!$.
($\Leftarrow$) Niech $A^! \subseteq B^!$ i niech $a \in A$. Niech $f_a : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ będzie funkcją zdefiniowaną następująco $f_a(x) = \textsf{if } x = a \textsf{ then } 0 \textsf{ else } -1$. Oczywiście $f_a^{-1}(\mathbb{N}) = \{a\}$, a zatem $f_a \in A^!$. Skoro $A^! \subseteq B^!$, więc także $f_a \in B^!$, czyli $a \in B$.

140b: Następujące równoważności wynikają wprost z definicji:
$$\begin{aligned} f \in \textstyle\bigcap_{t\in T} D_t^! &\quad\Leftrightarrow\quad \forall t \in T\ \forall z \in f^{-1}(\mathbb{N})\ (z \in D_t); \\ f \in (\textstyle\bigcap_{t\in T} D_t)^! &\quad\Leftrightarrow\quad \forall z \in f^{-1}(\mathbb{N})\ \forall t \in T\ (z \in D_t). \end{aligned}$$

Wynika stąd od razu, że zachodzi równość (i), wystarczy przestawić kolejność kwantyfikatorów uniwersalnych. Równość (ii) w ogólności nie zachodzi: niech na przykład $T = \mathbb{N}$ oraz $D_t = \{t\}$ dla $t \in \mathbb{N}$.

Wtedy $\bigcup_{t\in T} D_t = \mathbb{N}$, więc np. $\mathrm{id}_\mathbb{Z} \in (\bigcup_{t\in T} D_t)^!$, bo $\mathrm{id}_\mathbb{Z}^{-1}(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$. Ale oczywiście dla żadnego $t \in T$ nie zachodzi $\mathrm{id}_\mathbb{Z} \in D_t^!$, a zatem $\mathrm{id}_\mathbb{Z} \notin \bigcup_{t\in T} D_t^!$.

141: Załóżmy, że $C \subseteq A$ i $B \subseteq D$ i niech $f \in [A \Rightarrow B]$. Aby pokazać, że $f \in [C \Rightarrow D]$, przypuśćmy, że $n \in C$. Wtedy $n \in A \subseteq f^{-1}(B)$, czyli $f(n) \in B \subseteq D$. Stąd $n \in f^{-1}(D)$. Pokazaliśmy, że $C \subseteq f^{-1}(D)$, czyli $f \in [C \Rightarrow D]$.

Załóżmy teraz, że $[A \Rightarrow B] \subseteq [C \Rightarrow D]$. Udowodnimy najpierw, że $B \subseteq D$. Niech $b \in B$ i niech $f_b = \lambda x.\, b$. Wtedy $f_b^{-1}(B) = \{n \mid f_b(n) \in B\} = \{n \mid b \in B\} = \mathbb{N} \supseteq A$, więc $f_b \in [A \Rightarrow B]$. Skoro $[A \Rightarrow B] \subseteq [C \Rightarrow D]$, to $f_b \in [C \Rightarrow D]$, czyli $C \subseteq f_b^{-1}(D)$. Ponieważ $C \neq \varnothing$, więc $f_b^{-1}(D) \neq \varnothing$, czyli istnieje taka liczba c, że $f_b(c) \in D$. Ale $f_b(c) = b$, więc $b \in D$.

Aby wykazać $C \subseteq A$, przypuśćmy, że $x \in C - A$. Skoro $D \neq \mathbb{N}$ i $B \neq \varnothing$, to istnieją takie k, b, że $k \notin D$ i $b \in B$. Niech $h = \lambda y.\, \mathsf{if}\ y = x\ \mathsf{then}\ k\ \mathsf{else}\ b$. Dla $y \in A$ mamy $h(y) = b \in B$, więc $A \subseteq h^{-1}(B)$, czyli $h \in [A \Rightarrow B] \subseteq [C \Rightarrow D]$. Zatem $C \subseteq h^{-1}(D) = \{n \mid h(n) \in D\}$, skąd $h(x) \in D$. Ale $h(x) = k \notin D$, sprzeczność.

142: Załóżmy najpierw, że $A \subseteq C$ i $D \subseteq B$. Weźmy dowolną fukcję $f \in B \Rrightarrow A$. Mamy udowodnić, że $f \in D \Rrightarrow C$, tj. że $f^{-1}(D) \subseteq C$. Niech więc $n \in f^{-1}(D)$. Wtedy $f(n) \in D \subseteq B$, więc $n \in f^{-1}(B)$. Ponieważ $f \in B \Rrightarrow A$, więc $f^{-1}(B) \subseteq A \subseteq C$, czyli pokazaliśmy, że $n \in C$.

Dla udowodnienia implikacji przeciwnej załóżmy, że $B \Rrightarrow A \subseteq D \Rrightarrow C$ dla $A, B, C, D \neq \varnothing, \mathbb{N}$. Pokażemy najpierw, że $D \subseteq B$. Weźmy dowolne $d \in D$. Załóżmy nie wprost, że $d \notin B$ i niech $f_d = \lambda x.\, d$. Wtedy $f_d \in B \Rrightarrow A$, gdyż $f_d^{-1}(B) = \{n \mid f_d(n) \in B\} = \{n \mid d \in B\} = \varnothing \subseteq A$, ale $f_d \notin D \Rrightarrow C$, gdyż $f_d^{-1}(D) = \{n \mid f_d(n) \in D\} = \{n \mid d \in D\} = \mathbb{N} \not\subseteq C$, sprzeczność. Zatem $d \in B$, wykazaliśmy więc, że $D \subseteq B$.

Aby pokazać, że $A \subseteq C$, załóżmy, że $a \in A$. Wiemy, że $D \neq \varnothing$ i $B \neq \mathbb{N}$ więc istnieją takie $d, \hat{b}$, że $d \in D$ oraz $\hat{b} \notin B$. Rozpatrzmy funkcję

$$f(x) = \begin{cases} d, & \text{jeśli } x = a; \\ \hat{b}, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Mamy $f^{-1}(B) = \{n \mid f(n) \in B\} \subseteq \{a\} \subseteq A$, a więc $f \in B \Rrightarrow A \subseteq D \Rrightarrow C$, skąd $f^{-1}(D) \subseteq C$. Ponieważ $f(a) = d$, więc $a \in f^{-1}(D)$, skąd $a \in C$.

143a: Tak, to jest dobrze określona funkcja. Dla $n \in \mathbb{N}$ rozpatrzmy zbiór $A_n = \{k \in \mathbb{N} \mid (k+1)^2 > n\}$. Ponieważ $n \in A_n$, więc $A_n \neq \varnothing$. Niech $k = \min A_n$; wtedy $k^2 \le n$ i dla $l = n - k$ oba warunki zachodzą.

Przypuśćmy, że $k_1^2 + l_1 = n$ oraz $n < (k_1 + 1)^2$, dla pewnych k_1, l_1. Wtedy $k_1 \in A_n$, więc $k \le k_1$. Z drugiej strony mamy $k_1^2 \le n < (k+1)^2$, więc $k_1 < k + 1$. Ostatecznie, $k \le k_1 < k + 1$, więc jedyna możliwość to $k_1 = k$. Wtedy też $l = k - n = k_1 - n = l_1$.

143b: Nie, ta funkcja nie jest „na". Rozważmy parę $\langle 0, 3\rangle$. Jeśli $f(n) = \langle 0, 3\rangle$, dla pewnego n, to $n = 0^2 + 3 = 3$. Ale wtedy $1 = (0 + 1)^2 > 3$ – sprzeczność. Zatem $\langle 0, 3\rangle$ nie jest wartością funkcji f.

143c: Tak. Załóżmy, że $f(n_1) = f(n_2) = \langle k, l\rangle$. Wtedy $n_1 = k^2 + l = n_2$.

143d: Zauważmy najpierw, że $\Sigma_{i=0}^k 2i = 2\Sigma_{i=0}^k i = 2\frac{k(k+1)}{2} = k^2 + k$, dla dowolnego k. Ponieważ $(k + 1)^2 = k^2 + 2k + 1 > k^2 + k$, więc $f(\Sigma_{i=0}^k 2i) = \langle k, k\rangle$.
Pokażemy teraz, że $f(A) = \{\langle k, k\rangle \mid k \in \mathbb{N}\}$. Niech $\langle r, l\rangle \in f(A)$. Wtedy $\langle r, l\rangle = f(\Sigma_{i=0}^k 2i)$, dla pewnego k, czyli $\langle r, l\rangle = \langle k, k\rangle$. A zatem $\langle r, l\rangle \in \{\langle k, k\rangle \mid k \in \mathbb{N}\}$. Na odwrót, dla każdego elementu zbioru $\{\langle k, k\rangle \mid k \in \mathbb{N}\}$ zachodzi $f(\Sigma_{i=0}^k 2i) = \langle k, k\rangle$, a więc $\{\langle k, k\rangle \mid k \in \mathbb{N}\} \subseteq f(A)$.

143e: Szukany przeciwobraz $f^{-1}(B)$, to zbiór $C = \{l^2 - 1 \mid l > 0 \wedge l \in \mathbb{N}\}$.
Pokażemy, że $C \subseteq f^{-1}(B)$. Weźmy dowolny element n zbioru C. Wtedy $n = l^2 - 1$, gdzie $l > 0$, więc $n = (k + 1)^2 - 1$, dla pewnego k. Zatem $n = k^2 + 2k$ oraz $n < (k + 1)^2$, skąd $f(n) = \langle k, 2k\rangle \in B$. A więc $n \in f^{-1}(B)$. Na odwrót, niech $n \in f^{-1}(B)$. Z definicji zbioru B wynika że $f(n) = \langle n_1, 2n_1\rangle$, dla pewnego n_1, czyli $n_1^2 + 2n_1 = n < (n_1 + 1)^2 = n_1^2 + 2n_1 + 1$. Wtedy $n = (n_1 + 1)^2 - 1$, skąd od razu $n \in C$. W ten sposób udowodniliśmy, że $f^{-1}(B) \subseteq C$. A zatem zachodzi równość.

144a: Załóżmy, że $\Phi(h) = \Phi(h')$ dla pewnych $h, h' \in Y^X$. Pokażemy, że wówczas $h = h'$. Istotnie, z definicji $h = \Phi(h)(\mathrm{id}_X)$ oraz $h' = \Phi(h')(\mathrm{id}_X)$. Skoro $\Phi(h) = \Phi(h')$, to też $h = h'$.

144b: Pokażemy, że zbiór wartości funkcji Φ jest równy I.
$(\mathrm{Rg}(\Phi) \subseteq I)$ Rozpatrzmy dowolną funkcję $h \in Y^X$. Pokażemy, że $\Phi(h) \in I$. Istotnie, z definicji Φ wynika $\Phi(h)(f \circ g) = h \circ f \circ g = \Phi(h)(f) \circ g$, dla dowolnych funkcji $f, g : X \to X$.

($I \subseteq \mathrm{Rg}(\Phi)$) Niech F będzie elementem zbioru I. Pokażemy, że $F = \Phi(h)$, gdzie $h = F(\mathrm{id}_X)$. Rozpatrzmy dowolną funkcję $f : X \to X$. Wówczas $F(f) = F(\mathrm{id}_X \circ f) = F(\mathrm{id}_X) \circ f = h \circ f = \Phi(h)(f)$. (Druga równość wynika z założenia, że $F \in I$.) A zatem, $F = \Phi(h)$.

145: Przypuśćmy, że funkcja f jest niezmiennicza ze względu na permutacje. Niech $m \in \mathbb{N}$ oraz niech $n = f(m)$. Pokażemy, że $n = m$. Załóżmy przeciwnie, że $n \neq m$. Niech n' będzie dowolną liczbą naturalną różną od m oraz n. Rozważmy taką permutację π, że $\pi(m) = m$, $\pi(n) = n'$, $\pi(n') = n$, oraz $\pi(k) = k$ dla $n \notin \{m, n, n'\}$. Z założenia o niezmienniczości f wynika, że

$$n = f(m) = f(\pi(m)) = \pi(f(m)) = \pi(n) = n',$$

ale $n \neq n'$, więc mamy sprzeczność. Wobec tego, $f(m) = m$ dla dowolnej liczby naturalnej m, czyli $f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$. Funkcja $\mathrm{id}_{\mathbb{N}}$ oczywiście jest funkcją niezmienniczą i pokazaliśmy, że jest to jedyna funkcja niezmiennicza. Poszukiwanym zbiorem jest singleton $\{\mathrm{id}_{\mathbb{N}}\}$.

146: Niech F będzie funkcją spełniającą warunki z treści zadania. Znajdziemy taką funkcję $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, że $f^{-1}(X) = F(X)$ dla dowolnego zbioru $X \subseteq \mathbb{N}$. W tym celu, dla $m \in \mathbb{N}$ zdefiniujemy $f(m)$ jako taką liczbę naturalną n, że $m \in F(\{n\})$. Inaczej, $f(m) = \imath n{:}\mathbb{N}.\, m \in F(\{n\})$. Pokażemy najpierw, że taka liczba $n \in \mathbb{N}$ istnieje, a potem pokażemy, że jest ona jedyna.

Na mocy równania (146a), $F(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$. Oczywiście, $\mathbb{N} = \bigcup \big\{\{n\} \bigm| n \in \mathbb{N}\big\}$, a więc, przyjmując $\mathcal{X} = \big\{\{n\} \bigm| n \in \mathbb{N}\big\}$ w równaniu (146c), dostajemy, że

$$\mathbb{N} = F(\mathbb{N}) = F(\bigcup \big\{\{n\} \bigm| n \in \mathbb{N}\big\}) = \bigcup \big\{F(\{n\}) \bigm| n \in \mathbb{N}\big\}.$$

Ponieważ $m \in \mathbb{N}$, to również m należy do prawej strony powyższego równania, czyli istnieje taka liczba $n \in \mathbb{N}$, że $m \in F(\{n\})$.

Załóżmy teraz, że $m \in F(\{n\})$ oraz że $m \in F(\{n'\})$, przy czym $n \neq n'$. Wtedy, na mocy równań (146d) oraz (146b), mamy $m \in F(\{n\}) \cap F(\{n'\}) = F(\{n\} \cap \{n'\}) = F(\varnothing) = \varnothing$, ale przecież niemożliwe jest, by $m \in \varnothing$. A zatem istnieje dokładnie jedna liczba n taka, że $m \in F(\{n\})$. Wobec tego, nasza definicja funkcji f jest poprawna.

Niech $n \in \mathbb{N}$. Z definicji funkcji f wynika, że $f(m) = n$ wtedy i tylko wtedy, gdy $m \in F(\{n\})$ dla dowolnej liczby $m \in \mathbb{N}$. Tak więc, $f^{-1}(\{n\}) = \big\{m \bigm| f(m) \in \{n\}\big\} = F(\{n\})$. Wreszcie, dla dowolnego zbioru $X \subseteq \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} f^{-1}(X) = f^{-1}\left(\bigcup \big\{\{n\} \bigm| n \in X\big\}\right) &= \{z \in \mathbb{N} \mid f(z) \in \bigcup \{\{n\} \bigm| n \in X\}\} = \\ &= \{z \in \mathbb{N} \mid \exists n \in X.\, f(z) \in \{n\}\} = \{z \in \mathbb{N} \mid \exists n \in X.\, z \in f^{-1}(\{n\})\} = \\ &= \bigcup \big\{f^{-1}(\{n\}) \bigm| n \in X\big\} = \bigcup \big\{F(\{n\}) \bigm| n \in X\big\} = \\ &= F\left(\bigcup \big\{\{n\} \bigm| n \in X\big\}\right) = F(X)\,. \end{aligned}$$

Tak więc, funkcja f spełnia wymagany warunek. Pozostaje wykazać, że jest to jedyna taka funkcja. W tym celu zauważmy, że jeżeli $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ są dwiema funkcjami takimi, że $f^{-1}(\{n\}) = g^{-1}(\{n\})$, dla dowolnej liczby $n \in \mathbb{N}$, to $f = g$.

Istotnie, rozpatrzmy dowolne $m \in \mathbb{N}$. Wtedy, biorąc $n = f(m)$, dostajemy równość $f^{-1}(\{f(m)\}) = g^{-1}(\{f(m)\})$. Ponieważ $m \in f^{-1}(\{f(m)\})$ więc także $m \in g^{-1}(\{f(m)\})$, czyli $g(m) \in \{f(m)\}$, a to musi znaczyć, że $g(m) = f(m)$. Stąd od razu wynika, że jeżeli $f^{-1}(X) = g^{-1}(X)$ dla dowolnego zbioru $X \subseteq \mathbb{N}$, to $f = g$, więc jest najwyżej jedna taka funkcja f, że $f^{-1}(X) = F(X)$ dla dowolnego $X \subseteq \mathbb{N}$.

147: Dla funkcji następnika s nie istnieje rozkład postaci $s = g \circ g$. W przeciwnym razie przypuśćmy, że $g(0) = n$ oraz $g(n) = 1$. Wtedy $2n = s^n(n) = g^{2n+1}(0) = g(s^n(0)) = g(n) = 1$, skąd $2n = 1$ co jest niemożliwe dla $n \in \mathbb{N}$. Ale prostszym przykładem jest funkcja $f = \lambda x.\, 1 - x : \{0,1\} \to \{0,1\}$.

148a: Uogólniona składowa wyznaczona przez funkcję $\lambda i.\, 1$ jest iloczynem postaci:

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} [0, 2i+1).$$

Ciąg przedziałów $[0, 2i+1)$ jest wstępujący, więc ich iloczyn jest równy pierwszemu wyrazowi tego ciągu, tzn. $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} [0, 2i+1) = [0, 1)$.

Zauważmy, że $[0, 2i+1)^0 = [0, \infty) - [0, 2i+1) = [2i+1, \infty)$, dla dowolnego $i \in \mathbb{N}$. Zatem uogólniona składowa wyznaczona przez funkcję $\lambda i.\, 0$ jest iloczynem postaci:

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} [2i+1, \infty).$$

Ten iloczyn jest pusty. Istotnie, gdyby $x \in \bigcap_{i \in \mathbb{N}} [2i+1, \infty)$, to $2i + 1 \leqslant x$ dla dowolnego $i : \mathbb{N}$, czyli x byłoby większe od wszystkich nieparzystych liczb naturalnych, a taka liczba rzeczywista nie istnieje, co prowadzi do sprzeczności.

148b: Niech $f : \mathbb{N} \longrightarrow \{0,1\}$ będzie taką funkcją, że $f(2) = 1$ oraz $f(3) = 0$. Czynnikami iloczynu $\bigcap_{i\in\mathbb{N}}[2i+1,\infty)^{f(i)}$ są zbiory $[0,(2\cdot 2)+1)^1 = [0,5)$, oraz $[0,(2\cdot 3)+1)^0 = [0,\infty) - [0,7) = [7,\infty)$. Ponieważ $[0,5) \cap [7,\infty) = \varnothing$, więc $\bigcap_{i\in\mathbb{N}}[2i+1,\infty)^{f(i)} = \varnothing$, skąd uogólniona składowa wyznaczona przez funkcję f jest pusta.

Niech teraz $g(0) = 0$ i $g(x) = 1$ dla $x > 0$. Funkcja g wyznacza uogólnioną składową postaci $[1,\infty) \cap \bigcap_{i>0}[0,2i+1)$. Ten iloczyn jest niepusty, bo należy do niego liczba 1.

148c: Zaczniemy od takiej obserwacji: jeśli funkcja s wyznacza niepustą uogólnioną składową, to jest monotoniczna, tj. $m \leq n$ implikuje $s(m) \leq s(n)$. W przeciwnym razie $s(m) = 1$ i $s(n) = 0$, jeśli więc liczba x jest elementem uogólnionej składowej, to w szczególności

$$x \in C_m^{s(m)} \cap C_n^{s(n)} = [0,2m+1)^1 \cap [0,2n+1)^0 = [0,2m+1) \cap [2n+1,\infty) = \varnothing.$$

Oprócz funkcji $\lambda x.\,0$, która wyznacza pustą składową i nas nie interesuje, funkcje monotoniczne z $\mathbb{N}$ do $\{0,1\}$ są tylko postaci: $g_n(x) = \texttt{if } x < n \texttt{ then } 0 \texttt{ else } 1$. Funkcja g_0 to funkcja $\lambda x.\,1$, która, jak już wiemy, wyznacza uogólnioną składową $S_0 = [0,1)$. Pokażemy, że dla $n > 0$ składowa wyznaczona przez g_n to przedział $S_n = [2n-1, 2n+1)$. Istotnie, $\bigcap_{i\geq 0} C_i^{g_n(i)} = \bigcap_{i<n}[2i+1,\infty) \cap \bigcap_{i\geq n}[0,2i+1)$. Ponieważ ciąg przedziałów $[2i+1,\infty)$ dla $i = 0\ldots n-1$ jest skończonym ciągiem malejącym, więc $\bigcap_{i<n}[2i+1,\infty)$ jest równy ostatniemu elementowi ciągu, czyli przedziałowi $[2n-1,\infty)$. Podobnie, ciąg przedziałów $[0,2i+1)$ dla $i = n, n+1, \ldots$ jest ciągiem rosnącym, a więc jego przecięcie jest równe pierwszemu elementowi, czyli $[0,2n+1)$. Zatem $\bigcap_{i\geq 0} C_i^{g_n(i)} = [2n-1,\infty)\cap[0,2n+1) = [2n-1,2n+1)$. A zatem zbiór $\prod_{\mathcal{C}}^{+}$ wszystkich niepustych uogólnionych składowych to zbiór $\{S_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Ponieważ zbiory S_n są oczywiście parami różne, więc bijekcję $F : \mathbb{N} \xrightarrow[\text{na}]{1-1} \prod_{\mathcal{C}}^{+}$ można określić wzorem $F(n) = S_n$.

149a: Tak. **149b:** Tak.

149c: Tak. Jest to iloczyn rodziny wszystkich zbiorów zawierających B i zamkniętych ze względu na f. (Ta rodzina jest niepusta, bo zbiór $\mathbb{N}$ jest oczywiście f-zamknięty i zawiera B.) Ten sam zbiór można też zdefiniować jako sumę $B_\omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ wstępującego ciągu zbiorów B_n, gdzie $B_0 = B$ oraz $B_{n+1} = B_n \cup \{f(D) \mid D \subseteq B_n\}$ dla $n \in \mathbb{N}$.

150a: Tak. Niech $\mathcal{Z}$ będzie niepustą rodziną zbiorów f-zamkniętych i niech $A \subseteq \bigcap\mathcal{Z}$. Wtedy $A \subseteq Z$, dla wszystkich $Z \in \mathcal{Z}$, więc także $F(A) \in Z$, dla wszystkich $Z \in \mathcal{Z}$. No to $F(A) \in \bigcap\mathcal{Z}$.

150b: Nie. Rozpatrzmy funkcję $F = \lambda A.\,\mathsf{if}\ A$ skończony $\mathsf{then}\ 0\ \mathsf{else}\ 1$ i łańcuch zbiorów $\{A_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, gdzie $A_i = \{2n \mid n \leq i\}$ dla $i \in \mathbb{N}$. Zbiory A_i są F-zamknięte, bo $0 \in A_i$ dla każdego $i \in \mathbb{N}$. Ale suma $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$ nie jest F-zamknięta.

150c: Tak. Jest to iloczyn rodziny wszystkich F-zamkniętych zbiorów zawierających B. Rodzina ta jest niepusta, gdyż $\mathbb{N}$ jest F-zamknięty.

150d: Nie. Weźmy na przykład taką funkcję F:

$$F(A) = \begin{cases} 0, & \text{jeśli } A = \varnothing; \\ \max A + 2, & \text{jeśli } A \neq \varnothing \text{ i } A \text{ skończony;} \\ 1, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Jeśli $B = \varnothing$, to B_ω jest zbiorem wszystkich liczb parzystych, tymczasem $F(B_\omega) = 1 \notin B_\omega$.

151a: Elementami rodziny $C(s)$ są wszystkie zbiory postaci $\{m \mid m \geq i\}$, dla $i \in \mathbb{N}$, oraz zbiór pusty. Natomiast do $C(p)$ należy zbiór pusty, zbiór pełny i wszystkie zbiory postaci $\{m \mid m \leq i\}$ dla $i \geq 1$.

151b: Funkcja C nie jest na $\mathsf{P}(\mathsf{P}(\mathbb{N}))$, patrz 151d. Nie jest różnowartościowa, bo na przykład dla:

$$f(n) = \begin{cases} n+2, & \text{jeśli } n \text{ jest podzielne przez 3;} \\ n-1, & \text{w przeciwnym przypadku,} \end{cases}$$

zachodzi $C(f) = C(f^{-1}) = \{\bigcup X \mid X \subseteq \{\{3k, 3k+1, 3k+2\} \mid k \in \mathbb{N}\}$. Inaczej, do $C(f) = C(f^{-1})$ należą wszystkie sumy zbiorów postaci $\{3k, 3k+1, 3k+2\}$.

151c: Załóżmy, że $\mathcal{Z}' \subseteq C(f)$. Udowodnimy, że $f(\bigcup\mathcal{Z}') \subseteq \bigcup\mathcal{Z}'$. Niech $x \in f(\bigcup\mathcal{Z}')$. Wtedy $x = f(y)$ dla pewnego $y \in \bigcup\mathcal{Z}'$. Jest takie $A \in \mathcal{Z}'$, że $y \in A$. Skoro $A \in \mathcal{Z}' \subseteq C(f)$, to $f(A) \subseteq A$, w szczególności $x = f(y) \in A$. Stąd $x \in \bigcup\mathcal{Z}'$.

Jeśli $\mathcal{Z}' \neq \varnothing$, to także $f(\bigcap\mathcal{Z}') \subseteq \bigcap\mathcal{Z}'$. Jeśli bowiem $x \in f(\bigcap\mathcal{Z}')$, to $x = f(y)$ dla pewnego $y \in \bigcap\mathcal{Z}'$. Wtedy $x \in \bigcap\mathcal{Z}'$. Istotnie, dla dowolnego $A \in \mathcal{Z}'$ mamy $y \in A$, czyli $x \in f(A) \subseteq A$. Zatem $x \in A$.

151d: Nie. Na przykład rodzina $\{\varnothing, \mathbb{N}\}$ spełnia podane warunki, ale nie jest postaci $C(f)$. Przypuśćmy przeciwnie i zauważmy, że dla każdego $x \in \mathbb{N}$ zbiór $D_x = \{f^k(x) \mid k \in \mathbb{N}\}$ należy do $C(f)$. Ten zbiór nie jest pusty, zatem $D_x = \mathbb{N}$, w szczególności wszystkie wartości $f^k(x)$ są różne (inaczej zbiór D_x byłby skończony). Ale stąd wynika, że $D_{f(0)} = \{f^k(0) \mid k > 0\} \neq D_0 = \mathbb{N}$ i też mamy sprzeczność.

152a: Tak. Niech $A, B \in \mathsf{P}(\mathbb{N})$ i niech $A \neq B$, na przykład niech $n \in A - B$. Wtedy $\varphi(A)(\mathrm{id}_{\mathsf{P}(\mathbb{N})})(A) = \mathrm{id}_{\mathsf{P}(\mathbb{N})}(A \cap A) \cap A = A \cap A \cap A = A$, tymczasem $\varphi(B)(\mathrm{id}_{\mathsf{P}(\mathbb{N})})(A) = \mathrm{id}_{\mathsf{P}(\mathbb{N})}(A \cap B) \cap B = A \cap B$. Ponieważ $n \notin A \cap B$, więc $\varphi(A)(\mathrm{id}_{\mathsf{P}(\mathbb{N})})(A) \neq \varphi(B)(\mathrm{id}_{\mathsf{P}(\mathbb{N})})(A)$. Stąd $\varphi(A)(\mathrm{id}_{\mathsf{P}(\mathbb{N})}) \neq \varphi(B)(\mathrm{id}_{\mathsf{P}(\mathbb{N})})$, a zatem $\varphi(A) \neq \varphi(B)$.

152b: Nie. Zbiór $\mathsf{P}(\mathbb{N}) \to \mathsf{P}(\mathbb{N})$ jest mocy $2^{\mathfrak{C}}$, zatem przeciwdziedzina funkcji φ jest mocy $2^{2^{\mathfrak{C}}}$. Natomiast dziedzina $\mathsf{P}(\mathbb{N})$ jest mocy $\mathfrak{C}$. Ponieważ $\mathfrak{C} < 2^{\mathfrak{C}} < 2^{2^{\mathfrak{C}}}$, więc żadna surjekcja nie istnieje.
Inne rozwiązanie: Z części (152c) wynika, że żadna bijekcja, oprócz identycznościowej, nie jest wartością funkcji φ. Tymczasem istnieją nieidentycznościowe bijekcje z $\mathsf{P}(\mathbb{N}) \to \mathsf{P}(\mathbb{N})$ do $\mathsf{P}(\mathbb{N}) \to \mathsf{P}(\mathbb{N})$, na przykład operacja $H = \lambda f.\,\mathsf{if}\ f = \lambda X.\,\varnothing\ \mathsf{then}\ \lambda X.\,\mathbb{N}\ \mathsf{else\ if}\ f = \lambda X.\,\mathbb{N}\ \mathsf{then}\ \lambda X.\,\varnothing\ \mathsf{else}\ f$.

152c: Przypuśćmy, że $\varphi(A)$ jest bijekcją. Zatem istnieje takie g, że $\varphi(A)(g) = \mathrm{id}_{\mathsf{P}(\mathbb{N}) \to \mathsf{P}(\mathbb{N})}$, w szczególności $\mathbb{N} = \varphi(A)(g)(\mathbb{N}) = g(A \cap \mathbb{N}) \cap A \subseteq A$. Stąd wynika $A = \mathbb{N}$, a więc $\varphi^{-1}(\mathcal{B}) \subseteq \{\mathbb{N}\}$. W istocie zachodzi równość, bo funkcja $\varphi(\mathbb{N})$ jest bijekcją, mianowicie $\varphi(\mathbb{N}) = \mathrm{id}_{(\mathsf{P}(\mathbb{N}) \to \mathsf{P}(\mathbb{N})) \to (\mathsf{P}(\mathbb{N}) \to \mathsf{P}(\mathbb{N}))}$. Mamy bowiem $\varphi(\mathbb{N})(f)(X) = f(X \cap \mathbb{N}) \cap \mathbb{N} = f(X)$ dla dowolnych f i X.

153a: Nie. Na przykład jeśli s jest funkcją następnika, to:
$$F(s, \{1\}) = s(\{1\}) \cap s^{-1}(\{1\}) = \{2\} \cap \{0\} = \varnothing = \{3\} \cap \{1\} = s(\{2\}) \cap s^{-1}(\{2\}) = F(s, \{2\}).$$

153b: Tak. Każdy niepusty zbiór $A \subseteq \mathbb{N}$ jest postaci $F(\mathrm{id}_{\mathbb{N}}, A)$, a o zbiorze pustym już była mowa w odpowiedzi na pytanie 153a.

153c: Dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$ i dowolnego $A \in \mathsf{P}_+(\mathbb{N})$ mamy $(\lambda n.\,k)(A) = \{k\}$ oraz $(\lambda n.\,k)^{-1}(A) = \{n \mid k \in A\} = \mathsf{if}\ k \in A\ \mathsf{then}\ \mathbb{N}\ \mathsf{else}\ \varnothing$. Zatem $F(\lambda n.\,k, A) = \mathsf{if}\ k \in A\ \mathsf{then}\ \{k\}\ \mathsf{else}\ \varnothing$. Poszukiwanym obrazem jest więc zbiór $\{\{k\} \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{\varnothing\}$, który jest oczywiście mocy $\aleph_0$.

153d: Z odpowiedzi na pytanie 153b wiemy, że taką funkcją jest $\mathrm{id}_{\mathbb{N}}$. Innych nie ma. Przypuśćmy bowiem, że $f(n) = m \neq n$ dla pewnego n. Wtedy $F(f, \{n\}) = \{m\} \cap f^{-1}(\{n\}) \subseteq \{m\}$, a zatem $F(f, \{n\}) \neq \{n\}$, bo przecież $\{n\} \not\subseteq \{m\}$.

153e: Przeciwobraz $F^{-1}(\{\mathbb{N}\})$ jest mocy continuum, bo jest równoliczny ze zbiorem $\mathcal{S}$ wszystkich surjekcji z $\mathbb{N}$ w $\mathbb{N}$. Istnieje bowiem bijekcja $H : \mathcal{S} \xrightarrow[\text{na}]{1-1} F^{-1}(\{\mathbb{N}\})$, określona tak: dla $f \in \mathcal{S}$ niech $H(f) = \langle f, \mathbb{N} \rangle$. Ponieważ $F(f, \mathbb{N}) = f(\mathbb{N}) \cap f^{-1}(\mathbb{N}) = \mathbb{N} \cap \mathbb{N} = \mathbb{N}$, gdy $f \in \mathcal{S}$, więc funkcja H jest dobrze określona. Jest oczywiście różnowartościowa, pozostaje więc sprawdzić, że jest „na", czyli że z warunku $\langle f, A \rangle \in F^{-1}(\{\mathbb{N}\})$ wynika, że $A = \mathbb{N}$ oraz że f jest surjekcją. Przypuśćmy więc, że $\langle f, A \rangle \in F^{-1}(\{\mathbb{N}\})$. Wtedy $F(f, A) = f(A) \cap f^{-1}(A) = \mathbb{N}$, skąd $f(A) = f^{-1}(A) = \mathbb{N}$. Jeśli więc k jest dowolną liczbą naturalną, to $k \in f(A)$ czyli $k = f(\ell)$ dla pewnego ℓ. A zatem f jest surjekcją, a ponadto $\ell \in \mathbb{N} = f^{-1}(A)$ czyli $k = f(\ell) \in A$, skąd wynika, że $A = \mathbb{N}$.

154a: Nie. Na przykład $G(\lambda x.0, \{1\}) = \mathbb{N} = G(\lambda x.1, \{0\})$.

154b: Nie. Dla każdego f i dla każdego A zachodzi $A \subseteq f^{-1}(f(A))$, a więc z niepustości A wynika $G(f, A) \neq \varnothing$.

154c: Jeśli $f \in \mathcal{C}$ jest funkcją stałą $\lambda x.k$, gdzie $k \in \mathbb{N}$, to $f(A) = \{k\}$ dla każdego niepustego A. Ponieważ $f^{-1}(\{k\}) = \mathbb{N}$, więc $G(f, A) = \mathbb{N}$. A zatem szukanym obrazem jest zbiór $\{\mathbb{N}\}$ o mocy 1.

154d: Ponieważ dla każdego f zachodzi $G(f, \mathbb{N}) = \mathbb{N}$, więc funkcja $\lambda f.\langle f, \mathbb{N} \rangle$ jest injekcją z $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ w szukany przeciwobraz. A ponieważ moc zbioru $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathsf{P}_+(\mathbb{N})$ to continuum, więc z tw. Cantora-Bernsteina taka jest też moc $G^{-1}(\{\mathbb{N}\})$.

154e: Moc tego zbioru to continuum. Ponieważ $G^{-1}(\mathrm{S{\scriptsize IN}}) \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathsf{P}_+(\mathbb{N})$, a moc tego ostatniego zbioru to continuum, więc korzystając z tw. Cantora-Bernsteina, wystarczy sprawdzić, że continuum jest również ograniczeniem dolnym. W tym celu pokażemy, że $\lambda f.\langle f, \{0\} \rangle$ jest dobrze określoną funkcją różnowartościową ze zbioru wszystkich injekcji z $\mathbb{N}$ w $\mathbb{N}$ do zbioru $G^{-1}(\mathrm{S{\scriptsize IN}})$. Różnowartościowość jest oczywista, ale należy pokazać, że funkcja ta jest dobrze określona, tj. że dla każdej injekcji f zachodzi $G(f, \{0\}) \in \mathrm{S{\scriptsize IN}}$. Istotnie, $G(f, \{0\}) = f^{-1}(f(\{0\})) = f^{-1}(\{f(0)\}) = \{n \mid f(n) = f(0)\} = \{0\} \in \mathrm{S{\scriptsize IN}}$.

155a: Funkcja ψ nie jest różnowartościowa, bo na przykład $\psi(\lambda n.\,n) = \psi(\lambda n.\,n+1) = \varnothing$.

155b: Mamy $\psi^{-1}(\{\mathbb{N}\}) = \{f \mid \psi(f) = \mathbb{N}\} = \{f \mid \text{wszystkie zbiory } f^{-1}(\{n\}) \text{ są nieskończone}\}$. Ten zbiór jest niepusty, należą do niego wszystkie funkcje, które nieskończenie wiele razy przyjmują każdą wartość w zbiorze $\mathbb{N}$. Przykładem jest taka funkcja h, że $h(n) = k$ wtedy i tylko wtedy, gdy $n = k = 0$ lub $n = 2^k \cdot \ell$ dla pewnej nieparzystej liczby ℓ.

155c: Udowodnimy, że ψ jest surjekcją, tj. dla dowolnego zbioru $A \subseteq \mathbb{N}$ pokażemy, że $A = \psi(f)$ dla pewnej funkcji f. Przypadek 1: zbiór A jest nieskończony. Jest on wtedy równoliczny z $\mathbb{N}$, a więc istnieje bijekcja $\rho_A : \mathbb{N} \xrightarrow[\text{na}]{1-1} A$. Wtedy $A = \psi(\rho_A \circ h)$, gdzie $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jest dowolną funkcją ze zbioru $\psi^{-1}(\{\mathbb{N}\})$ (patrz 155b). Przypadek 2: zbiór A jest skończony, ale niepusty, powiedzmy $A = \{a_0, ..., a_{k-1}\}$ dla pewnego k. Wtedy $A = \psi(f)$, gdzie $f(n) = a_{n \bmod k}$. Przypadek 3: zbiór A jest pusty, wtedy $A = \psi(\mathrm{id}_{\mathbb{N}})$.

156a: Tak, na przykład funkcja następnika.

156b: Tak, na przykład funkcja poprzednika $\lambda n.\,\textsf{if } n = 0 \textsf{ then } 0 \textsf{ else } n - 1$.

156c: Zbiór M wszystkich funkcji małolepkich jest mocy continuum. Z jednej strony $M \subseteq (\mathbb{N} \to \mathbb{N})$, więc $\overline{\overline{M}} \leq \mathfrak{C}$. Z drugiej strony $\mathfrak{C} = \overline{\overline{\mathsf{P}(\mathbb{N})}} \leq \overline{\overline{M}}$ bo jeśli $\Theta(X)(n) = \textsf{if } n \in X \textsf{ then } n \textsf{ else } n+1$, dla $X \subseteq \mathbb{N}$ i $n \in \mathbb{N}$, to mamy injekcję $\Theta : \mathsf{P}(\mathbb{N}) \xrightarrow{1-1} M$. Funkcja Θ jest dobrze określona, bo $\Theta(X)$ przyjmuje każdą wartość co najwyżej dwa razy. Ponadto, jeśli $X \neq Y$, np. $n \in X - Y$, to $\Theta(X)(n) \neq \Theta(Y)(n)$, więc $\Theta(X) \neq \Theta(Y)$.

156d: Jeśli f jest małolepka, to zbiór $\mathrm{Rg}(f)$ jest oczywiście przeliczalny, bo $\mathrm{Rg}(f) \subseteq \mathbb{N}$. Ma więc moc $\aleph_0$, bo nie może być skończony. Istotnie, $\mathbb{N} = \bigcup\{f^{-1}(b) \mid b \in \mathrm{Rg}(f)\} = \bigcup\{f^{-1}(f(a)) \mid a \in \mathbb{N}\}$. Skoro każdy ze zbiorów $f^{-1}(b)$ jest skończony, to nie może ich być skończenie wiele, bo suma skończonej rodziny skończonych zbiorów jest skończona.

165: Skoro $A \sim B$, to istnieje bijekcja $f\colon A \xrightarrow[\text{na}]{1-1} B$. Zdefiniujemy $\varphi\colon \mathsf{P}(A) \times \mathsf{P}(B) \xrightarrow[\text{na}]{1-1} \{0,1,2,3\}^A$:

$$\varphi(\langle X, Y\rangle)(a) = \begin{cases} 0 & \text{jeśli } a \notin X \text{ i } f(a) \notin Y, \\ 1 & \text{jeśli } a \in X \text{ i } f(a) \notin Y, \\ 2 & \text{jeśli } a \notin X \text{ i } f(a) \in Y, \\ 3 & \text{jeśli } a \in X \text{ i } f(a) \in Y. \end{cases}$$

Funkcja φ jest różnowartościowa, bo jeśli $\langle X, Y\rangle \neq \langle X', Y'\rangle$, to $X \neq X'$ lub $Y \neq Y'$. Przypuśćmy na przykład, że $X \neq X'$. Wtedy istnieje element a, który odróżnia X i X', tzn. $a \in X - X'$ lub $a \in X' - X$. Przypuśćmy, że zachodzi $a \in X - X'$. Wtedy $\varphi(\langle X, Y\rangle)(a) \in \{1, 3\}$ i $\varphi(\langle X', Y'\rangle)(a) \in \{0, 2\}$, czyli $\varphi(\langle X, Y\rangle) \neq \varphi(\langle X', Y'\rangle)$. Pozostałe trzy przypadki są analogiczne.

Aby pokazać, że φ jest „na", należy dla $h\colon A \to \{0,1,2,3\}$ wskazać takie X, Y, że $\varphi(\langle X, Y\rangle) = h$. Pokażemy, że $X = h^{-1}(\{1,3\})$, $Y = f(h^{-1}(\{2,3\}))$ są dobre.

Weźmy $a \in A$. Przypuśćmy, że $h(a) = 0$. Wtedy oczywiście $h(a) \neq 1, 3$ oraz $h(a) \neq 2, 3$, więc $a \notin h^{-1}(\{1,3\}) = X$ oraz $f(a) \notin f(h^{-1}(\{2,3\})) = Y$. Zatem z definicji, $\varphi(\langle X, Y\rangle)(a) = 0$. Podobnie, jeśli $h(a) = 1$, to $a \in h^{-1}(\{1,3\}) = X$ i $f(a) \notin f(h^{-1}(\{2,3\})) = Y$, zatem $\varphi(\langle X, Y\rangle)(a) = 1$. Pozostałe dwa przypadki są analogiczne.

166: Niech $A, B \in \mathsf{P}(\mathbb{N})$ i niech $A \neq B$, np. $m \in A - B$. Istnieje dokładnie jedna taka para $\langle n, i\rangle$, że $m = \alpha(n, i)$. Wtedy $i \in g(A)(n)$ oraz $i \notin g(B)(n)$. Zatem $g(A)(n) \neq g(B)(n)$, a stąd $g(A) \neq g(B)$. Funkcja g jest więc różnowartościowa.

Funkcja g jest też „na" $\mathbb{N} \to \mathsf{P}(\mathbb{N})$. Jeśli bowiem $\varphi : \mathbb{N} \to \mathsf{P}(\mathbb{N})$, to dla $A = \{\alpha(n, i) \mid i \in \varphi(n)\}$ mamy $g(A)(n) = \{i \in \mathbb{N} \mid \alpha(n, i) \in A\} = \{i \in \mathbb{N} \mid i \in \varphi(n)\} = \varphi(n)$. A więc $g(A) = \varphi$.

172: Ponieważ $\mathbb{R} \sim \mathsf{P}(\mathbb{N})$, więc także $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \sim \mathsf{P}(\mathbb{N})^{\mathbb{N}}$. A więc takich ciągów jest continuum (zadanie 171).

179: Niech $\mathcal{T}$ oznacza zbiór wszystkich trójkątów na płaszczyźnie euklidesowej $\mathbb{R}^2$. Najpierw udowodnimy, że $\overline{\overline{\mathcal{T}}} \leq \mathfrak{C}$, określając funkcję $f_1 : \mathcal{T} \xrightarrow{1-1} \mathbb{R}^6$. Dla danego trójkąta $T \in \mathcal{T}$, niech $\langle x_1, y_1\rangle$, $\langle x_2, y_2\rangle$, $\langle x_3, y_3\rangle$, będą współrzędnymi trzech wierzchołków trójkąta wziętymi w *porządku leksykograficznym* tj. $x_1 \leq x_2 \leq x_3$, a jeśli $x_1 = x_2$ lub $x_2 = x_3$ to, odpowiednio $y_1 < y_2$ lub $y_2 < y_3$. (Inaczej: jako pierwszy wybieramy wierzchołek o najmniejszej pierwszej współrzędnej, a jeśli są dwa takie, to decyduje druga współrzędna.) Możemy teraz zdefiniować $f_1(T) = \langle x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3\rangle$. Funkcja f_1 jest oczywiście różnowartościowa, bo różne trójkąty nie mogą mieć tych samych współrzędnych. Uwaga: nie jest ważne, że wybraliśmy akurat porządek leksykograficzny. Liczy się to, że funkcja f_1 jest dobrze (jednoznacznie) określona.

Teraz pokażemy, że $\overline{\overline{\mathcal{T}}} \geq \mathfrak{C}$, określając funkcję $f_2 : \mathbb{R} \xrightarrow{1-1} \mathcal{T}$. Dla $x \in \mathbb{R}$ jako $f(x)$ przyjmiemy trójkąt o wierzchołkach $\langle x-1, 0\rangle$, $\langle x+1, 0\rangle$ i $\langle x, 1\rangle$. (Możemy sobie wyobrażać że przesuwamy ustalony trójkąt w pozycję zależną od x.) Dla różnych x dostajemy różne trójkąty, więc funkcja f_2 jest różnowartościowa. Ostatecznie z twierdzenia Cantora-Bernsteina wyniknie, że $\overline{\overline{\mathcal{T}}} = \mathfrak{C}$.

W przypadku trójkątów o współrzędnych wymiernych postępujemy podobnie, ale zamiast współrzędnych w $\mathbb{R}$ mamy współrzędne w przeliczalnym zbiorze $\mathbb{Q}$ i dostajemy moc $\aleph_0$. Ograniczenie do trójkątów równoramiennych nie zmienia odpowiedzi, ale mocą zbioru trójkątów równobocznych o współrzędnych wymiernych jest... zero. Bo trójkąt równoboczny nie może mieć wszystkich sześciu współrzędnych wymiernych.

197: Niech $\mathcal{C}$ oznacza zbiór wszystkich funkcji ciągłych z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$. Rozpatrzmy przekształcenie $F : \mathcal{C} \to \mathbb{R}^{\mathbb{Q}}$ dane przez $F(f) = f|_{\mathbb{Q}}$. To przekształcenie jest różnowartościowe, bo każda liczba rzeczywista r jest granicą pewnego ciągu liczb wymiernych $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Jeśli więc funkcje f i g są ciągłe i $f_{\mathbb{Q}} = g_{\mathbb{Q}}$ to z równości $f(q_n) = g(q_n)$ dla $n \in \mathbb{N}$ wynika $f(r) = \lim_{n\to\infty} f(q_n) = \lim_{n\to\infty} g(q_n) = g(r)$. Ponieważ mocą zbioru $\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}$ jest $\mathfrak{C}^{\aleph_0} = \mathfrak{C}$, więc $\overline{\overline{\mathcal{C}}} \leq \mathfrak{C}$. Nierówność w przeciwną stronę jest oczywista (wystarczy ograniczyć się do funkcji stałych), więc $\overline{\overline{\mathcal{C}}} = \mathfrak{C}$.

205: Niech $\mathsf{P}_\omega(\mathbb{R})$ oznacza zbiór wszystkich przeliczalnych podzbiorów $\mathbb{R}$. Oczywiście $\mathfrak{C} \leq \overline{\overline{\mathsf{P}_\omega(\mathbb{R})}}$, bo wystarczy wziąć pod uwagę zbiory jednoelementowe. Ale także $\mathfrak{C} \geq \overline{\overline{\mathsf{P}_\omega(\mathbb{R})}}$, bo łatwo określić funkcję różnowartościową $f : \mathsf{P}_\omega(\mathbb{R}) \xrightarrow{1-1} \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Na przykład tak: dla $A \in \mathsf{P}_\omega(\mathbb{R})$, jeśli A jest nieskończony, to $f(A)$ jest ciągiem rosnącym wszystkich elementów A. Natomiast dla skończonego A można jako $f(A)$ przyjąć ciąg, w którym najpierw występują elementy A w porządku rosnącym, potem zero, a potem wszystkie liczby naturalne, też w porządku rosnącym. Z tej konstrukcji wynika, że moc zbioru $\mathsf{P}_\omega(\mathbb{R})$ jest co najwyżej taka, jak moc zbioru $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ i już można się odwołać do zadania 172.

209: Tak, bo $2^4 = 4^2$.

211: Wskazówka: Koło otwarte plus dowolny podzbiór okręgu dają w sumie zbiór wypukły.

213a: Zbiór $\mathcal{G} = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid f \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}\}$ jest mocy continuum. Mamy po pierwsze $\overline{\overline{\mathcal{G}}} \leq \mathfrak{C}$, bo $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, a zbiór $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ jest mocy continuum. Po drugie, $\overline{\overline{\mathcal{G}}} \geq \overline{\overline{\mathsf{P}(\mathbb{N})}} = \mathfrak{C}$, bo istnieje injekcja $g : \mathsf{P}(\mathbb{N}) \xrightarrow{1-1} \mathcal{G}$. Określimy ją tak: dla $A \subseteq \mathbb{N}$ oraz $n \in A$ przyjmiemy

- $h(A)(4n) = 4n + 1$, $h(A)(4n + 1) = 4n$, $h(A)(4n + 2) = 4n + 3$ i $h(A)(4n + 3) = 4n + 2$,

ale jeśli $n \notin A$, to zrobimy trochę inaczej:

- $h(A)(4n) = 4n + 2$, $h(A)(4n + 2) = 4n$, $h(A)(4n + 1) = 4n + 3$ i $h(A)(4n + 3) = 4n + 1$.

Jasne, że $h(A)^2(k) = k$, ponadto dla $A \neq B$ funkcje $h(A)$ i $h(B)$ są różne, jeśli bowiem $n \in A \dot{-} B$, to $h(A)(4n) \neq h(B)(4n)$.

213b: Pokażemy, że mocą zbioru $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid f \circ f = f\}$ jest $\mathfrak{C}$. Ponieważ $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, więc $\overline{\overline{\mathcal{F}}} \leq \mathfrak{C}$, bo zbiór $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ jest mocy continuum. Wystarczy więc sprawdzić, że także $\overline{\overline{\mathcal{F}}} \geq \mathfrak{C}$, wskazując funkcję różnowartościową $h : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \xrightarrow{1-1} \mathcal{F}$. Dla $\varphi : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ niech $h(\varphi)$ będzie taką funkcją, że:

$$h(\varphi)(0) = 0, \quad h(\varphi)(1) = 1, \quad \text{oraz } h(\varphi)(n) = \varphi(n - 2), \text{ dla } n \geq 2.$$

Nietrudno sprawdzić, że $h(\varphi) \circ h(\varphi) = h(\varphi)$. Poza tym, jeśli funkcje φ i ψ są różne, np. $\varphi(k) \neq \psi(k)$, to $h(\varphi)(k + 2) \neq h(\psi)(k + 2)$, więc $h(\varphi) \neq h(\psi)$. Funkcja h jest więc injekcją.

214: Ponieważ $(\mathsf{P}(\mathbb{N}) \to \{\{0\}, \{1\}\}) \subseteq \mathcal{F}$, a zbiór $\mathsf{P}(\mathbb{N}) \to \{\{0\}, \{1\}\}$ jest mocy $2^{\mathfrak{C}}$, więc $2^{\mathfrak{C}} \leq \overline{\overline{\mathcal{F}}}$. Nierówność w przeciwną stronę wynika z inkluzji $\mathcal{F} \subseteq (\mathsf{P}(\mathbb{N}) \to \mathsf{P}(\mathbb{N}))$, a zatem $\overline{\overline{\mathcal{F}}} = 2^{\mathfrak{C}}$.

215: Niech $\mathcal{F}$ będzie rodziną wszystkich funkcji okresowych z $\mathbb{Z}$ w $\{0, 1\}$. Rozważmy funkcje:

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } x = kn \text{ dla pewnego } k \in \mathbb{Z}, \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku,} \end{cases}$$

Ewidentnie funkcje f_n, dla $n \in \mathbb{N}$, są parami różne, zatem rodzina $\mathcal{F}$ jest nieskończona. Aby wykazać, że $\mathcal{F}$ jest przeliczalna, określimy injekcję $\varphi \colon \mathcal{F} \xrightarrow{1-1} \{0, 1\}^*$, przyjmując $\varphi(f) = f(0)f(1) \ldots f(k - 1)$, gdzie k jest najmniejszą niezerową liczbą naturalną taką że $f(x) = f(x+k)$ dla wszystkich $x \in \mathbb{Z}$. Przypuśćmy, że $\varphi(f) = \varphi(g) = x_0x_1 \ldots x_{k-1}$. Wtedy $f(i) = x_i = g(i)$ dla $i \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$. Na mocy okresowości, dla $i \in \{0, 1, \ldots k-1\}$ i dowolnego $j \in \mathbb{Z}$ zachodzi

$$f(i+jk) = f(i+(j-1)k) = \cdots = f(i) = = g(i) = g(i+k) = g(i+2k) = \cdots = g(i+jk).$$

Stąd, funkcje f i g przyjmują takie same wartości na liczbach całkowitych postaci $i+jk$ dla dowolnych $i \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$, oraz $j \in \mathbb{Z}$. Pozostaje zauważyć, że każda liczba całkowita jest tej postaci, zatem funkcje f i g są w istocie równe.

216: Wskazówka: rozpatrzmy sumę $\bigcup\{\{A \in R : \min A = k\} : k \in \mathbb{N}\}$.

217a: (a) Tak. (b) Wskazówka: gałęzie nieskończonego pełnego drzewa binarnego mają skończone części wspólne.

218: Wskazówka: rozwiązać najpierw zadania 184 i 197.

220: Zbiór wszystkich bijekcji $\mathcal{B}$ jest podzbiorem zbioru wszystkich funkcji z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{N}$, który jest mocy continuum. Zatem $\overline{\overline{\mathcal{B}}} \leq \mathfrak{C}$. Nierówność $\mathfrak{C} \leq \overline{\overline{\mathcal{B}}}$ wynika z istnienia injekcji $\alpha : \mathsf{P}(\mathbb{N}) \xrightarrow{1-1} \mathcal{B}$, którą teraz zdefiniujemy. Niech $A \subseteq \mathbb{N}$ i niech $k \in \mathbb{N}$. Jeśli $k \in A$, to przyjmujemy $\alpha(A)(2k) = 2k+1$ i $\alpha(A)(2k+1) = 2k$. A jeśli $k \notin A$, to $\alpha(A)(2k) = 2k$ i $\alpha(A)(2k+1) = 2k+1$. Funkcja α jest różnowartościowa, bo jeśli $A \neq B$, na przykład $k \in A - B$, to $\alpha(A)(2k) = 2k+1 \neq 2k = \alpha(B)(2k)$, skąd $\alpha(A) \neq \alpha(B)$. Z twierdzenia Cantora-Bernsteina otrzymujemy $\overline{\overline{\mathcal{B}}} = \mathfrak{C}$.

221a: Ten zbiór jest mocy $\mathfrak{C}$, bo to po prostu zbiór wszystkich funkcji z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{N}$.

221b: Ten zbiór jest mocy zero, bo jest pusty. Obraz zbioru skończonego jest zawsze skończony.

221c: Zbiór wszystkich funkcji z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{N}$ jest mocy $\mathfrak{C}$, zatem zbiór $\mathcal{A}$ wszystkich funkcji spełniających warunek (221c) jest co najwyżej mocy $\mathfrak{C}$. Ponieważ zbiór wszystkich bijekcji zawiera się w $\mathcal{A}$, więc $\mathfrak{C} \leq \overline{\overline{\mathcal{A}}}$ (zadanie 220), skąd $\overline{\overline{\mathcal{A}}} = \mathfrak{C}$ na mocy twierdzenia Cantora-Bernsteina.

221d: Niech $\mathcal{B}$ będzie rozważanym zbiorem. Pokażemy, że $\overline{\overline{\mathcal{B}}} = \mathfrak{C}$. Oczywiście znowu $\overline{\overline{\mathcal{B}}} \leq \mathfrak{C}$; oszacowanie z dołu otrzymamy konstruując funkcję $F : \mathsf{P}(\mathbb{N}) \xrightarrow{1-1} \mathcal{B}$. Dla dowolnego $A \subseteq \mathbb{N}$ i dowolnego $n \in \mathbb{N}$ określimy wartość $F(A)(n)$ przez przypadki:
– Jeśli $n = p^k$, gdzie p jest liczbą pierwszą, to $F(A)(n) = k$;
– Jeśli $n = 6m$, gdzie $m \in A$, to $F(A)(n) = 1$;
– W pozostałych przypadkach $F(A)(n) = 0$.
Sprawdźmy, że $F(A) \in \mathcal{B}$ dla dowolnego A. Wystarczy pokazać, że przeciwobrazy zbiorów jednoelementowych są nieskończone. Do zbioru $F(A)^{-1}(\{0\})$ należą wszystkie liczby postaci $5 \cdot 7^m$, dla dowolnego $m > 0$. A jeśli $k \geq 1$, to w zbiorze $F(A)^{-1}(\{k\})$ są k-te potęgi wszystkich liczb pierwszych (wszystkie liczby postaci p^k). Pozostaje sprawdzić, że funkcja F jest różnowartościowa. Niech więc $A \neq A'$, na przykład $m \in A - A'$. Wtedy $F(A)(6m) = 1 \neq 0 = F(A')(6m)$, skąd wynika $F(A) \neq F(A')$.

222: Jeśli przeciwobraz każdego zbioru nieskończonego jest skończony, to również przeciwobraz $\mathbb{N}$ jest skończony, co jest niemożliwe, bo dla funkcji $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ zachodzi $f^{-1}(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$. A zatem zbiór, o którym mowa w części 222a, jest pusty, czyli jego moc to 0.

Pokażemy, że pozostałe trzy zbiory są mocy continuum. Wiadomo, że moc zbioru wszystkich funkcji z $\mathbb{N}$ w $\mathbb{N}$ to continuum, a zatem jest to również ograniczenie górne na moc każdego z naszych zbiorów. Na mocy tw. Cantora-Bernsteina wystarczy więc pokazać, że każdy z nich ma podzbiór mocy $\mathfrak{C}$. Rzeczywiście, zbiory, o których mowa w zadaniach 222b i 222d, zawierają w sobie zbiór wszystkich bijekcji z $\mathbb{N}$ w $\mathbb{N}$, którego mocą jest continuum (zadanie 220). Natomiast zbiór z zadania 222c zawiera zbiór $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, który też jest mocy continuum.

224: Z zadania 166 wynika, że zbiór wszystkich funkcji z $\mathbb{N}$ do $\mathsf{P}(\mathbb{N})$ jest mocy continuum. Zatem zbiór $\mathcal{R}$ funkcji różnowartościowych z $\mathbb{N}$ do $\mathsf{P}(\mathbb{N})$ jest mocy co najwyżej continuum.

Niech $F : (\mathbb{N} \to \{0,1\}) \to \mathcal{R}$ będzie określona tak: $F(\alpha)(n) = \{\alpha(n), n+2\}$, dla $\alpha : \mathbb{N} \to \{0,1\}$. Funkcja F jest dobrze określona, bo dla $m \neq n$ mamy $m+2 \notin F(\alpha)(n)$ a więc funkcje $F(\alpha)$ są różnowartościowe. Niech teraz $\alpha, \beta : \mathbb{N} \to \{0,1\}$ i niech $\alpha \neq \beta$, tj. $\alpha(n) \neq \beta(n)$ dla pewnego n. Wtedy $\alpha(n) \in \{\alpha(n), n+2\}$, ale $\alpha(n) \notin \{\beta(n), n+2\}$, bo $\alpha(n) \neq \beta(n)$ oraz $\alpha(n) < n+2$. Zatem funkcja F jest różnowartościowa, a stąd moc zbioru $\mathcal{R}$ jest co najmniej continuum. Z tw. Cantora-Bernsteina wnioskujemy, że $\overline{\overline{\mathcal{R}}} = \mathfrak{C}$. Natomiast moc zbioru surjekcji z $\mathbb{N}$ na $\mathsf{P}(\mathbb{N})$ jest zero. Zbiór ten jest pusty, bo $\overline{\overline{\mathbb{N}}} = \aleph_0 < \mathfrak{C} = \overline{\overline{\mathsf{P}(\mathbb{N})}}$.

228: Wskazówka: zastosować metodę przekątniową.

230: Wskazówka: Przypuśćmy, że jest funkcja $f : A \cup B \xrightarrow{\text{na}} \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Jest takie x, że dla dowolnego y, punkt (x, y) nie należy do $f(A)$. Podobnie dla drugiej współrzędnej. Ostatecznie jest $(x, y) \notin f(A \cup B)$.

231: Wskazówka: Zauważyć, że $A \times B = \bigcup_{b \in B} A \times \{b\}$, i uogólnić zadanie 230. Jeśli $f : A \times B \to \mathbb{R}^B$, to dla każdego $b \in B$ istnieje takie $x_b \in \mathbb{R}$, że $x_b \neq f(a, b)(b)$ dla wszystkich $a \in A$. Funkcja $\lambda b.\, x_b$ nie jest wartością operacji f.

232: Zbiór F jest mocy $2^{\mathfrak{C}}$. Nierówność $\overline{\overline{F}} \le 2^{\mathfrak{C}}$ wynika stąd, że $F \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, a ten ostatni zbiór ma moc $\mathfrak{C}^{\mathfrak{C}} = 2^{\mathfrak{C}}$. Aby wykazać, że $\overline{\overline{F}} \ge 2^{\mathfrak{C}}$, zauważmy najpierw, że zbiór $\mathbb{Q}^{\mathbb{R}-\mathbb{N}}$ jest także mocy $2^{\mathfrak{C}}$, bo $\overline{\overline{\mathbb{R} - \mathbb{N}}} = \mathfrak{C}$. Funkcja $\xi : \mathbb{Q}^{\mathbb{R}-\mathbb{N}} \xrightarrow{1-1} F$ może zaś być określona warunkiem

$$\xi(f)(x) = \begin{cases} \pi, & \text{jeśli } x \in \mathbb{N}, \\ f(x), & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

233: Oczywiście $\overline{\overline{U}} \le \mathfrak{C}$ bo zbiór wszystkich funkcji z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{N}$ jest mocy $\mathfrak{C}$. Zdefiniujemy teraz funkcję $F : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to U$. Poniżej, $w_3(n)$ oznacza największe takie r, że n dzieli się przez 3^r.

$$F(f)(n) = \begin{cases} f(k), & \text{jeśli } n = 2k; \\ w_3(n), & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Funkcja F jest dobrze określona, tj, $F(f) \in U$ dla $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, bo dla dowolnego r istnieje nieskończenie wiele liczb nieparzystych, które w rozkładzie na czynniki pierwsze dają r trójek. Funkcja F jest też różnowartościowa, bo dla $f(k) \neq g(k)$ zachodzi $F(f)(2k) \neq F(g)(2k)$. A więc moc U jest co najmniej taka jak moc zbioru $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, z czego ostatecznie wynika $\overline{\overline{F}} = \mathfrak{C}$.

234: Moc zbioru wszystkich funkcji z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{N}$ jest równa $\aleph_0^{\aleph_0} = \mathfrak{C}$, zatem moc zbioru $\mathcal{F}$ jest co najwyżej $\mathfrak{C}$. Aby stwierdzić, ze jest też co najmniej $\mathfrak{C}$, wystarczy zauważyć, że $\mathcal{F}$ zawiera zbiór ciągów zerojedynkowych, który jest mocy $2^{\aleph_0} = \mathfrak{C}$. Skoro $\mathfrak{C} \le \overline{\overline{\mathcal{F}}} \le \mathfrak{C}$, więc $\overline{\overline{\mathcal{F}}} = \mathfrak{C}$.

235: Moc $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jest równa $\aleph_0^{\aleph_0} = \mathfrak{C}$, zatem moc zbioru zygzaków jest co najwyżej $\mathfrak{C}$. Pokażemy, że jest ona też co najmniej $\mathfrak{C}$, czyli że jest równa $\mathfrak{C}$. W tym celu określimy injekcję $F : 2^{\mathbb{N}} \xrightarrow{1-1} Z$, gdzie Z oznacza zbiór wszystkich zygzaków. Dla dowolnego ciągu $\alpha \in 2^{\mathbb{N}}$, funkcję $F(\alpha)$ definiujemy przez indukcję, przyjmując $F(\alpha)(0) = 0$, $F(\alpha)(2n + 2) = F(\alpha)(2n + 1) - 1$ oraz:

$$F(\alpha)(2n + 1) = \begin{cases} \alpha(2n) + 1, & \text{jeśli } \alpha(n) = 0; \\ \alpha(2n) + 2, & \text{jeśli } \alpha(n) = 1 \end{cases}$$

Każde zero w ciągu α odpowiada w $F(\alpha)$ zwiększeniu wartości o jeden i zmniejszeniu o jeden. Każda jedynka odpowiada przyrostowi o 2 i spadkowi o jeden. Wartość funkcji $F(\alpha)$ dla nieparzystych argumentów jest zawsze dodatnia, a więc F jest dobrze określona. Jeśli teraz $\alpha \neq \beta$ i n jest najmniejszą liczbą taką, że $\alpha(n) \neq \beta(n)$, to funkcje $F(\alpha)$ i $F(\beta)$ różnią się w punkcie $2n + 1$.

236: Dla $\alpha : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ niech $F(\alpha) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ będzie funkcją określoną tak:

$$F(\alpha)(2n) = n, \text{ oraz } F(\alpha)(2n + 1) = \alpha(n), \text{ dla dowolnego } n \in \mathbb{N}.$$

Ponieważ zawsze $n \le 2n$ oraz $\alpha(n) \le 1 \le 2n + 1$ więc mamy $F(\alpha)(k) \le k$, dla każdego $k \in \mathbb{N}$. Inaczej mówiąc $F(\alpha) \in A$. Co więcej, w istocie mamy $F(\alpha) \in B$, bo funkcja $F(\alpha)$ przyjmuje wszystkie wartości w $\mathbb{N}$. Określone w ten sposób przekształcenie $F : (\mathbb{N} \to \{0, 1\}) \to B$ jest różnowartościowe. Jeśli bowiem $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ oraz $\alpha \neq \beta$, powiedzmy $\alpha(n) \neq \beta(n)$, to wtedy $F(\alpha)(2n + 1) \neq F(\beta)(2n + 1)$, skąd $F(\alpha) \neq F(\beta)$. Wynika stąd, że zbiór B (a tym bardziej zbiór A) jest mocy co najmniej takiej jak moc $\mathbb{N} \to \{0, 1\}$ czyli $\mathfrak{C}$. Z drugiej strony $B \subseteq A \subseteq \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, a ponieważ $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ też jest mocy $\mathfrak{C}$, więc mamy $\overline{\overline{B}} \le \overline{\overline{A}} \le \mathfrak{C}$. Z twierdzenia Cantora-Bernsteina otrzymujemy $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}} = \mathfrak{C}$.

Moc zbioru C jest równa 1. Pokażemy przez indukcję, że jeśli $f \in C$, to $f(n) = n$. Istotnie, przypuśćmy, że dla $i < n$ mamy $f(i) = i$ i rozpatrzmy wartość $f(n)$. Gdyby $f(n) < n$, to z założenia indukcyjnego $f(n) = f(f(n))$ i funkcja f nie byłaby różnowartościowa. Ponieważ $f(n) \le n$, więc pozostaje tylko $f(n) = n$. W zbiorze C jest więc tylko funkcja identycznościowa.

237: Liczba $\mathfrak{C}$ jest ograniczeniem górnym mocy B, gdyż $\overline{\overline{\mathbb{N}^{\mathbb{N}}}} = \mathfrak{C}$. Pokażemy, że $\mathfrak{C}$ jest również ograniczeniem dolnym mocy tego zbioru. W tym celu skonstruujemy injekcję $F\colon 2^{\mathcal{N}} \xrightarrow{1-1} B$:

$$F(g)(n) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } n = 0; \\ n - g(n-1), & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Wpierw pokażemy, że definicja jest poprawna, czyli że $F(g)$ rzeczywiście należy do B, gdy $g \in 2^{\mathbb{N}}$. Wtedy $F(g)(0) = 0 \leq 0$. Gdy zaś $n \geq 1$, to $g(n-1) \geq 0$, a zatem $F(g)(n) = n - g(n-1) \leq n$. Ponadto dla dowolnego $m \in \mathbb{N}$ istnieje $n \in \mathbb{N}$, które czyni zadość nierówności $m < F(g)(n)$. Wystarczy przyjąć $n = m + 2$, aby otrzymać $m < m + 2 - g(m+2) = F(g)(n)$.

Widzimy, że definicja F jest poprawna, sprawdźmy jeszcze, czy funkcja ta jest różnowartościowa. Niech $g, h \in 2^{\mathbb{N}}$ i $g \neq h$. Zatem istnieje takie $n \in \mathbb{N}$, że $g(n) \neq h(n)$. Wtedy $F(g)(n+1) \neq F(h)(n+1)$, a więc pokazaliśmy, że F jest różnowartościowa. Skoro ograniczyliśmy moc zbioru B zarówno z dołu jak i z góry przez $\mathfrak{C}$, to $\overline{\overline{B}} = \mathfrak{C}$ na mocy twierdzenia Cantora-Bernsteina.

238a: Niech A oznacza zbiór wszystkich funkcji o własności (a) i niech $f \in A$ oraz $f(1) = k$. Przez indukcję udowodnimy, że wtedy $f(n) = kn$ dla wszystkich n. Najpierw zauważmy, że równość $1 = 0+1$ implikuje $k = f(1) = f(0+1) = f(0) + f(1) = f(0) + k$, skąd $f(0) = 0 = k \cdot 0$. W kroku indukcyjnym $f(n+1) = f(n) + f(1) = nk + k = (n+1)k$. A więc jeśli $f, g \in A$ oraz $f(1) = g(1)$, to $f = g$. Zatem funkcja $\lambda f.\, f(1) : A \to \mathbb{N}$ jest różnowartościowa, czyli A jest zbiorem przeliczalnym. Ponieważ A jest oczywiście nieskończony (wszystkie funkcje $\lambda n.\, kn$ należą do A) więc jest mocy $\aleph_0$.

238b: Zbiór B wszystkich funkcji o własności (b) jest zawarty w $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, a więc $\overline{\overline{B}} \leq \mathfrak{C}$. Nierówność przeciwną udowodnimy, definiując injekcję $\zeta : (\mathcal{P} \to \mathbb{N}) \xrightarrow{1-1} B$, gdzie $\mathcal{P}$ jest zbiorem wszystkich liczb pierwszych. Dla dowolnej funkcji $f : \mathcal{P} \to \mathbb{N}$ przyjmujemy, że $\zeta(f)(0) = 0$ oraz $\zeta(f)(1) = 1$. Każdą liczbę $n > 1$ przedstawiamy jednoznacznie jako iloczyn liczb pierwszych $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r}$ i definiujemy $\zeta(f)(n) = f(p_1)^{k_1} f(p_2)^{k_2} \cdots f(p_r)^{k_r}$. Nietrudno sprawdzić, że $\zeta(f) \in B$, czyli funkcja ζ jest dobrze określona. Co więcej, $\zeta(f)(p) = f(p)$ dla $p \in \mathcal{P}$, więc jeśli $f \neq g$, to także $\zeta(f) \neq \zeta(g)$. Zatem ζ jest różnowartościowa, a ponieważ zbiór $\mathcal{P} \to \mathbb{N}$ jest mocy $\mathfrak{C}$, więc $\overline{\overline{B}} \geq \mathfrak{C}$. Ostatecznie $\overline{\overline{B}} = \mathfrak{C}$.

238c: Przypuśćmy, że f spełnia warunek (c). Wtedy $f(1) = f(1^1) = f(1)^{f(1)}$. Jedyną liczbą d o własności $d^d = d$ jest 1, więc $f(1) = 1$. Przypuśćmy teraz, że $f(k) = d \neq 1$ dla pewnego k. Wtedy dla dowolnych a, b mamy $d^{f(a \cdot b)} = f(k^{a \cdot b}) = f((k^a)^b) = (d^{f(a)})^{f(b)} = d^{f(a) \cdot f(b)}$, skąd $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$, czyli f spełnia też warunek (b). Dalej $f(a+b) = f(a) + f(b)$, bo

$$d^{f(a+b)} = f(k^{a+b}) = f(k^a \cdot k^b) = d^{f(a)} \cdot d^{f(b)} = d^{f(a)+f(b)},$$

czyli zachodzi też (a). Ale jedyną funkcją o własności (a), taką że $f(1) = 1$ jest identyczność. Mamy więc tylko dwie funkcje o własności (c): identycznościową i stale równą 1.

239: Zbiór wszystkich funkcji izolujących ma moc $\mathfrak{C}$. Aby udowodnić ten fakt, skorzystamy z twierdzenia Cantora-Bernsteina. Niech A oznacza zbiór funkcji izolujących. Zbiór $\mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}$ wszystkich funkcji z $\mathbb{Z}$ do $\mathbb{Z}$ ma moc $\mathfrak{C}$. Mamy $A \subseteq \mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}$, co daje nam nierówność $\overline{\overline{A}} \leq \mathfrak{C}$. Pokażemy, że zachodzi także $\mathfrak{C} \leq \overline{\overline{A}}$. Zbiór wszystkich funkcji z $\mathbb{Z}$ do $\{0,1\}$ jest mocy $\mathfrak{C}$. Zdefiniujemy funkcję $\varphi : \{0,1\}^{\mathbb{Z}} \xrightarrow{1-1} A$:

$$\varphi(f)(n) = \begin{cases} 0, & \text{jeśli } f(n) = 0 \text{ i } n \text{ jest parzyste;} \\ 2, & \text{jeśli } f(n) = 1 \text{ i } n \text{ jest parzyste;} \\ 4, & \text{jeśli } f(n) = 0 \text{ i } n \text{ jest nieparzyste;} \\ 6, & \text{jeśli } f(n) = 1 \text{ i } n \text{ jest nieparzyste.} \end{cases}$$

Każda funkcja $\varphi(f)$ jest izolująca. Dla parzystych argumentów wartość funkcji $\varphi(f)$ jest równa 0 lub 2, dla nieparzystych 4 lub 6. Zatem na pewno dla sąsiednich argumentów mamy różne wartości. Ponadto dla każdej funkcji $f \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ mamy $\varphi(f)(\mathbb{Z}) \subseteq \{0,2,4,6\}$, więc $\varphi(f)$ spełnia drugi warunek: jeśli $x \in \varphi(f)(\mathbb{Z})$ to $x-1, x+1 \notin \varphi(f)(\mathbb{Z})$. Pokażemy, że funkcja φ jest różnowartościowa. Weźmy $f_1, f_2 \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ takie, że $f_1 \neq f_2$. Wtedy istnieje takie n, że $f_1(n) \neq f_2(n)$. Bez straty ogólności możemy założyć, że $f_1(n) = 0$ i $f_2(n) = 1$. Wtedy jednak $\varphi(f_1)(n) \in \{0,4\}$ i $\varphi(f_2)(n) \in \{2,6\}$. Zatem $\varphi(f_1)(n) \neq \varphi(f_2)(n)$, skąd wynika, że $\varphi(f_1) \neq \varphi(f_2)$.

240: Każda funkcja wyboru dla $\mathsf{P}(\mathbb{N}) - \{\varnothing\}$ należy do zbioru $\mathbb{N}^{\mathsf{P}(\mathbb{N})-\{\varnothing\}}$. Moc tego zbioru to $2^{\mathfrak{C}}$, więc moc zbioru funkcji wyboru jest co najwyżej taka.

Niech A oznacza zbiór funkcji wyboru dla $\mathsf{P}(\mathbb{N}) - \{\varnothing\}$ i niech $\mathsf{P}_1(\mathbb{N})$ oznacza zbiór jednoelementowych podzbiorów $\mathbb{N}$. Wreszcie przez $\mathsf{P}_{\geq 2}(\mathbb{N})$ oznaczymy zbiór $(\mathsf{P}(\mathbb{N}) - \{\varnothing\}) - \mathsf{P}_1(\mathbb{N})$. Zauważmy, że $\mathsf{P}_{\geq 2}(\mathbb{N})$ jest mocy $\mathfrak{C}$, więc zbiór funkcji $\{0,1\}^{\mathsf{P}_{\geq 2}(\mathbb{N})}$ jest mocy $2^{\mathfrak{C}}$. Określimy funkcję $F : \{0,1\}^{\mathsf{P}_{\geq 2}(\mathbb{N})} \xrightarrow{1-1} A$.

$$F(f)(X) = \begin{cases} \min(X - \{\min X\}), & \text{gdy } \overline{\overline{X}} \geq 2 \text{ i } f(X) = 1; \\ \min X, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Dla każdego $f \in \{0,1\}^{\mathsf{P}_{\geq 2}(\mathbb{N})}$ wartość $F(f)$ jest funkcją wyboru dla $\mathsf{P}(\mathbb{N}) - \{\varnothing\}$: jeśli X jest jednoelementowy, to $F(f)(X)$ jest jedynym elementem zbioru X; jeśli X ma więcej niż jeden element, to $F(f)(X)$ jest najmniejszym lub drugim co do wielkości elementem zbioru X. Pokażemy, że f jest różnowartościowa. Jeśli $f_1, f_2 \in \{0,1\}^{\mathsf{P}_{\geq 2}(\mathbb{N})}$ i $f_1 \neq f_2$, to istnieje taki $X \in \mathsf{P}_{\geq 2}(\mathbb{N})$, że $f_1(X) \neq f_2(X)$. Bez straty ogólności możemy założyć, że $f_1(X) = 0$ i $f_2(X) = 1$. Wtedy jednak $F(f_1)(X) = \min X$ i $F(f_2)(X) = \min(X - \{\min X\})$. Zatem rzeczywiście $F(f_1) \neq F(f_2)$.

241: Moc zbioru $(\mathsf{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{N})$ jest równa $\aleph_0^{2^{\aleph_0}} = \aleph_0^{\mathfrak{C}} = 2^{\mathfrak{C}}$, takie jest więc ograniczenie górne na moc zbioru $\mathcal{G}$. Aby pokazać, że jest to również ograniczenie dolne, przyjmijmy dla $\mathcal{C} \subseteq \mathsf{P}(\mathbb{N} - \{0,1\})$:

$$f_{\mathcal{C}}(B) = \begin{cases} 0, & \text{jeśli } B \in \mathcal{C} \cup \{\mathbb{N}\}; \\ 1, & \text{jeśli } B \in \mathsf{P}(\mathbb{N} - \{0,1\}) - \mathcal{C}; \\ \min(\mathbb{N} - B) & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Dla dowolnego $\mathcal{C}$ i dla dowolnego $B \in \mathsf{P}(\mathbb{N})$ mamy $f_{\mathcal{C}}(B) \notin B$, zatem każde $f_{\mathcal{C}}$ należy do zbioru $\mathcal{G}$. Ponadto, dla $\mathcal{C}_1 \neq \mathcal{C}_2$ mamy $f_{\mathcal{C}_1} \neq f_{\mathcal{C}_2}$, gdyż jeśli np. $B \in \mathcal{C}_1$ i $B \notin \mathcal{C}_2$, to $f_{\mathcal{C}_1}(B) = 0$, a $f_{\mathcal{C}_2}(B) = 1$. Przekształcenie $\lambda\mathcal{C}.\, f_{\mathcal{C}}$ jest więc różnowartościową funkcją ze zbioru $\mathsf{P}(\mathsf{P}(\mathbb{N} - \{0,1\}))$ w zbiór $\mathcal{G}$, skąd $\overline{\overline{\mathsf{P}(\mathsf{P}(\mathbb{N} - \{0,1\}))}} \leq \overline{\overline{\mathcal{G}}}$. Ponieważ moc zbioru $\mathsf{P}(\mathsf{P}(\mathbb{N} - \{0,1\}))$ jest $2^{\mathfrak{C}}$, więc otrzymujemy $\overline{\overline{\mathcal{G}}} \geq 2^{\mathfrak{C}}$ i z twierdzenia Cantora-Bernsteina, $\overline{\overline{\mathcal{G}}} = 2^{\mathfrak{C}}$.

243: Niech $\mathcal{R}_n = \{f \in \mathcal{R} \mid \mathrm{Dom}(f) \text{ ma } n \text{ elementów}\}$. Wtedy $\mathcal{R} = \bigcup\{\mathcal{R}_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Udowodnimy, że każdy zbiór $\mathcal{R}_n$ jest przeliczalny, określając funkcje $F_n : \mathcal{R}_n \xrightarrow{1-1} \mathbb{N}^{2n}$. Dla $f \in \mathcal{R}_n$ ustawimy wszystkie elementy dziedziny $\mathrm{Dom}(f)$ w ciąg rosnący $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ i przyjmiemy $F_n(f) = \langle a_1, \ldots, a_n, f(a_1), \ldots, f(a_n)\rangle$. Funkcja F_n jest różnowartościowa, bo z równości $F_n(f) = F_n(g)$ od razu wynika $f = g$ (pierwsze n współrzędnych determinuje dziedzinę, a pozostałe określają wartości funkcji dla wszystkich argumentów). Zatem zbiór $\mathcal{R}$ jest sumą przeliczalnej rodziny zbiorów przeliczalnych, a więc jest przeliczalny.[22] Ponieważ $\mathbb{N} \sim \mathbb{N}^{\{0\}} \subseteq \mathcal{R}$, więc zbiór $\mathcal{R}$ jest nieskończony. A każdy nieskończony zbiór przeliczalny jest równoliczny z $\mathbb{N}$.

244: Pokażemy, że zbiór wszystkich funkcji powracających jest mocy $\mathfrak{C}$. Ponieważ zbiór wszystkich funkcji $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jest mocy $\mathfrak{C}$, to wystarczy nam oszacowanie dolne. W tym celu zdefiniujemy funkcję różnowartościową F ze zbioru wszystkich ciagów nieskończonych o wyrazach 0 lub 1 w zbiór funkcji powracających. To oczywiście zakonczy dowód, gdyż takich ciągów jest $\mathfrak{C}$.
Niech $a = \{a_i\}_{i \in \mathcal{N}}$ będzie ciągiem nieskończonym o wyrazach 0 lub 1. Określmy:

$F(a)(2i) = 2i$ oraz $F(a)(2i+1) = 2i+1$ gdy $a_i = 0$.

$F(a)(2i) = 2i+1$ oraz $F(a)(2i+1) = 2i$ gdy $a_i = 1$.

Niezależnie od a, dla każdego n mamy $F(a)^2(n) = n$ więc $F(a)$ jest powracająca. Pozostaje uzasadnić, że F jest różnowartościowa: dla dwóch różnych ciągów a i b istnieje indeks j, dla którego $a_j \neq b_j$. Wówczas jednak $F(a)(2j) \neq F(b)(2j)$, czyli faktycznie $F(a) \neq F(b)$.

245: W obu przypadkach moc danego zbioru jest co najwyżej taka jak moc wszystkich funkcji z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{N}$, czyli co najwyżej $\mathfrak{C}$. Niech F będzie zbiorem tych wszystkich funkcji $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ zbiór $f^{-1}(\{k \in \mathbb{N} \mid k < n\})$ ma *dokładnie* n elementów. Pokażemy, że $\mathfrak{C} \leq \overline{\overline{F}}$, co z twierdzenia Cantora-Bernsteina da nam w obu przypadkach odpowiedź „continuum". Zauważmy, że do F należy każda bijekcja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. W szczególności, jeśli $\zeta : \mathbb{N} \to \{0,1\}$ to do zbioru F należy funkcja $f_\zeta = \lambda n.\, \mathsf{if}\ \zeta(\lfloor n/2 \rfloor) = 0\ \mathsf{then}\ n\ \mathsf{else\ if}\ 2 \mid n\ \mathsf{then}\ n+1\ \mathsf{else}\ n-1$. Operacja $\lambda\zeta.\, f_\zeta$ jest różnowartościową funkcją z $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ do F, a więc istotnie moc F jest co najmniej $\mathfrak{C}$.

246a: Funkcja f jest różnowartościowa. Niech $A \neq B$, bez straty ogólności możemy założyć, że istnieje takie $a \in A$, że $a \notin B$. Z tego, że $A, B \subseteq \mathbb{N} - \{0\}$ wynika, że $0 \notin A, B$. Stąd $\{0, a\} \not\subseteq A$, bo $0 \notin A$, oraz $\{0, a\} \not\subseteq \mathbb{N} - A$, bo $a \in A$, a zatem $\{0, a\} \notin f(A)$. Jednocześnie $\{0, a\} \subseteq \mathbb{N} - B$, a zatem $\{0, a\} \in f(B)$. Stąd $f(A) \neq f(B)$.

246b: Funkcja f nie jest na $\mathsf{P}(\mathsf{P}(\mathbb{N}))$, gdyż dla każdego $A \in \mathsf{P}(\mathbb{N} - \{0\})$ mamy $\varnothing \in f(A)$. Zatem na przykład $\{\{1\}, \{2\}\} \notin \mathrm{Rg}(f)$, gdyż zbiór pusty nie jest elementem tej rodziny.

[22] Można to zrobić prościej jeśli się skorzysta z zadania 173.

246c: Skoro funkcja f jest różnowartościowa, to moc zbioru $\mathrm{Rg}(f)$ jest równa mocy zbioru $\mathsf{P}(\mathbb{N}-\{0\})$, czyli $\mathfrak{C}$.

246d: Moc $\bigcap \mathrm{Rg}(f)$ jest równa $\aleph_0$, ponieważ elementami rodziny $\bigcap \mathrm{Rg}(f) = \bigcap\{f(A) \mid A \in \mathsf{P}(\mathbb{N}-\{0\})\}$ są $\varnothing$ oraz singletony $\{a\}$ dla dowolnych $a \in \mathbb{N}$. Istotnie, dla każdego zbioru $A \in \mathsf{P}(\mathbb{N} - \{0\})$, mamy $\varnothing \in \mathsf{P}(A) \subseteq f(A)$. Podobnie, singleton $\{a\}$ należy do $\mathsf{P}(A) \subseteq f(A)$ jeśli $a \in A$, lub do $\mathsf{P}(\mathbb{N}-A) \subseteq f(A)$ w przeciwnym przypadku (tu mieści się w szczególności przypadek $a = 0$).

Są to jedyne zbiory należące do rodziny $\bigcap \mathrm{Rg}(f)$. Jeśli zbiór B ma co najmniej dwa elementy, czyli $a, b \in B$ dla $a \neq b$ i $b \neq 0$, to wtedy $B \notin \mathsf{P}(\{b\})$, gdyż $a \notin \{b\}$ oraz $B \notin \mathsf{P}(\mathbb{N} - \{b\})$, gdyż $b \in \{b\}$, a zatem $B \notin f(\{b\})$. Stąd, $B \notin \bigcap \mathrm{Rg}(f)$.

247a: To nie jest funkcja różnowartościowa. Na przykład $Z(\lambda n.\, n+1) = \{0\} = Z(\lambda n.\, n+2)$. Nie jest to też surjekcja, bo $0 \in Z(f)$ dla każdej funkcji f.

247b: Dwa: zero i continuum. Z zadania 247a wiemy, że $\overline{\overline{Z^{-1}(\{A\})}} = 0$, gdy $0 \notin A$. Pozostaje pokazać, że w przeciwnym razie przeciwobraz singletona $\{A\}$ jest co najmniej mocy continuum. (Szacowanie z góry jest oczywiste, bo $Z^{-1}(\{A\}) \subseteq \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.) Mamy dwa przypadki.

Przypadek 1: Zbiór A jest nieskończony. Wtedy zbiór $P = \mathsf{P}(A - \{0,1\})$ jest mocy continuum. Określimy injekcję $\Phi : P \xrightarrow{1-1} Z^{-1}(\{A\})$. Dla $X \in P$ i $x \in \mathbb{N}$:

$$\Phi(X)(x) = \mathsf{if}\ x+1 \in A\ \mathsf{then}\ (\mathsf{if}\ x+1 \in X\ \mathsf{then}\ 0\ \mathsf{else}\ x)\ \mathsf{else}\ x+1.$$

Najpierw sprawdźmy, że funkcja Φ jest dobrze określona, tj. że $Z(\Phi(X)) = A$, dla $X \in P$. Pokażemy najpierw (nie wprost) zawieranie $Z(\Phi(X)) \subseteq A$, zakładając, że $n \notin A$. Skoro z definicji $0 \in A$, to $n = y+1$ dla pewnego y i mamy $\Phi(X)(y) = n$, skąd $n \notin Z(\Phi(X))$, bo $y < y+1 = n$.

Teraz przypuśćmy, że $n \in A$. Już wiemy, że $0 \in Z(\Phi(X))$, więc znowu możemy założyć, że $n = y+1$ dla pewnego y. Jeśli teraz $x < n$ to albo $x < y$ i na pewno $\Phi(X)(x) \leq x+1 < n$ albo $x = y$ a wtedy $\Phi(X)(y) \leq y < n$, bo $y+1 \in A$. A więc $n \in Z(\Phi(X))$.

Pozostaje się przekonać, że funkcja Φ jest różnowartościowa. Weźmy $X, Y \in P$ i załóżmy, że $n \in X - Y$. Wtedy $n \neq 0, 1$, skąd $n = x+1$ dla pewnego $x \neq 0$. A zatem $\Phi(X)(x) = 0$ ale $\Phi(Y)(x) = x$, skąd $\Phi(X) \neq \Phi(Y)$.

Przypadek 2: Zbiór A jest skończony. Niech liczba m ogranicza go z góry. Zdefiniujemy injekcję $\Psi : (\mathbb{N} \to \{0,1\}) \xrightarrow{1-1} Z^{-1}(\{A\})$, przyjmując dla $\alpha : \mathbb{N} \to \{0,1\}$ i $x \in \mathbb{N}$:

$$\Psi(\alpha)(x) = \mathsf{if}\ x < m\ \mathsf{then}\ (\mathsf{if}\ x+1 \in A\ \mathsf{then}\ 0\ \mathsf{else}\ x+1)\ \mathsf{else}\ x+1+\alpha(x-m).$$

Zaczynamy znowu od sprawdzenia, że funkcja jest dobrze określona, tj. że $Z(\Psi(\alpha)) = A$ dla każdego α. Zacznijmy od inkluzji $A \subseteq Z(\Psi(\alpha))$. Niech $n \in A$, bez straty ogólności $n = y+1$. Dla każdego $x < n$ mamy $x < m$, więc $f(x) \leq x+1$. Zatem jeśli $x < y$, to $f(x) < n$, a jeśli $x = y$, to $f(x) = 0 < n$. Stąd $n \in Z(\Psi(\alpha))$. Dla dowodu inkluzji odwrotnej załóżmy nie wprost, że $y+1 = n \notin A$. Jeśli $y < m$, to $\Psi(\alpha)(y) = y+1 = n$, a jeśli $y \geq m$, to $\Psi(\alpha)(y) = y+1+\alpha(y-m) \geq n$. W obu przypadkach $n \notin Z(\Psi(\alpha))$.

Teraz sprawdźmy różnowartościowość funkcji Ψ. Niech $\alpha \neq \beta$, czyli $\alpha(i) \neq \beta(i)$ dla pewnego i. Wtedy $\Psi(\alpha)(m+i) = m+i+1+\alpha(i) \neq m+i+1+\beta(i) = \Psi(\beta)(m+1)$, skąd $\Psi(\alpha) \neq \Psi(\beta)$.

248: Jeśli zbiór punktów jest zawarty w pewnym kole, to jest również zawarty w kwadracie o wierzchołkach $(-n,-n), (n,-n), (n,n), (n,-n)$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$. Niech $\mathcal{B}_n$ oznacza rodzinę wszystkich zbiorów punktów kratowych zawartych w tym kwadracie. Oczywiście każde $\mathcal{B}_n$ jest rodziną skończoną. Natomiast rodzina wszystkich ograniczonych zbiorów punktów kratowych jest równa $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_n$, więc jako przeliczalna suma zbiorów skończonych, jest przeliczalna. Rodzina ta ma moc $\aleph_0$, gdyż należą do niej wszystkie singletony punktów kratowych.

249: Niech L oznacza środkową odcinka PQ. Pokażemy, że poszukiwany punkt R leży na tej prostej. Zacznijmy od takiej obserwacji: dla dowolnych dwóch różnych punktów $R_1, R_2 \in L$, łamane PR_1Q oraz PR_2Q przecinają się tylko w punktach P i Q (przy czym żaden z tych punktów nie należy do A). Gdyby każda łamana PRQ (dla $R \in L$) miała niepuste przecięcie z A (rozumujemy nie wprost) to mielibyśmy różnowartościowe przyporządkowanie $\varphi : L \xrightarrow{1-1} A$. Można je określić np. tak: ponieważ zbiór A jest przeliczalny, więc przedstawimy go w postaci $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ i jako $\varphi(R)$, dla $R \in L$, wybierzemy taki punkt $a_n \in PRQ$, że liczba n jest najmniejsza możliwa.

250: Niech B oznacza zbiór wszystkich płaszczyzn zawierających odcinek PQ oraz niezawierających (w całości) żadnej prostej z L. Zbiór B jest niepusty, gdyż płaszczyzn jest nieprzeliczalnie wiele, a prostych w L tylko przeliczalnie wiele. Teraz weźmy dowolną płaszczyznę $\pi \in B$ i powtórzmy rozumowanie z zadania 249. To jest możliwe, gdyż każda prosta, która nie zawiera się w całości w płaszczyźnie ma z nią co najwyżej jeden punkt wspólny, a więc zbiór $\pi \cap L$ jest przeliczalny.

268a: Zacznijmy od sprawdzenia, że relacja $r \cdot r^*$ jest przechodnia. Załóżmy, że $\langle x, y\rangle, \langle y, z\rangle \in r \cdot r^*$. Oznacza to, że $\langle x, u\rangle \in r$, $\langle u, y\rangle \in r^*$, $\langle y, v\rangle \in r$, $\langle v, z\rangle \in r^*$, dla pewnych u i v. Ale wtedy mamy $\langle u, z\rangle \in r^* \cdot r \cdot r^* \subseteq r^* \cdot r^* \cdot r^* \subseteq r^*$, bo relacja r^* jest przechodnia i zawiera r. Skoro $\langle x, u\rangle \in r$ oraz $\langle u, z\rangle \in r^*$, to $\langle x, z\rangle \in r \cdot r^*$.

Jeśli s jest relacją przechodnią zawierającą r, to $r \cdot r^* \subseteq s \cdot (s \cup \mathbf{1})$ bo $s \cup \mathbf{1}$ jest przechodnia i zwrotna. Ale $s \cdot (s \cup \mathbf{1}) \subseteq s$ (zadanie 262), więc $r \cdot r^* \subseteq s$. A więc $r \cdot r^*$ jest najmniejszą relacją przechodnią zawierającą r. Dowód równości $r^+ = r^* \cdot r$ jest analogiczny.

268b: Relacja $r^+ \cup \mathbf{1}_A$ jest przechodnia i zwrotna, i stąd wynika inkluzja z lewej do prawej. Druga inkluzja bierze się z tego, że r^* jest przechodnia i zawiera identyczność.

269a: Funkcja φ nie jest różnowartościowa, bo np. $\varphi(\lambda n.0, \lambda n.1) = \mathbb{N} = \varphi(\lambda n.1, \lambda n.0)$.

269b: Funkcja φ jest na $\mathsf{P}(\mathbb{N})$. Dla dowolnego $A \subseteq \mathbb{N}$ zachodzi $\varphi(\lambda n.0, \chi_A) = A$, gdzie χ_A to funkcja charakterystyczna zbioru A określona jako $\chi_A(n) = \textsf{if } n \in A \textsf{ then } 1 \textsf{ else } 0$. Istotnie, dla $x \in A$ mamy $\chi_A(x) = 1 \neq 0 = (\lambda n.0)(x)$, a zatem $x \in \varphi(\lambda n.0, \chi_A)$. Na odwrót, jeśli $x \in \varphi(\lambda n.0, \chi_A)$, to $\chi_A(x) \neq (\lambda n.0)(x) = 0$, czyli $\chi_A(x) = 1$. To znaczy, że $x \in A$.

269c: Tak. Niech $\mathcal{R} \subseteq \mathsf{P}(\mathbb{N})$ będzie dowolną rodziną. Rozpatrzmy relację $r = \{\langle \lambda n.0, \chi_A\rangle \mid A \in \mathcal{R}\}$, gdzie χ_A jest jak w rozwiązaniu 269b. Pokażemy, że $\varphi(r) = \mathcal{R}$. Istotnie, $\varphi(r) \subseteq \mathcal{R}$, gdyż dla dowolnego $B \in \varphi(r)$ istnieje takie $A \in \mathcal{R}$, że $\varphi(\lambda n.0, \chi_A) = B$. Ponieważ jednak $\varphi(\lambda n.0, \chi_A) = A$, a zatem $A = B$, więc $B \in \mathcal{R}$. Zawieranie $\mathcal{R} \subseteq \varphi(r)$ również zachodzi, ponieważ dla dowolnego $A \in \mathcal{R}$ mamy $\langle \lambda n.0, \chi_A\rangle \in r$, a zatem $A \in \varphi(r)$. Relacja r jest przechodnia, bo jeśli $\langle f, g\rangle, \langle g, h\rangle \in r$, to $f = g = \lambda n.0$, a zatem $\langle f, h\rangle = \langle g, h\rangle \in r$.

269d: Nie. Dla rodziny $\mathcal{R} = \{\{0\}, \{1\}\}$ mamy $\varphi(\chi_{\{0\}}, \lambda n.0) = \{0\} \in \mathcal{R}$ oraz $\varphi(\lambda n.0, \chi_{\{1\}}) = \{1\} \in \mathcal{R}$, a więc $\langle \chi_{\{0\}}, \lambda n.0\rangle, \langle \lambda n.0, \chi_{\{1\}}\rangle \in \varphi^{-1}(\mathcal{R})$, ale $\langle \chi_{\{0\}}, \chi_{\{1\}}\rangle \notin \varphi^{-1}(\mathcal{R})$, bo $\varphi(\chi_{\{0\}}, \chi_{\{1\}}) = \{0,1\} \notin \mathcal{R}$. A zatem relacja $\varphi^{-1}(\mathcal{R})$ nie jest przechodnia.

270a: Nie, np. jeśli $r_1 = \{\langle 0,1\rangle, \langle 1,2\rangle\}$ oraz $r_2 = \{\langle 0,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 0,2\rangle\}$, to $\varphi(r_1) = \varphi(r_2) = r_2$.

270b: Nie. Na przykład relacja $s = \{\langle 0,1\rangle, \langle 1,2\rangle\}$ nie jest postaci $\varphi(r)$ dla żadnego r. Ponieważ zawsze $r \subseteq \varphi(r)$, mamy cztery relacje do rozpatrzenia. Dla r równego kolejno $\varnothing$, $\{\langle 0,1\rangle\}$, $\{\langle 1,2\rangle\}$, mamy $\varphi(r) = r \neq s$. Z kolei dla $r = s$ mamy $\varphi(r) = \{\langle 0,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 0,2\rangle\} \neq s$.

270c: Nie. Jeśli $r = \{\langle 0,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle\}$, wtedy $r^2 = \{\langle 0,2\rangle, \langle 1,3\rangle\}$, $r^3 = \{\langle 0,3\rangle\}$, $r^4 = \varnothing$ i podobnie $r^i = \varnothing$ dla wszystkich $i \geq 4$. Zatem $\langle 0,3\rangle \in r^+$, ale $\langle 0,3\rangle \notin \varphi(r)$.

270d: Jeśli r jest relacją przechodnią, to $r \circ r \subseteq r$, co przez łatwą indukcję implikuje $r^{2^n} \subseteq r$ dla dowolnego n. Zatem $\varphi(r) \subseteq r$, a ponieważ oczywiście $r \subseteq \varphi(r)$, więc $\varphi(r) = r$, dla $r \in \mathcal{T}$. Stąd wynika natychmiast, że $\varphi(\mathcal{T}) = \{\varphi(r) \mid r \in \mathcal{T}\} = \{r \mid r \in \mathcal{T}\} = \mathcal{T}$.

270e: Nie. W rozwiązaniu części (270a) relacja r_1 nie jest przechodnia, a $\varphi(r_1)$ jest przechodnia. Zatem $r_1 \in \varphi^{-1}(\mathcal{T})$, chociaż $r_1 \notin \mathcal{T}$.

271a: Tak. Przypuśćmy, że $A \neq B$, na przykład $B - A \neq \varnothing$. Niech $\chi_A = \lambda x.\, \textsf{if } x \in A \textsf{ then } 1 \textsf{ else } 0$. Wtedy $\langle \lambda x.\, 1, \chi_A\rangle \in \varphi(A)$, ale $\langle \lambda x.\, 1, \chi_A\rangle \notin \varphi(B)$, bo $1 = (\lambda x.\, 1)(b) \not\leq \chi_A(b) = 0$.

271b: Nie, na przykład dlatego, że $\varphi(A) \neq \varnothing$ dla dowolnego A. Istotnie, mamy np. $\langle \mathrm{id}_{\mathbb{N}}, \mathrm{id}_{\mathbb{N}}\rangle \in \varphi(A)$.

271c: Po pierwsze, $\varphi^{-1}(P) = \mathsf{P}(\mathbb{N})$, gdyż dla każdego $A \in \mathsf{P}(\mathbb{N})$ relacja $\varphi(A)$ jest przechodnia. Rozpatrzmy funkcje $f, g, h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, dla których zachodzi $\langle f, g\rangle, \langle g, h\rangle \in \varphi(A)$. Wtedy dla $a \in A$ mamy $f(a) \leq g(a) \leq h(a)$, a więc $\langle f, h\rangle \in \varphi(A)$.

Po drugie, $\varphi^{-1}(C) = \{\mathbb{N}\}$, gdyż $\varphi(\mathbb{N})$ jest częściowym porządkiem, natomiast dla $A \neq \mathbb{N}$ relacja $\varphi(A)$ nie jest antysymetryczna. Istotnie, relacja $\varphi(\mathbb{N})$ jest zwrotna (to oczywiste) i przechodnia (to pokazaliśmy poprzednio), a jej antysymetria wynika stąd, że jeśli $f(n) \leq g(n) \leq f(n)$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, to $f = g$. Jeśli natomiast $A \neq \mathbb{N}$, czyli istnieje element $a \in \mathbb{N} - A$, to mamy $\langle \lambda x.\, 0, \chi_{\{a\}}\rangle \in \varphi(A)$

oraz $\langle \chi_{\{a\}}, \lambda x.\, 0\rangle \in \varphi(A)$, gdyż dla każdego $x \in A$ zachodzi równość $g(x) = \chi_{\{a\}}(x) = 0$. Ponieważ funkcja $\chi_{\{a\}}$ nie jest stale równa zeru więc $\varphi(A)$ nie jest antysymetryczna, czyli $\varphi(A) \notin C$.

272a: Funkcja F nie jest różnowartościowa, bo np. $F(\varnothing, \varnothing) = \varnothing = F(\varnothing, \mathbb{N})$.

272b: Funkcja F jest na $\mathsf{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$. Istotnie, dla dowolnego $R \in \mathsf{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ zachodzi $F(R, \mathbb{N}) = R$.

272c: Niech $\mathcal{R}$ oznacza zbiór wszystkich relacji równoważności w $\mathbb{N}$. Pokażemy, że $F^{-1}(\mathcal{R}) = \mathcal{R} \times \{\mathbb{N}\}$. Inkluzja $(\subseteq)$ wynika stąd, że jeśli $F(R, A) = R \cap (A \times A)$ jest relacją równoważności, to $A = \mathbb{N}$, gdyż relacja równoważności jest zwrotna w $\mathbb{N}$. Ponieważ $F(R, \mathbb{N}) = R$, więc R musi być relacją równoważności. Inkluzja odwrotna $(\supseteq)$ wynika natychmiast z tego, że $F(R, \mathbb{N}) = R$.

272d: Nie. Niech $R = \{\langle 0, 1\rangle, \langle 1, 0\rangle\}$ i niech $\mathcal{Z} = \{\{0\}, \{1\}\}$. Wtedy $F(R, \bigcup \mathcal{Z}) = F(R, \{0, 1\}) = R$, ale $\bigcup\{F(R, A) \mid A \in \mathcal{Z}\} = F(R, \{0\}) \cup F(R, \{1\}) = \varnothing$.

272e: Tak. Inkluzja $(\subseteq)$ jest łatwa, bo dla $A \in \mathcal{Z}$ mamy $\bigcap \mathcal{Z} \subseteq A$, a stąd $F(R, \bigcap \mathcal{Z}) \subseteq F(R, A)$. Przypuśćmy więc, że $\langle x, y\rangle \in \bigcap\{F(R, A) \mid A \in \mathcal{Z}\}$. Wtedy dla każdego $A \in \mathcal{Z}$ para $\langle x, y\rangle$ należy do $F(R, A) = R \cap (A \times A)$. Inaczej, zarówno $x \in A$ jak $y \in A$ dla wszystkich A, skąd $x, y \in \bigcap \mathcal{Z}$. Przy tym $\langle x, y\rangle \in R$ więc wreszcie możemy napisać $\langle x, y\rangle \in R \cap (\bigcap \mathcal{Z} \times \bigcap \mathcal{Z}) = F(R, \bigcap \mathcal{Z})$.

272f: Oczywiście odpowiedź w punkcie (272e) nie zmieni się, natomiast w (272d) zmieni się na twierdzącą. Niech $\langle x, y\rangle \in F(R, \bigcup \mathcal{Z})$, skąd wynika, że $\langle x, y\rangle \in R$ i $\langle x, y\rangle \in \bigcup \mathcal{Z} \times \bigcup \mathcal{Z}$, a więc, że $x, y \in \bigcup \mathcal{Z}$. Z definicji sumy rodziny zbiorów istnieją takie $A_x, A_y \in \mathcal{Z}$, że $x \in A_x$ i $y \in A_y$. Ponieważ $\mathcal{Z}$ jest łańcuchem, więc zbiory A_x i A_y są porównywalne; przyjmijmy, że $A_x \subseteq A_y$. Stąd $x, y \in A_y$, z czego z kolei wynika, że $\langle x, y\rangle \in F(R, A_y)$, a więc $\langle x, y\rangle \in \bigcup\{F(R, A) \mid A \in \mathcal{Z}\}$.

W drugą stronę, jeśli $\langle x, y\rangle \in \bigcup\{F(R, A) \mid A \in \mathcal{Z}\}$, to istnieje takie $A \in \mathcal{Z}$, że $\langle x, y\rangle \in F(R, A)$, a zatem $\langle x, y\rangle \in R$ i $\langle x, y\rangle \in A \times A$. Stąd $x, y \in A$, a więc $x, y \in \bigcup \mathcal{Z}$, czyli $\langle x, y\rangle \in F(R, \bigcup \mathcal{Z})$.

273a: Jeśli $n = 0$ to relacja $\varphi(n) = \{\langle 0, n\rangle \mid n \in \mathbb{N}\}$ jest przechodnia, bo przypadek $\langle x, y\rangle, \langle y, z\rangle \in \varphi(n)$ zachodzi tylko wtedy, gdy $x = y = 0$. Jeśli jednak $n \neq 0$, to mamy $\langle 0, n\rangle, \langle n, n+1\rangle \in \varphi(n)$, ale $\langle 0, n+1\rangle \notin \varphi(n)$, więc $\varphi(n)$ nie jest przechodnia. Zatem $\varphi^{-1}(\mathcal{T}) = \{n \mid \varphi(n) \text{ jest przechodnia}\} = \{0\}$.

273b: Tak, bo $\bigcup \varphi(\mathbb{N})$ to relacja zwykłego porządku $\leq$ w $\mathbb{N}$. Istotnie, jeśli $\langle x, y\rangle \in \bigcup \varphi(\mathbb{N})$, to dla pewnego n mamy $\langle x, y\rangle \in \varphi(n)$, a więc albo $x \leq y = n$ albo $x = n \leq y$. Na odwrót, jeśli $x \leq y$, to $\langle x, y\rangle \in \varphi(y) \in \varphi(\mathbb{N})$, więc $\langle x, y\rangle \in \bigcup \varphi(\mathbb{N})$.

274a: Dla dowolnego n, przypadek $\langle x, y\rangle, \langle y, z\rangle \in \varphi(n)$ zachodzi w jednej z trzech sytuacji:

1. $x = n$, $y = n$, $n \leq z \leq 2n$;
2. $n \leq x \leq 2n$, $y = 2n$, $z = 2n$;
3. $x = n$, $n \leq y \leq 2n$ i $z = 2n$.

W dwóch pierwszych przypadkach to, że $\langle x, z\rangle \in \varphi(n)$ jest oczywiste, w trzecim również, ponieważ $\langle n, 2n\rangle \in \varphi(n)$. A więc relacja $\varphi(n)$ jest przechodnia. Zatem przeciwobraz $\mathcal{T}$ to $\mathbb{N}$.

274b: Nie, bo $\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle \in \bigcup \varphi(\mathbb{N})$ (ponieważ $\langle 1, 2\rangle \in \varphi(1)$ i $\langle 2, 3\rangle \in \varphi(2)$), ale $\langle 1, 3\rangle \notin \bigcup \varphi(\mathbb{N})$. Istotnie, gdyby tak było, to $\langle 1, 3\rangle \in \varphi(n)$, dla pewnego n. Wtedy albo $n = 1$ i $3 \leq 2$, albo $3 = 2n$, a tak jedno jak i drugie jest niemożliwe.

275a: $(\Rightarrow)$ Załóżmy, że Φ jest różnowartościowa. Aby pokazać, że f jest na B, rozpatrzmy dowolny element $b \in B$. Jeśli $r = \{\langle b, b\rangle\}$, to $\Phi(r) = \{\langle x, y\rangle \in A \times A \mid \langle f(x), f(y)\rangle = \langle b, b\rangle\}$, czyli inaczej $\Phi(r) = \{\langle x, y\rangle \in A \times A \mid f(x) = f(y) = b\}$. Ponieważ $r = \{\langle b, b\rangle\} \neq \varnothing$, a funkcja Φ jest różnowartościowa, więc $\Phi(r) \neq \Phi(\varnothing) = \{\langle x, y\rangle \in A \times A \mid \langle f(x), f(y)\rangle \in \varnothing\} = \varnothing$. A zatem zbiór $\Phi(r) = \{\langle x, y\rangle \in A \times A \mid f(x) = f(y) = b\}$ jest niepusty, czyli istnieje takie $x \in A$, że $f(x) = b$.

Na odwrót, przypuśćmy, że f jest na B, i że $\Phi(r) = \Phi(r')$ dla pewnych relacji r i r' w zbiorze B. Udowodnimy, że wtedy $r = r'$. Najpierw załóżmy, że $\langle x, y\rangle \in r$. Ponieważ f jest na więc istnieją takie $x, y \in A$, że $f(x) = x$ i $f(y) = y$. Wtedy para $\langle x, y\rangle$ należy do $\Phi(r)$, a więc także do $\Phi(r')$. To zaś znaczy, że $\langle x, y\rangle = \langle f(x), f(y)\rangle \in r'$.

W ten sposób pokazaliśmy, że $r \subseteq r'$; podobnie wykażemy inkluzję w przeciwną stronę.

275b: $(\Rightarrow)$ Załóżmy, że f jest różnowartościowa. Aby wykazać, że Φ jest na $\mathsf{P}(A \times A)$, rozpatrzmy dowolną relację s w zbiorze A. Niech $r = \{\langle u, v\rangle \in B \times B \mid \exists x\, y \in A\, (u = f(x) \wedge v = f(y) \wedge \langle x, y\rangle \in s)\}$.

Pokażemy, że $\Phi(r) = s$. Zaczniemy od inkluzji z prawej do lewej: niech $\langle x, y\rangle \in s$. Aby udowodnić, że $\langle x, y\rangle \in \Phi(r)$ należy wykazać, że $\langle f(x), f(y)\rangle \in r$, ale to wynika natychmiast z definicji relacji r.

Niech więc teraz $\langle x, y\rangle \in \Phi(r)$. Wtedy $\langle f(x), f(y)\rangle \in r$, czyli istnieją takie $x'\, y' \in A$, że $f(x) = f(x')$, $f(y) = f(y')$ oraz $\langle x', y'\rangle \in s$. **Ponieważ f jest różnowartościowa**, więc $x = x'$ oraz $y = y'$, skąd wynika, że $\langle x, y\rangle \in s$.
($\Leftarrow$) Załóżmy, że Φ jest na $\mathsf{P}(A \times A)$. Dowodzimy, że f jest różnowartościowa. Niech $x, y \in A$ oraz $f(x) = f(y)$. Rozpatrzmy relację $s = \{\langle x, y\rangle\}$. Skoro Φ jest „na", to istnieje taka relacja $r \subseteq B \times B$, że $s = \Phi(r) = \{\langle x, y\rangle \in A \times A \mid \langle f(x), f(y)\rangle \in r\}$. Skoro $\langle x, y\rangle \in \Phi(r)$, to $\langle f(x), f(y)\rangle \in r$. Ale $f(x) = f(y)$, więc także $\langle f(y), f(x)\rangle \in r$, co oznacza, że $\langle y, x\rangle \in \Phi(r) = s = \{\langle x, y\rangle\}$. Stąd zaś $x = y$.

275c: Przede wszystkim sprawdźmy, czy równanie ma sens, tj. czy lewa i prawa strona jest tego samego typu (i jaki to jest typ). Ponieważ $\mathcal{R}$ jest podzbiorem przeciwdziedziny funkcji Φ, więc $\Phi^{-1}(\mathcal{R})$ to przeciwobraz tego podzbioru, czyli podzbiór zbioru $\mathsf{P}(B \times B)$. Inaczej mówiąc, jest to rodzina relacji w zbiorze B. Suma tej rodziny jest relacją w B, więc lewa strona równania, to wartość funkcji Φ dla tej relacji, czyli relacja w A. Z prawej strony jest też relacja w A, jest to bowiem suma rodziny relacji $\mathcal{R}$. Teraz pokażmy, że równość zachodzi.

($\subseteq$) Niech $\langle x, y\rangle \in \Phi(\bigcup \Phi^{-1}(\mathcal{R}))$. To znaczy, że $\langle f(x), f(y)\rangle \in \bigcup \Phi^{-1}(\mathcal{R})$, czyli istnieje taki element r rodziny $\Phi^{-1}(\mathcal{R})$, że $\langle f(x), f(y)\rangle \in r$. Z definicji Φ wynika, że wtedy $\langle x, y\rangle \in \Phi(r)$. A skoro $r \in \Phi^{-1}(\mathcal{R})$, to $\Phi(r) \in \mathcal{R}$. Ostatecznie mamy $\langle x, y\rangle \in \Phi(r) \in \mathcal{R}$, czyli $\langle x, y\rangle \in \bigcup \mathcal{R}$.

($\supseteq$) Niech $\langle x, y\rangle \in \bigcup \mathcal{R}$. Jest więc takie $s \in \mathcal{R}$, że $\langle x, y\rangle \in s$. Ponieważ Φ jest „na", więc $s = \Phi(r)$ dla pewnej relacji r w zbiorze B. No to $\langle x, y\rangle \in \Phi(r)$ czyli $\langle f(x), f(y)\rangle \in r$. Ponadto $r \in \Phi^{-1}(\mathcal{R})$, bo $s \in \mathcal{R}$. Stąd $\langle f(x), f(y)\rangle \in r \in \bigcup \Phi^{-1}(\mathcal{R})$, co oznacza ni mniej ni więcej, tylko tyle, że $\langle x, y\rangle \in \Phi(\bigcup \Phi^{-1}(\mathcal{R}))$.

276: Należy przyjąć $x\,r\,y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\{x, y\} \in \mathcal{A}$.

277a: Nie. Niech $A = \{0, 1\}$ i niech $r_1 = \{\langle 0, 1\rangle\}$, $r_2 = \{\langle 1, 0\rangle\}$. Relacje r_1 i r_2 są przeciwzwrotne, ale ich złożenie $r_1 \cdot r_2 = \{\langle 0, 0\rangle\}$ nie jest.

277b: Tak. Niech $\mathcal{R}$ będzie niepustą rodziną relacji przeciwzwrotnych. Istnieje więc przeciwzwrotna relacja $r \in \mathcal{R}$. Przypuśćmy, że $\langle a, a\rangle \in \bigcap \mathcal{R}$ dla pewnego a. Skoro $r \in\in \mathcal{R}$, to $\langle a, a\rangle \in r$, sprzeczność.

277c: Tak. Niech $\mathcal{R}$ będzie rodziną relacji przeciwzwrotnych. Przypuśćmy, że $\langle a, a\rangle \in \bigcup \mathcal{R}$. Wtedy istnieje takie $r \in \mathcal{R}$, że $\langle a, a\rangle \in r$. Zatem r nie jest relacją przeciwzwrotną. Sprzeczność.

278a: Nie. Relacje $r_1 = \{\langle 3, 2\rangle, \langle 3, 4\rangle, \langle 1, 6\rangle\}$ i $r_2 = \{\langle 2, 1\rangle, \langle 4, 5\rangle, \langle 6, 5\rangle\}$ są krzaczaste, ale ich złożenie $r_1 \cdot r_2 = \{\langle 3, 1\rangle, \langle 3, 5\rangle, \langle 1, 5\rangle\}$ nie jest relacją krzaczastą.

278b: Tak. Niech $\mathcal{R}$ będzie dowolną niepustą rodziną relacji krzaczastych i niech $a, b, c \in A$ będą takie, że $\langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle \in \bigcap \mathcal{R}$. To oznacza, że dla każdej relacji $r \in \mathcal{R}$ zachodzi $a\,r\,b$ i $a\,r\,c$. Ponieważ r jest z założenia krzaczasta, to $\neg\, b\,r\,c$ i $\neg\, c\,r\,b$. Zatem $\langle b, c\rangle$ i $\langle c, b\rangle$ nie należą do żadnej relacji $r \in \mathcal{R}$, z czego wynika, że $\langle b, c\rangle, \langle c, b\rangle \notin \bigcap \mathcal{R}$.

278c: Nie. Na przykład relacje $r_1 = \{\langle 3, 1\rangle, \langle 3, 2\rangle\}$ i $r_2 = \{\langle 2, 1\rangle\}$ w zbiorze $\{1, 2, 3\}$ są krzaczaste, ale ich suma $r_1 \cup r_2 = \{\langle 3, 1\rangle, \langle 3, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle\}$ nie jest relacją krzaczastą.

278d: Tak. Niech $a, b, c \in A$ będą takie, że $\langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle \in \bigcup_{i\in\mathbb{N}} r_i$ i przypuśćmy że $\langle b, c\rangle \in \bigcup_{i\in\mathbb{N}} r_i$. Z definicji sumy uogólnionej istnieją takie $i, j, k \in \mathbb{N}$, że $a\,r_i\,b$, $a\,r_j\,c$ i $b\,r_k\,c$. Niech $m = max(i, j, k)$. Ponieważ relacje r_i dla $i \in \mathbb{N}$ tworzą ciąg wstępujący, to $a\,r_m\,b$, $a\,r_m\,c$ i $b\,r_m\,c$. Zatem r_m nie jest relacją krzaczastą – sprzeczność. Podobnie wyprowadzimy sprzeczność z założenia $\langle c, b\rangle \in \bigcup_{i\in\mathbb{N}} r_i$.

279a: Nie. Przyjmijmy $r = \{\langle 1, 2\rangle,\ \langle 1, 3\rangle,\ \langle 2, 4\rangle,\ \langle 3, 4\rangle,\ \langle 4, 4\rangle\}$ i $s = \{\langle 2, 5\rangle,\ \langle 5, 5\rangle,\ \langle 3, 6\rangle,\ \langle 6, 6\rangle\}$. Wtedy r i s są relacjami skierowanymi, a $r \cdot s = \{\langle 1, 5\rangle, \langle 1, 6\rangle\}$ nie jest.

279b: Nie. Przyjmijmy $r = \{\langle 1, 2\rangle,\ \langle 1, 3\rangle,\ \langle 2, 4\rangle,\ \langle 3, 4\rangle,\ \langle 4, 4\rangle\}$ i $s = \{\langle 1, 2\rangle,\ \langle 1, 3\rangle,\ \langle 2, 5\rangle,\ \langle 3, 5\rangle,\ \langle 5, 5\rangle\}$. Wtedy r i s są relacjami skierowanymi, a $r \cap s = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle\}$ nie jest.

279c: Załóżmy, że r jest skierowana. Weźmy dwie dowolne pary $\langle x, y\rangle, \langle x, z\rangle$ ze zbioru $r \cup r^{-1}$. Nietrudno zauważyć, że wtedy pary $\langle y, x\rangle$ i $\langle z, x\rangle$ także należą do $r \cup r^{-1}$. (Na przykład jeśli $\langle x, y\rangle \in r$, to $\langle y, x\rangle \in r^{-1}$ itd.) Zatem $r \cup r^{-1}$ jest relacją skierowaną.

279d: Weźmy dwie dowolne pary $\langle a, b\rangle$ i $\langle a, c\rangle \in \bigcup \mathcal{R}$. Istnieją takie relacje $r, s \in \mathcal{R}$, że $\langle a, b\rangle \in r$ oraz $\langle a, c\rangle \in s$. Wiemy, że $r \subseteq s$ lub $s \subseteq r$. Bez straty ogólności zakładamy, że $r \subseteq s$. Wtedy także

$\langle a,b\rangle \in s$, a ponieważ s jest skierowana, więc istnieje takie d, że $\langle b,d\rangle, \langle c,d\rangle \in s$. Stąd $\langle b,d\rangle$ i $\langle c,d\rangle$ należą do $\bigcup\mathcal{R}$. Udowodniliśmy, że $\bigcup\mathcal{R}$ jest relacją skierowaną.

280a: Pokażemy, że równość zachodzi i zrobimy to na dwa sposoby.

Sposób 1: $(\subseteq)$ Weźmy dowolną parę $\langle x,y\rangle \in (r^*)^{-1}$. Wtedy $\langle y,x\rangle \in r^*$ więc istnieje taki ciąg $a_0,\ldots,a_n$, że $a_0 = y$, $a_n = x$ i $\langle a_i, a_{i+1}\rangle \in r$, dla każdego $0 \le i < n$. Stąd $\langle a_{i+1}, a_i\rangle \in r^{-1}$ dla każdego $0 \le i < n$. Zatem $\langle a_n, a_0\rangle \in (r^{-1})^*$, czyli $\langle x,y\rangle \in (r^{-1})^*$.

$(\supseteq)$ Weźmy dowolne $\langle x,y\rangle \in (r^{-1})^*$. Istnieje taki ciąg $a_0,\ldots,a_n$, że $a_0 = x$, $a_n = y$ i $\langle a_i, a_{i+1}\rangle \in r^{-1}$, dla każdego $0 \le i < n$. Stąd $\langle a_{i+1}, a_i\rangle \in r$ zachodzi dla każdego $0 \le i < n$. Zatem $\langle a_n, a_0\rangle \in r^*$, czyli $\langle y,x\rangle \in r^*$. Stąd mamy $\langle x,y\rangle \in (r^*)^{-1}$.

Sposób 2: Wykorzystamy dwie łatwe obserwacje. Po pierwsze, jeśli relacja r jest przechodnia i zwrotna, to relacja r^{-1} też jest przechodnia i zwrotna. Po drugie, inkluzje $r \subseteq s$ i $r^{-1} \subseteq s^{-1}$ są równoważne. Proste dowody pomijamy.

$(\subseteq)$ Relacja $(r^{-1})^*$ jest przechodnia i zwrotna , więc relacja $((r^{-1})^*)^{-1}$ też jest przechodnia i zwrotna. Ponadto, $r^{-1} \subseteq (r^{-1})^*$, skąd $r \subseteq ((r^{-1})^*)^{-1}$. Relacja $((r^{-1})^*)^{-1}$ jest więc relacją przechodnią i zwrotną zawierającą r. Najmniejszą relacją o tych własnościach jest r^*, więc $r^* \subseteq ((r^{-1})^*)^{-1}$, a to implikuje naszą tezę: $(r^*)^{-1} \subseteq (((r^{-1})^*)^{-1})^{-1} = (r^{-1})^*$.

$(\supseteq)$ Relacja $(r^*)^{-1}$ jest przechodnia i zwrotna (bo r^* jest przechodnia i zwrotna) i zawiera relację r^{-1} (bo $r \subseteq r^*$). Zatem $(r^*)^{-1}$ musi zawierać domknięcie przechodnio-zwrotne $(r^{-1})^*$ relacji r^{-1}.

280b: Równość nie zachodzi: dla $A = \{1,2,3\}$, $r = \{\langle 1,2\rangle\}$ i $s = \{\langle 2,3\rangle\}$, mamy

$$\begin{aligned}(r\cup s)^* &= \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 1,3\rangle\}\\ r^*\cup s^* &= \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,3\rangle\}.\end{aligned}$$

Ponieważ $r \subseteq r\cup s$, więc $r^* \subseteq (r\cup s)^*$. Podobnie, $s^* \subseteq (r\cup s)^*$. Zatem $r^*\cup s^* \subseteq (r\cup s)^*$.

280c: Równość nie zachodzi: dla $A = \{1,2,3,4\}$, $r = \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,4\rangle\}$ i $s = \{\langle 1,3\rangle, \langle 3,4\rangle\}$, mamy

$$\begin{aligned}(r\cap s)^* &= \{\langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 4,4\rangle\}\\ r^*\cap s^* &= \{\langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 4,4\rangle, \langle 1,4\rangle\}.\end{aligned}$$

Ponieważ $r\cap s \subseteq r$, więc $(r\cap s)^* \subseteq r^*$. Podobnie, $(r\cap s)^* \subseteq s^*$. Zatem $(r\cap s)^* \subseteq r^*\cap s^*$.

281a: Tak. Niech r będzie zwrotna i euklidesowa. Aby udowodnić, że r jest skierowana, przypuśćmy, że $\langle a,b\rangle, \langle a,c\rangle \in r$. Mamy pokazać, że $\langle b,t\rangle \in r$ i $\langle c,t\rangle \in r$, dla pewnego t. Wystarczy przyjąć $t = c$. Istotnie, $\langle b,c\rangle \in r$, bo relacja jest euklidesowa, oraz $\langle c,c\rangle \in r$, bo jest zwrotna.

281b: Tak. Załóżmy, że r jest zwrotna i euklidesowa. Weźmy dwie dowolne pary $\langle a,b\rangle, \langle b,c\rangle \in r$. Mamy pokazać, że $\langle a,c\rangle \in r$. Ponieważ r jest zwrotna, więc $\langle a,a\rangle \in r$. Ponieważ $\langle a,a\rangle, \langle a,b\rangle \in r$ oraz r jest euklidesowa, więc $\langle b,a\rangle \in r$. Ponieważ $\langle b,a\rangle, \langle b,c\rangle \in r$ i r jest euklidesowa, więc $\langle a,c\rangle \in r$.

281c: Tak. Załóżmy, że r jest przechodnia i symetryczna. Weźmy dwie dowolne pary $\langle a,b\rangle, \langle a,c\rangle \in r$. Mamy pokazać, że $\langle b,c\rangle \in r$. Ponieważ $\langle a,b\rangle \in r$ i r jest symetryczna, więc $\langle b,a\rangle \in r$. Skoro mamy również $\langle a,c\rangle \in r$ i r jest przechodnia, więc $\langle b,c\rangle \in r$.

281d: Nie. Relacja $r = \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,2\rangle\}$. jest przechodnia i euklidesowa, ale nie jest symetryczna.

281e: Tak. Weźmy dowolne pary $\langle a,b\rangle, \langle a,c\rangle \in \bigcap\mathcal{R}$. Dla dowolnej relacji $r \in \mathcal{R}$ mamy $\langle a,b\rangle, \langle a,c\rangle \in r$ i stąd $\langle b,c\rangle \in r$, bo r jest euklidesowa. Stąd $\langle b,c\rangle \in \bigcap\mathcal{R}$. Zatem $\bigcap\mathcal{R}$ jest relacją euklidesową.

282a: Tak. Dla dowolnej pary $\langle x,y\rangle \in r^*$, biorąc $z = x$ mamy $\langle x,z\rangle \in r^*$ i $\langle z,y\rangle \in r^*$. Zatem r^* jest zawsze słabo gęsta (niezależnie od tego, czy r jest słabo gęsta czy nie).

282b: Tak. Załóżmy, że r jest słabo gęsta, i niech $\langle a,b\rangle \in r\cup r^{-1}$. Jeśli $\langle a,b\rangle \in r$, to istnieje takie c, że $\langle a,c\rangle \in r$ i $\langle c,b\rangle \in r$, bo r jest słabo gęsta. Zatem mamy również $\langle a,c\rangle \in r\cup r^{-1}$ i $\langle c,b\rangle \in r\cup r^{-1}$, stąd $r\cup r^{-1}$ jest słabo gęsta. Jeśli $\langle a,b\rangle \in r^{-1}$, to $\langle b,a\rangle \in r$ i dalej postępujemy podobnie jak w poprzednim przypadku.

282c: Nie. Przyjmijmy $r = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle\}$ i $s = \{\langle 2,3\rangle, \langle 3,3\rangle\}$. Wtedy r i s są słabo gęste, ale ich złożenie $r\cdot s = \{\langle 1,3\rangle\}$ nie jest słabo gęste.

282d: Nie. Przyjmijmy $A = \{a, b\} \cup \{c_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, gdzie a, b, c_0, $c_1, \ldots$ są parami różne. Dla $n \in \mathbb{N}$ relacja $r_n = \{\langle a, b\rangle\} \cup \bigcup_{i \geq n}\{\langle a, c_i\rangle, \langle c_i, c_i\rangle, \langle c_i, b\rangle\}$ jest słabo gęsta. Oczywiście jeśli $m \geq n$, to $r_m \subseteq r_n$. Niech $\mathcal{R} = \{r_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Wtedy uogólniony iloczyn $\bigcap \mathcal{R} = \{\langle a, b\rangle\}$ nie jest relacją słabo gęstą.

283a: Nie. Na przykład $f(\varnothing) = f(\{\langle 0, 0\rangle\}) = \varnothing$.

283b: Tak. Dla $X \subseteq \mathbb{N}$ określimy taką relację r_X, że $f(r_X) = X$. Dla każdego $i \in X$ do relacji r_X należą pary $\langle 0, p_i\rangle$, $\langle p_i, p_i^2\rangle$, ..., $\langle p_i^i, p_i^{i+1}\rangle$, gdzie p_i to i-ta liczba pierwsza. Wtedy $\langle 0, p_i^{i+1}\rangle \in r^i$ oraz dla żadnego n nie zachodzi ani $\langle n, 0\rangle \in r$ ani $\langle p_i^{i+1}, n\rangle$. Zatem $i \in X$ wtedy i tylko wtedy, gdy $i \in f(r_X)$.

283c: Tak. Relacja $r = \{\langle 0, 1\rangle, \langle 0, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 3\rangle\}$ nie jest przechodnia (bo $\langle 0, 3\rangle \notin r$) oraz $f(r) = \{0\}$.

285a: Funkcja φ nie jest różnowartościowa. Istotnie, dla $r_1 = \{\langle 0, 1\rangle\}$ i $r_2 = \{\langle 1, 2\rangle\}$, wartością $\varphi(r_1)$ oraz $\varphi(r_2)$ jest $\varnothing$, gdyż dla obu relacji ich wszystkie nietrywialne złożenia są relacjami pustymi.

285b: Zacznijmy od tego, że dla dowolnej relacji r zachodzi $\varphi(r) \subseteq r$, bo oczywiście $\varphi(r) \subseteq r^1 = r$. A jeśli relacja r jest zwrotna, to $\varphi(r) = r$. Jeśli bowiem $\langle x, y\rangle \in r$ to ze zwrotności r wynika, że $\langle x, x\rangle \in r$, a zatem $\langle x, y\rangle \in r^n$ dla dowolnego $n > 0$. Stąd $r \subseteq \varphi(r)$, czyli $r = \varphi(r)$. A więc $\varphi(\mathcal{Z}) = \{\varphi(r) \mid r \in \mathcal{Z}\} = \{r \mid r \in \mathcal{Z}\} = \mathcal{Z}$. Mamy także $\varphi^{-1}(\mathcal{Z}) = \mathcal{Z}$. Istotnie, jeśli $r \in \mathcal{Z}$, to $\varphi(r) = r \in \mathcal{Z}$, więc $\varphi(r) \in \mathcal{Z}$. Stąd $\mathcal{Z} \subseteq \{r \mid \varphi(r) \in \mathcal{Z}\} = \varphi^{-1}(\mathcal{Z})$. Pozostaje wykazać zawieranie przeciwne $\varphi^{-1}(\mathcal{Z}) \subseteq \mathcal{Z}$. Weźmy zatem dowolną relację $r \in \varphi^{-1}(\mathcal{Z})$, a więc taką, że $\varphi(r) \in \mathcal{Z}$, tj. $\varphi(r)$ jest zwrotna. Wiemy, że $\varphi(r) \subseteq r$, więc r też jest zwrotna, czyli $r \in \mathcal{Z}$.

286a: Niech $y \in \mathcal{I}(r^*, B)$. Wtedy $x\, r^*\, y$ dla pewnego $x \in B$. Ponieważ r^* jest sumą wszystkich relacji r^n, więc $x\, r^n\, y$ dla pewnego n, co oznacza, że $y \in \mathcal{I}(r^n, B) \subseteq \bigcup\{\mathcal{I}(r^n, B) \mid n \in \mathbb{N}\}$. Na odwrót, jeśli $y \in \bigcup\{\mathcal{I}(r^n, B) \mid n \in \mathbb{N}\}$, to $y \in \mathcal{I}(r^n, B)$ dla pewnego n, czyli istnieje takie $x \in B$, że $\langle x, y\rangle \in r^n$. Ponieważ $r^n \subseteq r^*$, więc $\langle x, y\rangle \in r^*$, skąd $y \in \mathcal{I}(r^*, B)$.

286b: Zacznijmy od sprawdzenia, że zbiór $\mathcal{I}(r^*, B)$ spełnia podane warunki. Ponieważ $r^0 = \mathbf{1}$, więc $\mathcal{I}(r^0, B) = \{y \mid \exists x \in B.\, x = y\} = B$. Stąd $B = \mathcal{I}(r^0, B) \subseteq \mathcal{I}(r^*, B)$ na mocy części 286a. Dalej przypuśćmy, że $y \in \mathcal{I}(r, \mathcal{I}(r^*, B))$. Wtedy istnieje takie $x \in \mathcal{I}(r^*, B)$, że $x\, r\, y$. Skoro $x \in \mathcal{I}(r^*, B)$, to mamy takie $z \in B$, że $z\, r^*\, x$. Ale wtedy także $z\, r^*\, y$, bo r^* jest przechodnie. No to $y \in \mathcal{I}(r^*, B)$. W ten sposób udowodniliśmy, że $\mathcal{I}(r, \mathcal{I}(r^*, B)) \subseteq \mathcal{I}(r^*, B)$. Niech teraz X będzie zbiorem o własnościach $B \subseteq X$ oraz $\mathcal{I}(r, X) \subseteq X$. Ponieważ wiemy, że $\mathcal{I}(r^*, B) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{I}(r^n, B)$, więc wystarczy udowodnić, że $\mathcal{I}(r^n, B) \subseteq X$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Ponieważ $\mathcal{I}(r^0, B) = B$, więc $\mathcal{I}(r^0, B) \subseteq X$. Zakładamy więc, że $\mathcal{I}(r^n, B) \subseteq X$ i dowodzimy, że $\mathcal{I}(r^{n+1}, B) \subseteq X$. Niech $y \in \mathcal{I}(r^{n+1}, B)$. Wtedy jest takie $x \in \mathcal{I}(r^n, B)$, że $x\, r\, y$. Ponieważ $x \in \mathcal{I}(r^n, B)$ więc z założenia indukcyjnego $x \in X$, skąd $y \in \mathcal{I}(r, X) \subseteq X$ i gotowe.

286c: ($\Rightarrow$) Załóżmy, że r jest relacją przechodnią i niech $C, D \subseteq A$ będą takie, że $r \cap (C \times D) = \varnothing$. Przypuśćmy, że zbiór $\mathcal{I}(r, C) \cap \mathcal{I}(r^{-1}, D)$ ma jakiś element y. Wtedy istnieje takie $x \in C$, że $x\, r\, y$ (bo $y \in \mathcal{I}(r, C)$) oraz istnieje takie $z \in D$, że $y\, r\, z$ (bo $y \in \mathcal{I}(r^{-1}, D)$). Z przechodniości wynika, że $x\, r\, z$, czyli że $\langle x, z\rangle \in r \cap (C \times D) = \varnothing$, sprzeczność.
($\Leftarrow$) Załóżmy, że warunek $\forall C, D \subseteq A\, [\, r \cap (C \times D) = \varnothing \to \mathcal{I}(r, C) \cap \mathcal{I}(r^{-1}, D) = \varnothing\,]$ jest spełniony. Mamy udowodnić, że r jest przechodnia, weźmy więc takie x, y, z, że $x\, r\, y$ oraz $y\, r\, z$ i przypuśćmy, że $\langle x, z\rangle \notin r$. Niech $C = \{x\}$ i niech $D = \{z\}$. Wtedy zbiór $r \cap (C \times D)$ jest pusty, skąd zbiór $\mathcal{I}(r, C) \cap \mathcal{I}(r^{-1}, D)$ też musi być pusty. Ale tak nie jest, bo $y \in \mathcal{I}(r, C) \cap \mathcal{I}(r^{-1}, D)$ i mamy sprzeczność.

291: Może to być na przykład relacja równoważności wyznaczona przez następujący podział zbioru liczb naturalnych: $\{\{0, \ldots, 16\}, \{17, \ldots, 33\}, \{34, \ldots, 66\}, \{76, \ldots, 99\}, \{100, \ldots, 132\}, \{133, \ldots, 165\}, \{166, \ldots, 198\}, \{199, \ldots\}\}$.

292: Na przykład relacja $\{\langle m, n\rangle \mid \forall k\, (2^k \mid m + 1 \leftrightarrow 2^k \mid n + 1)\}$.

295a: Niech $\Phi : \mathsf{P}(\mathbb{N}) \to \mathsf{P}(\mathbb{N}/_r)$ będzie taką funkcją, że $\Phi(A) = \{K \in \mathbb{N}/_r \mid K \cap A \neq \varnothing\}$. Pokażemy, że relacja ϱ_r jest jądrem przekształcenia Φ, a więc relacją równoważności. Dowodzimy, że $A\, \varrho_r\, B$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $\Phi(A) = \Phi(B)$. Przypuśćmy najpierw, że $A\, \varrho_r\, B$ i pokażmy inkluzję $\Phi(A) \subseteq \Phi(B)$ (dowód odwrotnej inkluzji jest analogiczny). Niech $K \in \Phi(A)$, czyli $K \cap A \neq \varnothing$. Jest takie $a \in A$, że $a \in K$. Ponieważ $A\, \varrho_r\, B$, więc jest takie $b \in B$, że $b\, r\, a$ czyli b i a należą do tej samej klasy K. No to $K \cap B \neq \varnothing$, skąd $K \in \Phi(B)$.

Teraz załóżmy, że $\Phi(A) = \Phi(B)$ i sprawdźmy, że $A\, \varrho_r\, B$. Weźmy $a \in A$; wtedy klasa $[a]_r$ należy do zbioru $\Phi(A)$, czyli także do $\Phi(B)$. To znaczy, że $[a]_r \cap B \neq \varnothing$, i jest takie $b \in B$, że $b \in [a]_r$, tj. $a\, r\, b$.

Podobnie sprawdzimy drugą część definicji $A\,\varrho_r\,B$.

295b: Funkcja Φ, o której mowa w części 295a, jest na zbiór $\mathsf{P}(\mathbb{N}/_r)$, bo jeśli $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{N}/_r$, to $\mathcal{X} = \Phi(\bigcup \mathcal{X})$. Zatem moc zbioru klas abstrakcji jądra Φ jest taka sama jak moc zbioru $\mathsf{P}(\mathbb{N}/_r)$: continuum w przypadku relacji identycznościowej i cztery w przypadku relacji przystawania modulo dwa.

295c: Ponieważ $\Phi(A) = \varnothing$ tylko wtedy, gdy $A = \varnothing$, więc klasa $[\varnothing]_{\varrho_r}$ jest jednoelementowa. Innych klas przeliczalnych nie ma, bo jeśli $A \neq \varnothing$, to klasa $[A]_{\varrho_r}$ jest co najmniej mocy $\mathfrak{C}$. Przypuśćmy bowiem, że $a \in A$ i zdefiniujmy funkcję $F : (\mathsf{P}([a]_r) - \{\varnothing\}) \to [A]_{\varrho_r}$ w ten sposób, że $F(X) = (A - [a]_r) \cup X$. (Usuwamy ze zbioru A część wspólną z $[a]_r$ i wstawiamy w to miejsce (niepusty) zbiór X.) Funkcja jest dobrze określona, bo iloczyn A z klasą $[a]_r$ pozostaje niepusty, a pozostałe się nie zmieniają. I jest różnowartościowa, bo jeśli np. $x \in X - Y$, to także $x \in F(X) - F(Y)$. A skoro klasa $[a]_r$ ma moc $\aleph_0$, to moc klasy $[A]_{\varrho_r}$ jest co najmniej taka jak moc zbioru $\mathsf{P}([a]_r) - \{\varnothing\}$, czyli $\mathfrak{C}$.

296a: To jest jądro operacji, która funkcji $f : \mathbb{N} \to \mathsf{P}(\mathbb{N})$ przypisuje parę $\langle \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f(n), \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f(n)\rangle$.

296b: Zbiór $\mathbb{N} \to \mathsf{P}(\mathbb{N})$ jest mocy $\mathfrak{C}^{\aleph_0} = \mathfrak{C}$, a więc zbiór wszystkich klas abstrakcji jest co najwyżej takiej mocy. Pokażemy, że jest też co najmniej mocy $\mathfrak{C}$. W tym celu określimy funkcję $\Psi : \mathsf{P}(\mathbb{N}) \xrightarrow{1-1} (\mathbb{N} \to \mathsf{P}(\mathbb{N}))/_\sim$, biorąc $\Psi(A) = [\lambda n.\, A]_\sim$ (klasa abstrakcji funkcji stale równej A). Ponieważ $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A = A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A$, więc dla różnych A, B klasy $\Psi(A)$ i $\Psi(B)$ są różne – funkcja Ψ jest różnowartościowa.

296c: Jeśli funkcja f jest stała, np. $f(n) = A$ dla każdego n, to $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f(n) = A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f(n)$. Klasa $[f]_\sim$ jest wtedy jednoelementowa. Jeśli bowiem $g \sim f$, to także to $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} g(n) = A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} g(n)$. Wtedy dla dowolnego n zachodzi $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} g(n) \subseteq g(n) \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} g(n) = A$, więc $g(n) = A$.

Załóżmy więc, że f nie jest stała, np. $f(n) = A \subsetneq B = f(m)$, da pewnych n, m. Pokażemy, że klasa $[f]_\sim$ jest mocy $\mathfrak{C}$. Jasne, że jest co najwyżej takiej mocy, bo $[f]_\sim \subseteq \mathbb{N} \to \mathsf{P}(\mathbb{N})$, trzeba więc oszacować moc od dołu.

Przyjmijmy oznaczenia $D = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f(n)$ i $G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f(n)$. Wtedy $D \subseteq A$ i $B \subseteq G$, więc $D \neq G$. Niech $\Delta : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \xrightarrow{1-1} [f]_\sim$ będzie taką operacją, że $\Delta(b)(0) = D$, $\Delta(b)(1) = G$, a dla większych argumentów $\Delta(b)(n+2) = \mathsf{if}\ b(n) = 1\ \mathsf{then}\ G\ \mathsf{else}\ D$ dla $n \geq 0$. Dla $b : \mathbb{N} \to \{0,1\}$, funkcja $\Delta(b)$ przyjmuje wyłącznie wartości D i G, przy tym każdą z nich chociaż raz, a zatem $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Delta(b)(n) = D$ oraz $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Delta(b)(n) = G$, skąd wynika, że $\Delta(b) \in [f]_\sim$; funkcja Δ jest więc poprawnie określona. Jest też różnowartościowa, bo jeśli $b \neq c$, na przykład $b(n) = 1$, a $c(n) = 0$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$, to $\Delta(b)(n+2) = G \neq D = \Delta(c)(n)$. Ostatecznie otrzymujemy $\{\overline{\overline{[f]_\sim}} \mid f : \mathbb{N} \to \mathsf{P}(\mathbb{N})\} = \{1, \mathfrak{C}\}$.

297a: Warunek $\exists k(f(k) = n)$ mówi, że $n \in \mathrm{Rg}(f)$. A zatem relacja $\sim$ zachodzi między funkcjami o tym samym obrazie. Inaczej: jest jądrem operacji $\mathrm{Rg} : (\mathbb{N} \to \mathbb{N}) \to \mathsf{P}(\mathbb{N})$ i dlatego jest relacją równoważności. Podobnie relacja $\equiv$, która jest jądrem operacji $\lambda f.\, \mathsf{if}\ f$ jest „na" $\mathsf{then}\ 1\ \mathsf{else}\ 0$, bo $f \equiv g$ zachodzi wtw, gdy albo obie funkcje f i g są surjekcjami albo żadna z nich.

Natomiast relacja $\approx$ nie jest relacją równoważności, bo nie jest przechodnia. Niech na przykład:

$$f = \lambda n.\, \mathsf{if}\ n \text{ parzyste } \mathsf{then}\ 0\ \mathsf{else}\ 2, \qquad g = \lambda n.\, 2, \qquad h = \lambda n.\, \mathsf{if}\ n \text{ parzyste } \mathsf{then}\ 2\ \mathsf{else}\ 0.$$

Wtedy $f \approx g$, bo dla dowolnego n istnieje takie k, że warunki $f(k) = n$ i $g(k) = n$ są równoważne. Istotnie, wystarczy przyjąć $k = 3$. Wtedy $f(3) = 2 = g(3)$ (a więc $f(3) = 2 \leftrightarrow g(3) = 2$) oraz $f(3), g(3) \neq n$ dla wszystkich $n \neq 2$ (a więc też $f(3) = n \leftrightarrow g(3) = n$). Podobnie $g \approx h$ (teraz trzeba wybrać parzyste k). Ale $f \not\approx h$, bo nie dla każdego n jest takie k, które spełnia równoważność $f(k) = n \leftrightarrow h(k) = n$. Jako kontrprzykład weźmy $n = 0$. Jeśli k jest parzyste, to $f(k) = 0 \neq h(k)$, a jeśli k jest nieparzyste, to $f(k) \neq 0 = h(k)$. Zatem równości $f(k) = n$ i $h(k) = n$ dla żadnego k nie są równoważne.

297b: Relacja $\equiv$ ma dwie klasy abstrakcji: w jednej są wszystkie surjekcje, w drugiej reszta funkcji. Zbiór ilorazowy relacji $\sim$ jest zaś równoliczny ze zbiorem wartości operacji „zbiór wartości" czyli zbiorem $\{\mathrm{Rg}(f) \mid f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\} = \mathsf{P}(\mathbb{N}) - \{\varnothing\}$ mocy $\mathfrak{C}$. Równość wynika ze znanego twierdzenia, że każdy niepusty zbiór przeliczalny jest zbiorem wartości jakiejś funkcji określonej na $\mathbb{N}$.

297c: Oczywiście $\overline{\overline{C}} \leq \mathfrak{C}$ bo $C \subseteq \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Rozpatrzmy więc funkcję $\zeta : (\mathbb{N} \to \{0,1\}) \to C$ określoną tak: $\zeta(\alpha)(n) = \mathsf{if}\ n \text{ parzyste } \mathsf{then}\ 2\cdot\alpha(n/2)\ \mathsf{else}\ n-1$. Każda funkcja postaci $\zeta(\alpha)$ przyjmuje wyłącznie wartości parzyste i to wszystkie, bo $2k = \zeta(\alpha)(2k+1)$ dla dowolnego k. Operacja ζ jest więc dobrze określona. Ponadto jeśli funkcje $\alpha \neq \beta$ różnią się dla jakiegoś argumentu k, to $\zeta(\alpha)(2k) \neq \zeta(\beta)(2k)$, więc funkcje $\zeta(\alpha)$ i $\zeta(\beta)$ są różne. A zatem ζ jest funkcją różnowartościową, skąd $\mathfrak{C} \leq \overline{\overline{C}}$ i w końcu $\overline{\overline{C}} = \mathfrak{C}$ z twierdzenia Cantora-Bernsteina.

297d: Zbiór D też jest mocy $\mathfrak{C}$. Po pierwsze $\overline{\overline{D}} \leq \mathfrak{C}$, bo $D \subseteq \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, po drugie $\mathfrak{C} \leq \overline{\overline{D}}$, bo na to aby $f \approx \lambda n.\, 2n$ wystarczy żeby $f(0) = 0$. Zachodzą bowiem równoważności $f(0) = 0 \leftrightarrow 2 \cdot 0 = 0$ oraz $f(0) = n \leftrightarrow 2 \cdot 0 = n$ dla $n \neq 0$. Zatem zbiór $\{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid f(0) = 0\}$ mocy $\mathfrak{C}$ jest zawarty w D,

298a: Bo relacja $\approx$ jest jądrem przekształcenia, które każdej funkcji $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ przypisuje operację $\lambda n.\, \overline{\overline{f^{-1}(\{n\})}}$.

298b: Ten zbiór jest mocy continuum. Po pierwsze w każdej klasie jest przynajmniej jeden element, zatem moc zbioru klas jest co najwyżej taka jak moc zbioru $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, czyli $\mathfrak{C}$. Po drugie pokażemy, że moc naszego zbioru jest co najmniej taka jak $\overline{\overline{\mathsf{P}(\mathbb{N})}} = \mathfrak{C}$. Dla $A \subseteq \mathbb{N}$, niech $h_A = \lambda n.\, \mathsf{if}\ n \in A\ \mathsf{then}\ 2n\ \mathsf{else}\ 1$ i niech $H(A) = [h_A]_\approx$. Sprawdzamy, że funkcja $H : \mathsf{P}(\mathbb{N}) \to (\mathbb{N} \to \mathbb{N})/_\approx$ jest injekcją. Jeśli $A \neq B$ i liczba n należy do $A \dot{-} B$, to przeciwobrazy $h_A^{-1}(\{2n\})$ i $h_B^{-1}(\{2n\})$ są różnej mocy, bo jeden z nich jest pusty a drugi jest niepusty. Zatem $h_A \not\approx h_B$ i klasy $H(A)$ i $H(B)$ są różne. A zatem z twierdzenia Cantora-Bernsteina, moc zbioru ilorazowego to $\mathfrak{C}$.

298c: Klasa abstrakcji funkcji stale równej zero ma tylko jeden element. Jeśli bowiem $f \in [\lambda n.\, 0]_\approx$, to wszystkie zbiory $f^{-1}(\{n\})$ dla $n \neq 0$ są puste, a więc f może przyjmować tylko wartość zero.

Drugi przykład to funkcja $g = \lambda n.\, \mathsf{if}\ n = 0\ \mathsf{then}\ 0\ \mathsf{else}\ 1$. Klasa $[g]_\approx$ składa się z funkcji, które przyjmują wartość 0 dla dokładnie jednego argumentu, a wartość 1 dla pozostałych. Takich funkcji jest tyle, ile liczb naturalnych. Klasa $[g]_\approx$ jest więc mocy $\aleph_0$.

Teraz zauważmy, że funkcja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jest bijekcją wtedy i tylko wtedy, gdy każdy zbiór postaci $f^{-1}(\{n\})$ jest dokładnie jednoelementowy. Zbiór wszystkich bijekcji z $\mathbb{N}$ na $\mathbb{N}$, który jest mocy $\mathfrak{C}$, jest więc klasą abstrakcji naszej relacji i to jest trzeci przykład.

302: $(\Rightarrow)$ Pokażemy, że $r \cdot s \subseteq s \cdot r$. Niech $\langle x, z\rangle \in r \cdot s$. Skoro $r \cdot s$ jest symetryczna, to $z\,r\,u$ i $u\,s\,x$, dla pewnego u. Ale relacje r i s są symetryczne, więc $x\,s\,u$ i $u\,r\,z$, skąd $\langle x, z\rangle \in s \cdot r$. Zawieranie $s \cdot r \subseteq r \cdot s$ udowodnimy podobnie. Niech $\langle x, z\rangle \in s \cdot r$. Zatem $x\,s\,u$ i $u\,r\,z$, dla pewnego u. Ponieważ s i r są symetryczne, więc $u\,s\,x$ i $z\,r\,u$, a zatem $\langle z, x\rangle \in r \cdot s$. Z symetrii $r \cdot s$ mamy więc $\langle x, z\rangle \in r \cdot s$.
$(\Leftarrow)$ Zwrotność relacji $r \cdot s$ wynika ze zwrotności r i s. Symetria: jeśli $\langle x, y\rangle \in r \cdot s$, to z założenia także $\langle x, y\rangle \in s \cdot r$, czyli $x\,s\,u$ i $u\,r\,y$ dla pewnego u. Korzystając z symetrii relacji r i s mamy $y\,r\,u$ oraz $u\,s\,x$, czyli $\langle y, x\rangle \in r \cdot s$. Przechodniość: Niech $\langle x, y\rangle, \langle y, z\rangle \in r \cdot s$. Wtedy dla pewnych u i v zachodzi $x\,r\,u$, $u\,s\,y$, $y\,r\,v$ i $v\,s\,z$. Skoro tak, to $\langle u, v\rangle \in s \cdot r = r \cdot s$, więc $u\,r\,w$ i $w\,s\,v$ dla pewnego w. Z tego, że $x\,r\,u$ i $u\,r\,w$ mamy $x\,r\,w$ i podobnie $w\,s\,z$. Ale stąd już wynika $\langle x, z\rangle \in r \cdot s$.

310a: Relacja $\sim_n$ jest relacją równoważności, bo jest jądrem przekształcenia $\lambda f.\, f{\restriction}_{\{\,i \mid i \leq n\}}$.
A relacja $\sim_A$ dlatego, że jest iloczynem (niepustej) rodziny relacji równoważności.

310b: Jądro przekształcenia ma tyle klas abstrakcji, ile różnych wartości przyjmuje to przekształcenie. Dla $f \in \{0,1\}^\mathbb{N}$, obcięcie $f{\restriction}_{\{\,i \mid i \leq n\}}$ jest funkcją typu $\{\,i \mid i \leq n\} \to \{0,1\}$, a takich funkcji jest 2^{n+1}. Zatem relacja $\sim_n$ ma 2^{n+1} klas abstrakcji.

Niech teraz $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{N}$. Jeśli zbiór A jest skończony, to ma największy element $\max A$ i wtedy relacja $\sim_A$ to po prostu $\sim_{\max A}$, ma więc skończenie wiele klas. Jeśli natomiast A jest zbiorem nieskończonym, to $\sim_A$ jest relacją identycznościową i ma klasy jednoelementowe. Przypuśćmy bowiem, że $f \sim_A g$ i niech $n \in \mathbb{N}$. Istnieje takie $m \in A$, że $m \geq n$, a wtedy $f \sim_m g$, w szczególności $f(n) = g(n)$. Ponieważ n było dowolne, więc $f = g$.

314: Zbiór A jest mocy 1, bo jeśli jednym ze składników podziału $\mathbb{N}$ jest $\mathbb{N} - \{7\}$ to pozostałe składniki tworzą podział zbioru $\{7\}$. Oczywiście można to zrobić tylko na jeden sposób (bo składniki muszą być niepuste). Zbiór $\{7, 49\}$ można podzielić na dwa sposoby (jedna lub dwie składowe), zatem B jest mocy dwa. Natomiast zbiór C jest pusty (mocy 0), bo zawsze $0 \in [0]_r$.

315: Przyjmijmy następujące oznaczenia: niech $\mathcal{R}$ oznacza zbiór wszystkich podziałów zbioru $\mathbb{N}$, i niech $\mathcal{V}$ oznacza zbiór wszystkich podziałów $\mathbb{N}$, które są wyznaczone przez relacje różnorodne (tj. mają elementy dowolnej mocy skończonej). Dodatkowo niech $\mathcal{N}$ będzie zbiorem wszystkich podziałów zbioru liczb nieparzystych. Zbiór wszystkich różnorodnych relacji równoważności w $\mathbb{N}$ jest równoliczny z $\mathcal{V}$, wystarczy więc ustalić moc zbioru $\mathcal{V}$. Wiadomo, że zbiór wszystkich relacji równoważności w $\mathbb{N}$ (a zatem zbiór $\mathcal{R}$) jest mocy continuum (zadanie 311). Skoro $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{R}$, to moc zbioru $\mathcal{V}$ jest co najwyżej continuum.

Aby udowodnić, że $\mathcal{V}$ jest co najmniej mocy continuum, określimy różnowartościowe przekształcenie $F : \mathcal{N} \xrightarrow{1-1} \mathcal{V}$. To wystarczy, bo oczywiście $\overline{\overline{\mathcal{N}}} = \overline{\overline{\mathcal{R}}}$. Ustalmy jakiś podział P zbioru liczb parzystych, którego elementy są dowolnej mocy skończonej. Na przykład możemy przyjąć $P = \{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ gdzie do A_n należy $n+1$ kolejnych liczb parzystych, poczynając od najmniejszej liczby parzystej nie należącej do żadnego A_i dla $i < n$ (czyli $A_n = \{n(n+1) + 2i \mid i \leq n\}$). Funkcję F można teraz zdefiniować tak: dla $Q \in \mathcal{N}$ przyjmiemy $F(Q) = Q \cup P$.

316: Niech $\mathcal{V}$ oznacza zbiór relacji równoważności na $\mathbb{R}$, których wszystkie klasy abstrakcji mają skończoną nieparzystą liczbę elementów. Moc $\mathcal{V}$ jest ograniczona z góry przez $2^{\mathfrak{c}}$, ponieważ taka jest moc zbioru wszystkich relacji na $\mathbb{R}$.

Aby pokazać, że $2^{\mathfrak{c}}$ jest również ograniczeniem dolnym mocy $\mathcal{V}$, skonstruujemy funkcję różnowartościową f, której dziedziną jest zbiór potęgowy przedziału $(0,1)$, a której wartości są w zbiorze $\mathcal{V}$. Niech $T_a = \{a, a+1, a+2\}$. Dla dowolnego $A \subseteq (0,1)$, niech $f(A)$ będzie relacją wyznaczającą podział
$$P = \{T_a \mid a \in A\} \cup \{\{b\} \mid b \notin \bigcup_{a\in A} T_a\}.$$
Mamy tu trójelementowe zbiory T_a dla $a \in A$, a wszystkie pozostałe składowe podziału to singletony. Zatem $f(A) \in \mathcal{V}$, czyli f jest dobrze określona. Aby pokazać, że f jest różnowartościowa, weźmy dowolne $A_1 \neq A_2$. Bez straty ogólności możemy założyć, że istnieje $x \in A_1$ takie że $x \notin A_2$. W takim razie klasa abstrakcji x w relacji $f(A_1)$ to trójelementowy zbiór T_x, a w relacji $f(A_2)$ to singleton $\{x\}$. Stąd $f(A_1) \neq f(A_2)$, czyli funkcja f jest różnowartościowa. W takim razie moc $\mathcal{V}$ jest co najmniej taka jak moc zbioru potęgowego przedziału $(0,1)$, czyli $2^{\mathfrak{c}}$. Zatem moc $\mathcal{V}$ to $2^{\mathfrak{c}}$.

317: Ponieważ $\mathbb{R} \sim (\mathbb{N} \to \mathsf{P}(\mathbb{N}))$, na mocy zadania 166, więc wystarczy udowodnić, że jeśli $\mathbb{N} \to \mathsf{P}(\mathbb{N})$ jest sumą postaci $\bigcup\{\mathcal{F}_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ to co najmniej jeden ze zbiorów $\mathcal{F}_n$ jest mocy continuum. Wynika to natychmiast z zadania 90.

319a: Relacja $\approx_n$ to jądro takiego przekształcenia $\varphi_n : \mathcal{R} \to \mathsf{P}(\mathbb{N})$, że $\varphi_n(r) = [n]_r$ dla $r \in \mathcal{R}$.

319b: Dla zbioru $A = \{7\}$ relacja $\approx_A$ to relacja równoważności $\approx_7$. Jeśli zaś $B = \{0,1\}$, to relacja $\approx_B$ nie jest przechodnia, czyli nie jest to relacja równoważności. Istotnie, niech r będzie relacją równoważności wyznaczającą podział zbioru $\mathbb{N}$ na dwie składowe $\{0\}$ i $\mathbb{N} - \{0\}$, a relacja s niech wyznacza podział na składowe $\{1\}$ i $\mathbb{N} - \{1\}$. Wtedy $r \approx_B 1_{\mathbb{N}} \approx_B s$, bo $r \approx_0 1_{\mathbb{N}} \approx_1 s$, ale $r \not\approx_B s$.

319c: Szukana relacja r_0 nie istnieje, bo każda klasa abstrakcji jest niepusta. Jako relację r_1 wystarczy wziąć relację pełną, bo jest to jedyna taka relacja r, że $\varphi_0(r) = \mathbb{N}$. Jako r_2 można wziąć relację wyznaczającą podział $\mathbb{N}$ na składowe $\{1,2\}$ i $\mathbb{N} - \{1,2\}$. Wtedy $\varphi_0(r_2) = [0]_{r_2} = \mathbb{N} - \{1,2\}$. Drugą relacją z tej samej klasy abstrakcji $\approx_0$ jest relacja wyznaczająca podział $\{\{1\},\{2\},\mathbb{N}-\{1,2\}\}$. Nie ma innych relacji r, dla których $\varphi_0(r) = \mathbb{N} - \{1,2\}$, bo zbiór $\{1,2\}$ można podzielić tylko na dwa sposoby.

Szukana relacja r_3 nie istnieje. Dla dowolnej relacji $r \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ rozpatrzmy dopełnienie zbioru $[0]_r$. Jeśli jest ono puste lub jednoelementowe, to nie ma innej relacji równoważności wyznaczającej ten sam podział. Jeśli jest dwuelementowe, to są dwie takie relacje, bo są dwa sposoby podzielenia zbioru dwuelementowego. Jeśli dopełnienie $[0]_r$ ma co najmniej trzy elementy, to da się je podzielić na co najmniej 5 sposobów, a więc tę samą klasę abstrakcji zera będzie miało co najmniej 5 relacji równoważności.

338a: Tak. Jeśli $Z \neq Y$, na przykład $Z \not\subseteq Y$, to istnieje element $z \in Z$, który nie należy do Y. Wtedy $\{z\} R_Z \varnothing$, ale $\langle \{z\}, \varnothing \rangle \notin R_Y$. Zatem $R_Z \neq R_Y$.

338b: Nie. Zauważmy bowiem, że klasa abstrakcji $[Z]_{R_Z}$ to zawsze zbiór $\mathsf{P}(Z)$. Mamy bowiem $\langle X, Z \rangle \in R_Z$ wtedy i tylko wtedy, gdy $X \cup Z = Z$, czyli gdy $X \subseteq Z$. Rozpatrzmy teraz podział zbioru $\mathsf{P}(\mathbb{N})$ na dwie składowe: jedna z nich to zbiór $\{\varnothing, \{0\}, \{1\}\}$ a do drugiej należą wszystkie pozostałe podzbiory $\mathbb{N}$. Relacja równoważności wyznaczona przez ten podział nie jest postaci R_Z (a więc nie jest wartością funkcji f), bo żaden ze zbiorów naszego podziału nie jest postaci $\mathsf{P}(Z)$. Pierwszy dlatego, że ma 3 elementy, drugi dlatego, że nie należy do niego zbiór pusty.

342a: Symetria: Oczywista. Zwrotność: Jeśli x jest parzyste to $x - x = 0$, a zero jest podzielne przez k. Jeśli zaś x jest nieparzyste, to $x \cdot x \geq 0$, przy czym nierówność jest ostra bo $x \neq 0$.

Przechodniość: Niech $\langle x, y\rangle, \langle y, z\rangle \in \rho_k$. Wtedy x i z muszą być tej samej parzystości co y. Zatem wszystkie trzy liczby są parzyste albo wszystkie trzy są nieparzyste. W pierwszym przypadku mamy $x - z = (x - y) + (y - z)$. Suma liczb podzielnych przez k jest podzielna przez k, więc $\langle x, z\rangle \in \rho_k$. W drugim przypadku $x \cdot z = (x \cdot y) \cdot (y \cdot z) \cdot \frac{1}{y^2} > 0$ i też dobrze.

342b: Wszystkie klasy abstrakcji naszej relacji są nieskończone. Jeśli a jest liczbą nieparzystą, to $[a]_{\rho_k} = \{b \in \mathbb{Z} \mid b > 0\}$ albo $[a]_{\rho_k} = \{b \in \mathbb{Z} \mid b < 0\}$. A jeśli a jest parzyste, to wtedy mamy $[a]_{\rho_k} = \{a + nk \mid n \in \mathbb{Z}$ i nk jest parzyste$\}$. A więc nie ma klasy k-elementowej.

342c: Jeśli $k = 4$ to mamy 4 klasy abstrakcji:
- Klasę liczb nieparzystych dodatnich;
- Klasę liczb nieparzystych ujemnych;
- Klasę liczb podzielnych przez 4;
- Klasę liczb parzystych niepodzielnych przez 4.

W przypadku $k = 3$ jest pięć klas:
- Klasa liczb nieparzystych dodatnich;
- Klasa liczb nieparzystych ujemnych;
- Klasa liczb parzystych podzielnych przez 3;
- Klasa liczb parzystych dających resztę 1 z dzielenia przez 3;
- Klasa liczb parzystych dających resztę 2 z dzielenia przez 3.

343: Żadna z tych relacji nie jest relacją równoważności, bo żadna nie jest zwrotna. Z zadania 104 wynika, że $\varphi(f) = \varnothing$ dla pewnej funkcji f. Wtedy oczywiście $\langle f, f\rangle \notin r$. Mamy też $\varphi(f) \times \varphi(f) = \varnothing$, a skoro zbiór pusty nie jest relacją równoważności w $\mathbb{R}$, to $\langle f, f\rangle \notin s$.

344a: Nie. Jeśli $\mathrm{id}_{\mathbb{N}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jest funkcją identycznościową to zawsze $\Phi(\mathrm{id}_{\mathbb{N}})(A) = A$. Ale dla funkcji następnika s mamy także $\Phi(s)(A) = A$, dla dowolnego A. Istotnie,

$$\Phi(s)(A) = f^{-1}(\{s(n) \mid n \in A\}) = \{m \in \mathbb{N} \mid \exists n \in A\,(s(m) = s(n))\} = \\ = \{m \in \mathbb{N} \mid \exists n \in A\,(m = n)\} = A.$$

A więc $\Phi(\mathrm{id}_{\mathbb{N}}) = \Phi(s)$, chociaż $\mathrm{id}_{\mathbb{N}} \neq s$.

344b: Nie. Nietrudno zauważyć, że jeśli $A \neq \varnothing$, to także $f^{-1}(f(A)) \neq \varnothing$. Zatem na przykład funkcja stała $F : \mathsf{P}(\mathbb{N}) \to \mathsf{P}(\mathbb{N})$, określona warunkiem $F(A) = \varnothing$, nie jest wartością funkcji Φ.

344c: Zauważmy, że $\Phi^{-1}(\{\mathrm{id}_{\mathsf{P}(\mathbb{N})}\}) = \{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid \forall A \subseteq \mathbb{N}\,(f^{-1}(f(A)) = A)\}$. Natomiast warunek $\forall A \subseteq \mathbb{N}\,(f^{-1}(f(A)) = A)$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy f jest funkcją różnowartościową. Mamy bowiem $f^{-1}(f(A)) = \{m \in \mathbb{N} \mid \exists n \in A\,(f(n) = f(m))\}$. Dla różnowartościowej funkcji f, równość $f(n) = f(m)$ zachodzi tylko dla $n = m$ i mamy

$$f^{-1}(f(A)) = \{m \in \mathbb{N} \mid \exists n \in A\,(n = m)\} = A.$$

W przeciwnym razie $f(n) = f(m)$ dla pewnych $n \neq m$, więc $\{n\} \subsetneq \{n, m\} \subseteq f^{-1}(f(\{n\}))$. A zatem $\Phi^{-1}(\{\mathrm{id}_{\mathsf{P}(\mathbb{N})}\})$ to zbiór wszystkich funkcji różnowartościowych z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{N}$.

344d: Na początek zauważmy, że $n \in \Phi(f)(A)$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $f(n) \in f(A)$, czyli gdy $f(n) = f(m)$ dla pewnego $m \in A$. Przyjmując więc $r = \{\langle x, y\rangle \mid f(x) = f(y)\}$, łatwo otrzymujemy równoważność $n \in \Phi(f)(A) \;\Leftrightarrow\; \exists m \in A\,(n \in [m]_r)$, z której natychmiast wynika teza.

346a: Aby wykazać, że F jest różnowartościowa, załóżmy, że $F(R) = F(S)$ dla pewnych relacji R i S, i przypuśćmy, że mRn. Wtedy $F(R)(m, n) = |m - m| = 0$, bo zachodzi $mRm \wedge mRn$. A zatem $F(S)(m, n) = 0$, co oznacza, że istnieją takie x, y, że $|x - y| = 0$ oraz $mSx \wedge ySn$. Wtedy $x = y$, a zatem mSn z przechodniości. Pokazaliśmy więc, że $R \subseteq S$. Podobnie $S \subseteq R$, co oznacza, że $R = S$. Funkcja F nie jest surjekcją, ponieważ dla dowolnego $R \in \mathcal{R}$ i dowolnego $n \in \mathbb{N}$ mamy zawsze $F(R)(n, n) = 0$. Zatem np. funkcja stale równa 7 nie należy do $\mathrm{Rg}(F)$.

346b: (i) Przeciwobraz zbioru wszystkich funkcji stałych jest niepusty, bo $F(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ jest funkcją stale równą zero. (ii) Przeciwobraz zbioru wszystkich funkcji różnowartościowych jest pusty. żadna funkcja $F(R)$ nie jest różnowartościowa, bo zawsze $F(R)(2, 3) = F(R)(3, 2)$. (iii) Przeciwobraz zbioru wszystkich surjekcji jest niepusty, bo $F(\mathbf{1}_{\mathbb{N}})(m, 0) = |m - 0| = m$, dla dowolnego $m \in \mathbb{N}$ (gdzie $\mathbf{1}_{\mathbb{N}}$ jest relacją identycznościową), a więc $F(\mathbf{1}_{\mathbb{N}})$ jest na $\mathbb{N}$.

353: Każdemu wielomianowi f można przypisać funkcję $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, która liczbie n przypisuje współczynnik wielomianu f przy x^n. A więc zbiór wszystkich wielomianów jest mocy co najwyżej takiej jak zbiór $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, czyli $\mathfrak{C}^{\aleph_0} = \mathfrak{C}$. Ponieważ zbiór wszystkich wielomianów stałych jest mocy $\mathfrak{C}$, więc zbiór wszystkich wielomianów jest też mocy $\mathfrak{C}$. Stąd od razu wynika, że każda klasa abstrakcji relacji r i zbiór wszystkich klas są mocy co najwyżej $\mathfrak{C}$.

Niech $f = a_n x^n + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$. Do klasy $[f]_r$ należą wszystkie wielomiany majace postać $f = a_n x^n + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + b$, gdzie b jest dowolną liczbą rzeczywistą. Zatem klasa $[f]_r$ jest co najmniej (a więc dokładnie) mocy $\mathfrak{C}$.

Dla $a \neq b$ wielomiany ax^3 i bx^3 nie są w relacji, bo ich różnica jest stopnia 3. Zatem zbiór klas abstrakcji też jest mocy $\mathfrak{C}$.

355a: Relacja r jest jądrem przekształcenia $\lambda f.\, f(\mathbb{N})$.

355b: Funkcja stale równa 1 to jedyna funkcją, której zbiorem wartości jest $\{1\}$. Zatem $[\lambda x\, 1]_r = \{\lambda x\, 1\}$. Natomiast $\mathrm{id}_{\mathbb{N}}(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$, więc $[\mathrm{id}_{\mathbb{N}}]_r$ to zbiór wszystkich funkcji na $\mathbb{N}$.

355c: Nie, bo np. funkcja $\lambda n.\, 2n$ jest różnowartościowa a nie jest w relacji z $\mathrm{id}_{\mathbb{N}}$.

355d: Przypuśćmy, że $[f]_r = \{f, g\}$ dla pewnych $f \neq g$. Wtedy $f(n) \neq g(n)$, dla pewnego n, przypuśćmy więc, że $f(n) = a$ i $g(n) = b$, przy tym $a \neq b$. Dla pewnego m mamy też $f(m) = b$. Weźmy teraz takie k, że $k \neq m, n$, na przykład $k = m + n + 1$. Określimy nową funkcję $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Jeżeli $f(k) = a$, to niech $h(m) = a$, $h(k) = b$. Jeżeli $f(k) = b$, to niech $h(m) = b$, $h(k) = a$. Jeżeli natomiast $f(k) \neq a, b$ to przyjmijmy $h(m) = f(k)$ i $h(k) = b$. Dla pozostałych $x \in \mathbb{N}$ niech $h(x) = f(x)$. Wtedy $h(\mathbb{N}) = f(\mathbb{N})$ oraz w każdym przypadku $h(y) \neq f(y)$ dla przynajmniej jednego y. Na dodatek $h(n) \neq g(n)$, więc $h \neq f, g$ i $h \in [f]_r$. A zatem nasza klasa ma trzeci element.

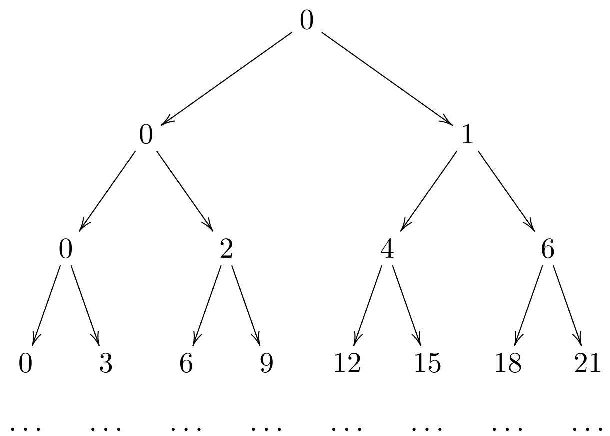
355e: Oczywiście nie, bo jest nieskończenie wiele niepustych podzbiorów $\mathbb{N}$, a każdy z nich jest zbiorem wartości pewnej funkcji.

359: Funkcja przypisująca każdej liczbie n jej klasę abstrakcji $[n]_r$ jest na $\mathbb{N} - \{0\}/r$, więc zbiór ilorazowy jest mocy co najwyżej $\aleph_0$. Wystarczy więc sprawdzić, że nasz zbiór jest mocy co najmniej $\aleph_0$, czyli że istnieje nieskończenie wiele klas abstrakcji. Tak jest, bo każda liczba pierwsza wyznacza inną klasę abstrakcji, więc zbiór klas abstrakcji relacji r jest mocy $\aleph_0$.

360: Ponieważ $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ jest mocy continuum, więc wystarczy udowodnić, że zbiór klas abstrakcji jest mocy co najmniej continuum. W tym celu, dla dowolnego $b : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ określimy ciąg $f_b : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ wzorem

$$f_b(n) = n \cdot \sum_{k=0}^{n-1} b(k) \cdot 2^{n-1-k}$$

Ciągi f_b to ciągi etykiet wierzchołków leżących na nieskończonych gałęziach drzewa na rysunku 5.



Rysunek 5: Zadania 360 i 367c.

Jeśli ciągi b i c są różne, to niech n będzie najmniejszą taką liczbą, że $b(n) \neq c(n)$, na przykład niech $b(n) < c(n)$. Dla $m \geq n$ mamy wtedy $f_c(m) - f_b(m) \geq m$. Mamy więc rodzinę funkcji f_b, która jest mocy continuum, i której każdy element wyznacza inną klasę abstrakcji.

361: Funkcja f może przyjąć co najwyżej $\aleph_0$ różnych wartości, bo taka jest moc jej przeciwdziedziny $\mathbb{N}$. Zatem $\aleph_0$ jest ograniczeniem górnym mocy A. Ponadto f jest „na" $\mathbb{N}$, bo $f(\{n\}) = n$ dla każdego n, więc poszukiwana moc jest także z dołu ogranniczona przez moc $\mathbb{N}$. A więc $\overline{\overline{A}} = \aleph_0$.

362a: Relacja r jest jądrem przekształcenia $\lambda f.\, f^{-1}(\mathcal{P}\mathrm{r})$.

362b: Ponieważ $(\lambda x\, 2)^{-1}(\mathcal{P}\mathrm{r}) = \{y : \mathbb{N} \mid 2 \in \mathcal{P}\mathrm{r}\} = \mathbb{N}$, więc klasa $[\lambda x\, 2]_r$ składa się ze wszystkich tych funkcji g, które przyjmują wyłącznie wartości parzyste:

$$[\lambda x\, 2]_r = \{g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid g^{-1}(\mathcal{P}\mathrm{r}) = \mathbb{N}\} = \{g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid \forall n{:}\mathbb{N}.\, g(n) \in \mathcal{P}\mathrm{r}\}.$$

Ponieważ $\mathrm{id}_{\mathbb{N}}^{-1}(\mathcal{P}\mathrm{r}) = \{n : \mathbb{N} \mid n \in \mathcal{P}\mathrm{r}\} = \mathcal{P}\mathrm{r}$, więc klasa $[\mathrm{id}_{\mathbb{N}}]_r$ składa się ze wszystkich funkcji, które przyjmują wartości parzyste dla parzystych argumentów i nieparzyste dla nieparzystych:

$$[\mathrm{id}_{\mathbb{N}}]_r = \{g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid g^{-1}(\mathcal{P}\mathrm{r}) = \mathcal{P}\mathrm{r}\} = \{g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid \forall n{:}\mathbb{N}\, (n \in \mathcal{P}\mathrm{r} \iff g(n) \in \mathcal{P}\mathrm{r})\}.$$

362c: Nie, bo funkcja f, która każdej liczbie parzystej x przypisuje $x+1$, a każdej nieparzystej y przypisuje $y-1$, jest „na", ale nie jest w relacji z $\mathrm{id}_{\mathbb{N}}$. Istotnie, $f^{-1}(\mathcal{P}\mathrm{r}) = \mathbb{N} - \mathcal{P}\mathrm{r}$ i $\mathrm{id}_{\mathbb{N}}^{-1}(\mathcal{P}\mathrm{r}) = \mathcal{P}\mathrm{r}$.

362d: Niech $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ będzie dowolną funkcją i niech $f' : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ będzie takie, że $f'(0) = f(0) + 2$ oraz $f'(x) = f(x)$ dla $x \neq 0$. Wtedy $f \neq f'$ ale przeciwobrazy zbioru $\mathcal{P}\mathrm{r}$ przy f i przy f' są takie same, czyli $f\, r\, f'$. A więc każda klasa ma co najmniej dwa elementy.

363: Oczywiście moc ilorazu $\mathsf{P}(\mathbb{N}\times\mathbb{N})/_R$ jest co najwyżej równa mocy zbioru $\mathsf{P}(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$, czyli continuum. Pokażemy, że moc tego zbioru jest też większa lub równa continuum. Określimy pomocniczą funkcję $p : \mathsf{P}(\mathbb{N} - \{0\}) \to \mathsf{P}(\mathsf{P}(\mathbb{N}))$, która każdemu podzbiorowi $A \subseteq \mathbb{N} - \{0\}$ przyporządkowuje pewien podział $\mathbb{N}$. Zrobimy to tak, żeby dla dowolnego $m \neq 0$ zachodziła równoważność

$$m \in A \qquad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \qquad \text{w } p(A) \text{ jest zbiór } m\text{-elementowy}.$$

Na przykład, dla $A = \{2,3,6\}$ możemy przyjąć $p(A) = \{\{0,1\},\{2,3,4\},\{5,6,7,8,9,10\},\{11,12,\ldots\}\}$, a jeśli A jest zbiorem wszystkich liczb nieparzystych, to $p(A) = \{\{0\},\{1,2,3\},\{4,5,6,7,8\},\ldots\}$.

Konkretna definicja funkcji p może być taka: Jeśli A jest nieskończony i $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$, gdzie $a_1 < a_2 < a_2 < \ldots$, to $p(A)$ jest następującym podziałem $\mathbb{N}$:

$$p(A) = \{\{0,1,\ldots,a_1-1\},\{a_1, a_1+1,\ldots,a_1+a_2-1\},\ldots\}.$$

Jeśli $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$ jest zbiorem skończonym, gdzie $a_1 < a_2 < a_2 < \ldots < a_n$, to

$$p(A) = \{\{0,1,\ldots,a_1-1\},\{a_1,a_1+1,\ldots,a_1+a_2-1\},\ldots,$$
$$\{\Sigma_{k=1}^{n-1} a_k, \ldots\ldots, (\Sigma_{k\in A} a_k) - 1\},\ \{\Sigma_{k\in A} a_k, (\Sigma_{k\in A} a_k)+1,\ldots\}\}.$$

Oznaczmy przez $F(A)$ relację równoważności wyznaczoną przez podział $p(A)$. Z powyższego wynika, że $m \in A$ wtedy i tylko wtedy, gdy relacja równoważności $F(A)$ wyznaczona przez podział $p(A)$ ma m-elementową klasę abstrakcji. Pokażemy teraz, że jeśli $A \neq B$, to $\langle F(A), F(B)\rangle \notin R$. Niech $A \neq B$. Wtedy istnieje takie m, że $m \in A$ i $m \notin B$ (lub odwrotnie), a więc relacja $F(A)$ ma klasę abstrakcji mocy m, a relacja $F(B)$ takiej klasy nie ma. Jeśli $\pi : \mathbb{N} \xrightarrow[\text{na}]{1-1} \mathbb{N}$ jest taką bijekcją, że

$$\langle a,b\rangle \in F(A) \leftrightarrow \langle \pi(a), \pi(b)\rangle \in F(B),$$

to obrazem klasy abstrakcji mocy m jest również klasa abstrakcji mocy m. Zatem taka bijekcja nie istnieje. Wnioskujemy stąd, że $\langle F(B), F(B)\rangle \notin R$, czyli $[F(A)]_R \neq [F(B)]_R$. Mamy więc różnowartościową funkcję $G : \mathsf{P}(\mathbb{N} - \{0\}) \to \mathsf{P}(\mathbb{N}\times\mathbb{N})/_R$ daną wzorem $G(A) = [F(A)]_R$. Zatem moc ilorazu jest co najwyżej $\mathfrak{C}$ i z twierdzenia Cantora-Bernsteina otrzymujemy wniosek, że $\overline{\overline{\mathsf{P}(\mathbb{N}\times\mathbb{N})/_R}} = \mathfrak{C}$.

364a: Nie. Dla każdego $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ klasa $[\varphi]_\equiv$ jest nieskończona. Wynika to z tego, że dla każdego $k \in \mathbb{N}$ funkcja $\varphi_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ określona wzorem $\varphi_k(n) = \langle \pi_1(\varphi(n)) + k, \pi_2(\varphi(n)) + k\rangle$ jest w relacji $\equiv$ z funkcją φ. Rzeczywiście, mamy tutaj dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ zależność

$$\pi_1(\varphi(n)) - \pi_2(\varphi(n)) = \pi_1(\varphi(n)) + k - (\pi_2(\varphi(n)) + k) = \pi_1(\varphi_k(n)) - \pi_2(\varphi_k(n)).$$

364b: Tak. Określimy $f : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to [\lambda n.\langle 0,n\rangle]_\equiv$ wzorem $f(\psi) = \lambda n.\langle \psi(n), \psi(n)+n\rangle$. Zauważmy, że rzeczywiście $f(\psi) \in [\lambda n.\langle 0,n\rangle]_\equiv$ dla każdego ψ. Mamy bowiem dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$:

$$\pi_1(f(\psi)(n)) - \pi_2(f(\psi)(n) = \psi(n) - (\psi(n)+n) = -n = 0 - n = \pi_1(\langle 0,n\rangle) - \pi_2(\langle 0,n\rangle).$$

Pokażemy teraz, że f jest bijekcją. Funkcja f jest różnowartościowa, ponieważ dla różnych $\psi_1, \psi_2 \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ istnieje takie $n \in \mathbb{N}$, że $\psi_1(n) \neq \psi_2(n)$. Zatem pierwsze współrzędne par $f(\psi_1)(n)$ i $f(\psi_2)(n)$ są różne.

Funkcja f jest „na", gdyż dowolne $\psi \in [\lambda n.\langle 0, n\rangle]_\equiv$ da się przedstawić w postaci $f(\psi_0)$, gdzie $\psi_0 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jest dana wzorem $\psi_0(n) = \pi_1(\psi(n))$. Skoro f jest bijekcją, to klasa $[\lambda n.\langle 0, n\rangle]_\equiv$ jest równoliczna z $\mathbb{N}^\mathbb{N}$.

364c: Nie. Gdyby klasa $[\lambda n.\langle 2011, 2011\rangle]_\equiv$ była równoliczna ze zbiorem $\mathbb{N}$, to istniałaby bijekcja $f_1 : [\lambda n.\langle 2011, 2011\rangle]_\equiv \xrightarrow[\text{na}]{1-1} \mathbb{N}$. Rozpatrzmy zbiór $A = \{\sigma_B : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid B \subseteq \mathbb{N}\}$, gdzie

$$\sigma_B(n) = \begin{cases} \langle 1, 1\rangle, & \text{gdy } n \in B, \\ \langle 0, 0\rangle & \text{gdy } n \notin B. \end{cases}$$

Po pierwsze zauważmy, że A jest równoliczne z $\mathsf{P}(\mathbb{N})$. Świadczy o tym bijekcja $f_0 : \mathsf{P}(\mathbb{N}) \to A$ określona wzorem $f_0(B) = \sigma_B$. Ta funkcja jest „na", gdyż dowolna funkcja σ_B jest otrzymywana jako $f_0(B)$, i jest różnowartościowa, ponieważ dla dwóch różnych $B_1, B_2 \subseteq \mathbb{N}$ mamy

$$\sigma_{B_i}(n_0) = \langle 1, 1\rangle \neq \langle 0, 0\rangle = \sigma_{B_{3-i}}(n_0), \text{ o ile } n_0 \in B_i \text{ i } n_0 \notin B_{3-i}.$$

Po drugie zauważmy, że $A \subseteq [\lambda n.\langle 2011, 2011\rangle]_\equiv$, bo dla każdego B oraz n:

$$\pi_1(\sigma_B(n)) - \pi_2(\sigma_B(n)) = c-c = 0 = 2011-2011 = \pi_1((\lambda n.\langle 2011, 2011\rangle)n) - \pi_2((\lambda n.\langle 2011, 2011\rangle)n),$$

gdzie $c = 0$ lub $c = 1$. A zatem klasa $[\lambda n.\langle 2011, 2011\rangle]_\equiv$ ma nieprzeliczalny podzbiór A, którego obraz $f_1(A)$ jest zawarty w $\mathbb{N}$, a więc przeliczalny. To niemożliwe, bo funkcja f_1 jest różnowartościowa.

364d: Tak. Pokażemy najpierw, że zbiór $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})^\mathbb{N}/_\equiv$ jest równoliczny z $\mathbb{Z}^\mathbb{N}$. W tym celu zdefiniujemy funkcję $f : \mathbb{Z}^\mathbb{N} \to (\mathbb{N} \times \mathbb{N})^\mathbb{N}/_\equiv$ w ten sposób, że $f(\psi) = [\varphi_\psi]_\equiv$, gdzie $\varphi_\psi(n) = \langle |\psi(n)|, |\psi(n)| - \psi(n)\rangle$. Funkcja f jest różnowartościowa. Rzeczywiście, niech $\psi_1, \psi_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ będą różne. Wtedy istnieje takie $n \in \mathbb{N}$, że $\psi_1(n) \neq \psi_2(n)$. Stąd wynika, że $\varphi_{\psi_1} \not\equiv \varphi_{\psi_2}$, czyli $f(\psi_1) \neq f(\psi_2)$. Istotnie, dla dowolnego n:

$$\pi_1(\varphi_{\psi_1}(n)) - \pi_2(\varphi_{\psi_1}(n)) = |\psi_1(n)| - (|\psi_1(n)| - \psi_1(n)) = \psi_1(n) \neq$$
$$\neq \psi_2(n) = |\psi_2(n)| - (|\psi_2(n)| - \psi_2(n)) = \pi_1(\varphi_{\psi_2}(n)) - \pi_2(\varphi_{\psi_2}(n)).$$

Funkcja f jest „na". Rzeczywiście, jeśli dla klasy abstrakcji $[\sigma]_\equiv$ określimy funkcję $\psi^\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ wzorem $\psi^\sigma(n) = \pi_1(\sigma(n)) - \pi_2(\sigma(n))$, to $f(\psi^\sigma) = [\sigma]_\equiv$. Wystarczy udowodnić, że $\varphi_{\psi^\sigma} \equiv \sigma$. Dla $n \in \mathbb{N}$:

$$\pi_1(\varphi_{\psi^\sigma}(n)) - \pi_2(\varphi_{\psi^\sigma}(n)) = |\psi^\sigma(n)| - (|\psi^\sigma(n)| - \psi^\sigma(n)) = \psi^\sigma(n) = \pi_1(\sigma(n)) - \pi_2(\sigma(n)).$$

Jak wiadomo $\mathbb{Z}$ jest równoliczne z $\mathbb{N}$, więc równoliczne są także zbiory $\mathbb{Z}^\mathbb{N}$ i $\mathbb{N}^\mathbb{N}$. A zatem iloraz $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})^\mathbb{N}/_\equiv$ jest równoliczny z $\mathbb{N}^\mathbb{N}$.

365a: Relacja jest zwrotna, bo $A \dot{-} A = \varnothing$, a zbiór pusty jest zawarty w każdym kole. Symetria jest oczywista z definicji. Przechodniość wynika natychmiast z zawierania $(A \dot{-} C) \subseteq (A \dot{-} B) \cup (B \dot{-} C)$ i z tego, że dwa dowolne koła zmieszczą się zawsze w jednym większym.

365b: Weźmy dowolny zbiór $A \subseteq \mathbb{R}^2$ i dowolne koło K. Jeśli teraz $L \subseteq K$, to zbiór $(A - K) \cup L$ jest w relacji z A, bo $A \dot{-} ((A - K) \cup L) \subseteq K$. Co więcej, każdy ze zbiorów $(A - K) \cup L$ jest inny, czyli mamy różnowartościową funkcję z $\mathsf{P}(K)$ do $[A]_r$. Zatem moc klasy $[A]_r$ jest co najmniej taka jak moc $\mathsf{P}(K)$, czyli $2^\mathfrak{c}$. Ponieważ $[A]_r \subseteq \mathsf{P}(\mathbb{R}^2)$, a zbiór $\mathsf{P}(\mathbb{R}^2)$ też jest mocy $2^\mathfrak{c}$, więc moc $[A]_r$ jest równa $2^\mathfrak{c}$.

365c: Ponieważ funkcja $\lambda X.\, [X]_r : \mathsf{P}(\mathbb{R}^2) \to \mathsf{P}(\mathbb{R}^2)/_r$ jest „na", więc moc zbioru $\mathsf{P}(\mathbb{R}^2)/_r$ jest mniejsza lub równa $2^\mathfrak{c}$. Aby pokazać równość, określimy $\Xi : \mathsf{P}(\mathbb{R}) \xrightarrow{1-1} \mathsf{P}(\mathbb{R}^2)/_r$ wzorem $\Xi(X) = [X \times \mathbb{R}]_r$. Funkcja Ξ jest różnowartościowa, bo jeśli $X_1 \neq X_2$, np. $d \in X_1 \dot{-} X_2$, to zbiór $(X_1 \times \mathbb{R}) \dot{-} (X_2 \times \mathbb{R})$ zawiera całą prostą o równaniu $x = d$ i nie zmieści się w żadnym kole. A więc $\Xi(X_1) \neq \Xi(X_2)$.

366a: Niech $\mathbb{N}^\bullet = \mathbb{N} \cup \{\aleph_0\}$. Nasza relacja jest jądrem przekształcenia $\Psi : \mathsf{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}^\bullet \times \mathbb{N}^\bullet$ określonego tak: $\Psi(X) = \langle \overline{\overline{X \cap \mathcal{P}\mathrm{r}}}, \overline{\overline{X \cap \mathcal{N}\mathrm{p}}}\rangle$. A każde jądro jest relacją równoważności.

366b: Klasy abstrakcji jądra to niepuste przeciwobrazy zbiorów jednoelementowych. Rozpatrzmy więc wszystkie przeciwobrazy postaci $\Psi^{-1}(\{\langle \alpha, \beta\rangle\}) = \{X \mid \Psi(X) = \langle \alpha, \beta\rangle\}$, gdzie $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^\bullet$. Jeśli $\alpha = \beta = 0$, to $\Psi^{-1}(\{\langle \alpha, \beta\rangle\}) = \{\varnothing\}$, tylko bowiem zbiór pusty ma zeroelementowe przecięcie zarówno ze zbiorem $\mathcal{P}\mathrm{r}$ jak i ze zbiorem $\mathcal{N}\mathrm{p}$. Niech $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$, oraz $\alpha \neq 0$. Jeśli $X \in \Psi^{-1}(\{\langle \alpha, \beta\rangle\})$, to $X = (X \cap \mathcal{P}\mathrm{r}) \cup (X \cap \mathcal{N}\mathrm{p})$ musi być $(\alpha + \beta)$-elementowym zbiorem skończonym. Ponieważ wszystkich skończonych podzbiorów $\mathbb{N}$ jest przeliczalnie wiele, więc także klasa $[X]_r$ jest przeliczalna. Pozostaje zauważyć, że jest to klasa nieskończona (a więc dokładnie mocy $\aleph_0$), bo należą do niej zbiory $X_n = \{2i \mid i < \alpha - 1\} \cup \{2i + 1 \mid i < \beta\} \cup \{2\alpha + 2n\}$, które są różne dla różnych n. Podobnie jest, gdy $\beta \neq 0$. Niech teraz $\alpha = \aleph_0$. Ustalmy jakiś podzbiór $B \subseteq \mathcal{N}\mathrm{p}$, który jest mocy β. Do klasy $\Psi^{-1}(\{\langle \aleph_0, \beta\rangle\})$ należą więc wszystkie zbiory postaci $A \cup B$, gdzie A jest dowolnym nieskończonym podzbiorem liczb parzystych. Rodzina wszystkich nieskończonych podzbiorów zbioru $\mathcal{P}\mathrm{r}$ jest równoliczna z rodziną wszystkich nieskończonych podzbiorów zbioru $\mathbb{N}$ i ma moc $\mathfrak{C}$. Zatem nasza klasa ma co najmniej moc continuum. Także co najwyżej continuum, bo tyle tylko jest wszystkich podzbiorów $\mathbb{N}$. Podobnie w przypadku $\beta = \aleph_0$ dla dowolnego α otrzymujemy moc continuum. Są więc tylko trzy możliwe moce klas abstrakcji: 1, $\aleph_0$ i $\mathfrak{C}$.

366c: Z powyższego wynika, że wszystkie przeciwobrazy $\Psi^{-1}(\{\langle\alpha,\beta\rangle\})$ są niepuste. Zatem moc zbioru klas abstrakcji jest taka sama jak moc przeciwdziedziny naszej funkcji Ψ, czyli moc zbioru $\mathbb{N}^\bullet \times \mathbb{N}^\bullet$. A ponieważ $\mathbb{N}^\bullet \sim \mathbb{N}$ więc otrzymujemy $\aleph_0^2 = \aleph_0$.

367a: Tak, ta klasa jest równoliczna z $\mathbb{R}$. Przyjmijmy oznaczenie $V = [\{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}]_\simeq$. Ponieważ V jest podzbiorem $\mathbb{Q}^\mathbb{N}$, więc $\overline{\overline{V}} \leq \overline{\overline{\mathbb{Q}^\mathbb{N}}} = \overline{\overline{\mathbb{R}}}$. Aby udowodnić nierówność $\overline{\overline{\mathbb{R}}} \leq \overline{\overline{V}}$ określimy funkcję różnowartościową $G : \mathbb{R} \to V$. W tym celu zauważmy, że każda liczba rzeczywista r jest granicą pewnego ciągu $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ liczb wymiernych różnych od zera. Istotnie, niech r'_n będzie obcięciem dziesiętnej reprezentacji liczby r do n najbardziej znaczących cyfr po przecinku. Wtedy możemy przyjąć $r_n = \mathsf{if}\ r'_n \neq 0\ \mathsf{then}\ r'_n\ \mathsf{else}\ \frac{1}{n}$. Teraz niech $G(r)(n) = r_n/n$. Z własności działań na ciągach wynika, że granica ciągu $G(r)$ jest równa 0, zaś wyrazy jego są niezerowe, bo r_n są niezerowe. Co więcej, $\lim_{n\to\infty} \frac{r_n}{n}/\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} r_n = r$, a zatem $\{r_n/n\}_{n\in\mathbb{N}} \simeq \{1/n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Zatem funkcja G przyjmuje wartości wyłącznie w V.

Pozostaje sprawdzić, że funkcja G jest różnowartościowa. Jeśli $r \neq s$, to ciągi $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ są różne, bo mają różne granice. Zatem ciągi $\{r_n/n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i $\{s_n/n\}_{n\in\mathbb{N}}$ też są różne, czyli $G(r) \neq G(s)$. A więc funkcja G rzeczywiście jest różnowartościowa. Skoro $\overline{\overline{V}} \leq \overline{\overline{\mathbb{R}}}$ i $\overline{\overline{\mathbb{R}}} \leq \overline{\overline{V}}$, to z twierdzenia Cantora-Bernsteina wynika $\mathcal{R} \sim \mathbb{N}$.

Inny sposób: Określmy funkcję $H : V \xrightarrow{\text{na}} \mathbb{R}$, przyjmując $H(f) = \lim_{n\to\infty}(n \cdot f(n))$. Funkcja H jest na $\mathbb{R}$ (skąd $\overline{\overline{\mathbb{R}}} \leq \overline{\overline{V}}$), bo dla każdej liczby rzeczywistej r mamy $r = H(\{\frac{r_n}{n}\}_{n\in\mathbb{N}})$.

367b: Zauważmy, że rozwiązanie zadania 367a nie wykorzystywało żadnych specyficznych własności ciągu $\{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$. Można zatem pokazać, że każda klasa abstrakcji jest równoliczna z $\mathbb{R}$, a więc dowolne dwie klasy są równoliczne.

367c: Pokażemy najpierw, że $\overline{\overline{U/_\simeq}} \leq \overline{\overline{\mathbb{R}}}$. Dowolna funkcja wyboru $F : U/_\simeq \to U$ jest różnowartościowa, bo klasy abstrakcji są niepuste i parami rozłączne. Ponieważ $U \subseteq \mathbb{Q}^\mathbb{N}$, więc $\overline{\overline{U/_\simeq}} \leq \overline{\overline{U}} = \overline{\overline{\mathbb{Q}^\mathbb{N}}} = \overline{\overline{\mathbb{R}}}$. Zaobserwujmy teraz, że dla dowolnej liczby dodatniej r granica $\lim_{n\to\infty} 1/n^{r_n}$ istnieje i jest równa 0. W dodatku ciąg $\{1/n^{r_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ nigdzie nie przyjmuje wartości zero. Zatem każdy ciąg postaci $\{1/n^{r_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ należy do U. Ponieważ dla $r > s$ mamy

$$\lim_{n\to\infty}(1/n^{r_n})/(1/n^{s_n}) = \lim_{n\to\infty} n^{s_n}/n^{r_n} = \lim_{n\to\infty} n^{s_n - r_n} = 0,$$

więc do relacji $\simeq$ nie należy żadna para ciągów $\{1/n^{r_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ i $\{1/n^{s_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$, gdzie $r \neq s$. A więc funkcja $G : \mathbb{R} \to U_\simeq$, określona przez $G(r) = [\{1/n^{r_n}\}_{n\in\mathbb{N}}]_\simeq$, jest różnowartościowa. Stąd $\overline{\overline{\mathbb{R}}} \leq \overline{\overline{U}}/_\simeq$. Wiemy już, że $\overline{\overline{U/_\simeq}} \leq \overline{\overline{\mathbb{R}}}$, więc z twierdzenia Cantora-Bernsteina wynika, że $U/_\simeq \sim \mathbb{R}$.

Inny sposób: Zbiór wszystkich wierzchołków nieskończonego pełnego drzewa binarnego jest mocy $\aleph_0$, można więc jego wierzchołki ponumerować liczbami naturalnymi, np. tak, jak na rysunku 5. Ale zbiór $\mathcal{G}$ wszystkich nieskończonych gałęzi tego drzewa jest równoliczny ze zbiorem $\mathbb{N} \to \{0,1\}$ wszystkich nieskończonych ciągów zerojedynkowych, czyli jest tej samej mocy, co $\mathbb{R}$.

Niech A_α oznacza zbiór numerów tych wierzchołków, które należą do gałęzi α. Ważne jest to, że dla różnych gałęzi α i β, obie różnice $A_\alpha - A_\beta$ i $A_\beta - A_\alpha$ są nieskończone.

Dla $\alpha \in \mathcal{G}$ zdefiniujmy funkcje $f_\alpha = \lambda n.\,\mathsf{if}\ n \in A_\alpha\ \mathsf{then}\ 1\ \mathsf{else}\ 2$. Dla różnych gałęzi α, β, iloraz $f_\alpha(n)/f_\beta(n)$ przyjmuje dla nieskończenie wielu n wartość $\frac{1}{2}$ i dla nieskończenie wielu n wartość 2. Granica tego ilorazu nie istnieje, a zatem funkcje f_α i f_β wyznaczają różne klasy abstrakcji. W ten sposób wyznaczyliśmy funkcję różnowartościową $\lambda\alpha.\,f_\alpha : \mathcal{G} \to U/_\simeq$. Mamy zatem $\overline{\overline{\mathbb{R}}} = \overline{\overline{\mathcal{G}}} \leq \overline{\overline{U/_\simeq}}$, co łącznie z początkową obserwacją $\overline{\overline{U/_\simeq}} \leq \overline{\overline{\mathbb{R}}}$ daje $\overline{\overline{U/_\simeq}} = \overline{\overline{\mathbb{R}}}$ na mocy twierdzenia Cantora-Bernsteina.

368: Relacja r_A jest jądrem przekształcenia $\Psi_A : (\mathbb{N} \to \mathbb{N}) \xrightarrow{\text{na}} (A \to \mathbb{N})$ określonego równaniem $\Psi_A(f) = f|_A$. Dlatego zbiór ilorazowy $(\mathbb{N} \to \mathbb{N})/_{r_A}$ jest równoliczny ze zbiorem wartości tej funkcji, czyli ze zbiorem $A \to \mathbb{N}$. Ten zbiór jest mocy $\aleph_0^\mathfrak{m}$, gdzie $\mathfrak{m} = \overline{\overline{A}}$. Konkretnie, dla $A = \varnothing$ mamy

$\aleph_0^{\mathfrak{m}} = \aleph_0^0 = 1$, dla A skończonego i niepustego zachodzi $\aleph_0^{\mathfrak{m}} = \aleph_0$, wreszcie dla nieskończonego A dostajemy $\aleph_0^{\mathfrak{m}} = \aleph_0^{\aleph_0} = \mathfrak{C}$.

Dla dowolnej funkcji f, klasa abstrakcji $[f]_{r_A}$ jest równoliczna ze zbiorem $(-A) \to \mathbb{N}$. Istotnie, mamy tu bijekcję $\Xi : ((-A) \to \mathbb{N}) \xrightarrow[\text{na}]{1-1} [f]_{r_A}$, która każdej funkcji $\alpha : (-A) \to \mathbb{N}$ przypisuje funkcję $\Xi(\alpha) = \lambda n.\,\text{if } n \in A \text{ then } f(n) \text{ else } \alpha(n)$. Oczywiście $\Xi(\alpha)|_A = f|_A$ i $\Xi(\alpha)|_{-A} = \alpha$, więc funkcja Ξ jest dobrze określona i różnowartościowa. Jest też surjekcją, bo jeśli $g \in [f]_{r_A}$, to $g = \Xi(g|_{-A})$. A zatem wszystkie klasy abstrakcji relacji r_A są tej samej mocy $\aleph_0^{\mathfrak{n}}$, gdzie $\mathfrak{n}$ jest mocą zbioru $-A$. Teraz dla $A = \mathbb{N}$ otrzymujemy 1, dla zbiorów koskończonych różnych od $\mathbb{N}$ mamy $\aleph_0$, a w pozostałych przypadkach continuum.

369a: Bo $r_A = \ker(\lambda f.\, f\lceil_A)$.

369b: Niech $\langle f, g\rangle \in r_{\bigcup \mathcal{S}}$. Aby pokazać, że $\langle f, g\rangle \in \bigcap\{r_A \mid A \in \mathcal{S}\}$, rozpatrzmy dowolny zbiór $A \in \mathcal{S}$ i dowolny jego element x. Ponieważ $A \in \mathcal{S}$, więc $x \in \bigcup \mathcal{S}$, skąd $f(x) = g(x)$. A skoro $A \in \mathcal{S}$ i $x \in A$ były dowolne, to udowodniliśmy, że $\langle f, g\rangle \in \bigcap\{r_A \mid A \in \mathcal{S}\}$, co kończy dowód inkluzji $\subseteq$. W przeciwną stronę załóżmy, że $\langle f, g\rangle \in \bigcap\{r_A \mid A \in \mathcal{S}\}$. Trzeba sprawdzić, czy $f(x) = g(x)$ dla każdego $x \in \bigcup \mathcal{S}$, weźmy więc dowolne takie x. Wtedy $x \in A$, dla pewnego $A \in \mathcal{S}$, więc równość $f(x) = g(x)$ wynika z tego, że $\langle f, g\rangle \in \bigcap\{r_A \mid A \in \mathcal{S}\} \subseteq r_A$.

369c: Z części 369a wynika, że zbiór ilorazowy relacji r_A jest równoliczny ze zbiorem wszystkich funkcji $A \to \mathbb{N}$, jeśli więc A jest k-elementowym zbiorem skończonym, to mamy $\aleph_0^k$ klas abstrakcji. Dla $k = 0$ (czyli $A = \varnothing$) jest jedna klasa, a dla $k > 0$ zbiór ilorazowy jest mocy $\aleph_0$. A jeśli A jest zbiorem nieskończonym, to zbiór $A \to \mathbb{N}$ też jest nieskończony, więc żadna relacja r_A nie ma dokładnie sześciu klas.

369d: Relacja $r_{\mathbb{R}}$ to relacja identycznościowa, więc wszystkie jej klasy są jednoelementowe. Żadna z relacji r_A nie ma klas sześcioelementowych. Jeśli $A \neq \mathbb{R}$, to mamy liczbę a, która nie należy do A. Wtedy każda klasa $[f]_{r_A}$ jest nieskończona, bo należą do niej na przykład wszystkie funkcje postaci $f_k = \lambda x.\,\text{if } x = a \text{ then } k \text{ else } f(x)$. W szczególnym przypadku, gdy $A = \mathbb{R} - \{a\}$, to są w ogóle wszystkie funkcje w tej klasie, i wtedy mamy moc $\aleph_0$.

369e: Funkcja F jest różnowartościowa. Niech $A \neq B$, na przykład $a \in A - B$ i niech $\chi_{\{a\}}$ oznacza funkcję charakterystyczną singletona $\{a\}$. Wtedy $\langle \lambda x.\, 0, \chi_{\{a\}}\rangle \in r_B - r_A$. Ale ta funkcja nie jest surjekcją, bo istnieją relacje o sześciu klasach (por. 369c). Na przykład jądro operacji $\lambda f.\, f(0) \bmod 6$.

370a: Pokażemy, że relacja $\equiv$ jest jądrem przekształcenia $\Phi : (\mathbb{N} \to \mathbb{N}) \to \mathbb{N} \cup \{\omega\}$, gdzie

$$\Phi(f) = \begin{cases} \omega, & \text{jeśli } \mathrm{Rg}(f) \text{ jest nieskończony;} \\ \max \mathrm{Rg}(f), & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

(Ta funkcja jest dobrze określona, bo zbiór $\mathrm{Rg}(f)$ nigdy nie jest pusty.)
Pokażemy najpierw, że $f \nearrow g$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\Phi(f) \leq \Phi(g)$, gdzie porządek $\leq$ rozszerzamy do zbioru $\mathbb{N} \cup \{\omega\}$ w ten sposób, że $a \leq \omega$ dla dowolnego $a \in \mathbb{N} \cup \{\omega\}$.

Jeśli $\mathrm{Rg}(g)$ jest zbiorem nieskończonym, to $f \nearrow g$. Istotnie, dla dowolnego n, liczba $f(n)$ musi być mniejsza lub równa pewnemu elementowi zbioru $\mathrm{Rg}(g)$, inaczej cały ten zbiór byłby zawarty w skończonym odcinku początkowym $\mathcal{O}(f(n))$. Tak więc jeśli $\Phi(f) \leq \Phi(g) = \omega$, to $f \nearrow g$.

Jeśli z kolei $\Phi(f) \leq \Phi(g) = k \in \mathbb{N}$, czyli $\max \mathrm{Rg}(f) \leq \max \mathrm{Rg}(g) = k$, to $k = g(q)$ dla pewnego $q \in \mathbb{N}$ i wtedy dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ mamy $f(n) \leq \max \mathrm{Rg}(f) \leq g(q)$, a zatem $f \nearrow g$.

Na odwrót, załóżmy, że $f \nearrow g$. Jeśli $\mathrm{Rg}(g)$ jest nieskończone, to $\Phi(f) \leq \Phi(g) = \omega$. Jeśli natomiast $\mathrm{Rg}(g)$ jest skończone i $\max \mathrm{Rg}(g) = k \in \mathbb{N}$, to dla każdego $n \in \mathbb{N}$, $f(n) \leq k$, a zatem $\mathrm{Rg}(f)$ też jest skończone i w dodatku $\max \mathrm{Rg}(f) \leq k$, czyli $\Phi(f) \leq \Phi(g)$.

Skoro $f \equiv g$ oznacza $f \nearrow g$ i $g \nearrow f$, to oznacza to również, że $\Phi(f) = \Phi(g)$. A zatem relacja $\equiv$ jest jądrem przekształcenia Φ, a więc jest relacją równoważności.

370b: Zbiór ilorazowy naszej relacji jest równoliczny z $\mathrm{Rg}(\Phi) = \mathbb{N} \cup \{\omega\}$, więc ma moc $\aleph_0$.

370c: Zero jest największym elementem zbioru $\mathrm{Rg}(f)$ tylko w jednym przypadku, mianowicie dla funkcji $f = \lambda x.\, 0$. Zatem klasa $[\lambda x.\, 0]_\equiv$ ma moc jeden. Pozostałe klasy są mocy $\mathfrak{C}$. Oczywiście każda klasa jest co najwyżej mocy $\mathfrak{C}$, bo jest zawarta w zbiorze $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, należy więc wykazać, że każda klasa jest co najmniej tej mocy. Niech więc $f \neq \lambda x.\, 0$. Określmy funkcję $F : (\mathbb{N} \to \{0,1\}) \xrightarrow{1-1} [f]_\equiv$ przyjmując dla dowolnego $\alpha : \mathbb{N} \to \{0,1\}$ i dowolnego $k \in \mathbb{N}$:

$$F(\alpha)(2k) = \alpha(k), \qquad \text{oraz} \qquad F(\alpha)(2k+1) = f(k).$$

Sprawdźmy, czy funkcja F jest dobrze zdefiniowana. Zbiór wartości $F(\alpha)$ zawiera zbiór $\mathrm{Rg}(f)$, więc jeśli ten drugi jest nieskończony, to ten pierwszy też. W przeciwnym przypadku mamy nierówność $\max \mathrm{Rg}(F(\alpha)) \leq \max\{1, \max \mathrm{Rg}(f)\} = \max \mathrm{Rg}(f)$, bo f nie jest stale równa zeru.

Funkcja F jest oczywiście różnowartościowa: jeśli $\alpha \neq \beta$, to $\alpha(k) \neq \beta(k)$ dla pewnego k, a wtedy $F(\alpha)(2k) \neq F(\beta)(2k)$.

371a: Zwrotność i symetria wynikają wprost z definicji, zatem wystarczy pokazać, że r jest przechodnia. Zauważmy, że dla dowolnych n, m zachodzi równość

$$f^n \circ g^m = g^m \circ f^n. \tag{1}$$

Załóżmy, że $\langle x, y\rangle \in r$ i $\langle y, z\rangle \in r$. Wtedy istnieją takie n_1, m_1, n_2 i m_2, że:

$$f^{n_1}(g^{m_1}(x)) = f^{n_1}(g^{m_1}(y)) \tag{2}$$
$$f^{n_2}(g^{m_2}(y)) = f^{n_2}(g^{m_2}(z)). \tag{3}$$

Mamy więc nastepujące równości:

$$\begin{array}{lll}
 & f^{n_1+n_2}(g^{m_1+m_2}(x)) & \\
= & f^{n_2}(g^{m_2}(f^{n_1}(g^{m_1}(x)))) & (1)\\
= & f^{n_2}(g^{m_2}(f^{n_1}(g^{m_1}(y)))) & (2)\\
= & f^{n_1}(g^{m_1}(f^{n_2}(g^{m_2}(y)))) & (1)\\
= & f^{n_1}(g^{m_1}(f^{n_2}(g^{m_2}(z)))) & (3)\\
= & f^{n_1+n_2}(g^{m_1+m_2}(z)) & (1)
\end{array}$$

Wynika stąd, że $\langle x, z\rangle \in r$. Zatem r jest przechodnia.

371b: Załóżmy, że $r = \mathbf{1}_A$. Pokażemy, że f i g są różnowartościowe. Dla dowolnych $x, y \in A$, jeśli $f(x) = f(y)$, to $\langle x, y\rangle \in r$ i musi zachodzić $x = y$, bo $r = \mathbf{1}_A$. Zatem f jest różnowartościowa. Analogicznie g jest również różnowartościowa.

Dla dowodu w przeciwną stronę załóżmy, że f i g są różnowartościowe. Zauważmy, że wtedy wszystkie złożenia postaci $f^n \circ g^m$ też są różnowartościowe. Pokażemy, że $r = \mathbf{1}_A$. Niech $\langle x, y\rangle \in r$. Istnieją wtedy takie n i m, że $f^n(g^m(x)) = f^n(g^m(y))$. Wynika stąd, że $x = y$. Dowodzi to, że jeśli $\langle x, y\rangle \in r$, to $x = y$. Zatem $r = \mathbf{1}_A$.

371c: Niech $g = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$ i niech f będzie określona następująco:

$$f(n) = \begin{cases} p, & \text{jeśli } n = p^k, \text{ gdzie } p \text{ jest liczbą pierwszą i } k \in \mathbb{N} - \{0\};\\ n, & \text{w przeciwnym przypadku.}\end{cases}$$

Oczywiście $f \circ g = g \circ f$. Zauważmy, że jeśli p jest liczbą pierwszą i $k_1, k_2 \in \mathbb{N} - \{0\}$, to $\langle p^{k_1}, p^{k_2}\rangle \in r$. Wynika stąd, że klasa abstrakcji $[p]_r$ dla liczby pierwszej p jest nieskończona.

Jeśli p_1 i p_2 są różnymi liczbami pierwszymi, to $\langle p_1, p_2\rangle \notin r$, czyli $[p_1]_r \neq [p_2]_r$. Ponieważ istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych, więc r ma nieskończenie wiele nieskończonych klas abstrakcji.

372a: Zwrotność wynika wprost z definicji a symetria wynika z symetryczności relacji s. Pozostaje udowodnić przechodniość. Z założenia

$$\forall x\, y\, z\, [x\, r\, y \wedge x\, r\, z \Rightarrow y\, r\, z], \tag{1}$$

wynika, że relacja r ma takie własności:

$$x\, r\, y \Rightarrow y\, r\, y \quad \text{(stosujemy (1) dla } z = y) \tag{2}$$
$$x_0\, r\, x_1\, r\, x_2 \Rightarrow x_2\, r\, x_1 \quad \text{(stosujemy (1) do } r(x_1, x_2) \text{ i } r(x_1, x_1)) \tag{3}$$
$$x_0\, r\, x_1\, r\, x_2\, r\, x_3 \Rightarrow x_1\, r\, x_3 \quad \text{(stosujemy (1) do } r(x_2, x_1) \text{ i } r(x_2, x_3)). \tag{4}$$

Aby wykazać przechodniość relacji $\mathbf{1}_A \cup (s \cdot s \cdot s)$ udowodnimy, że $s \cdot s \cdot s \cdot s \subseteq s \cdot s \cdot s$. Zapiszmy $x\, r\, y$ jako $x \longrightarrow y$, a $x\, r^{-1}\, y$ jako $x \longleftarrow y$. Niech $x_0\, s\, x_1\, s\, x_2\, s\, x_3\, s\, x_4$. Wtedy x_0 jest połączony z x_4 ciągiem czterech strzałek. Z (3) wynika, że jeśli w tym ciągu są trzy kolejne strzałki w tę samą stronę, to $\langle x_0, x_4\rangle \in s \cdot s \cdot s$. W przeciwnym przypadku, jeśli we wspomnianym ciągu jest zmiana kierunku strzałek postaci $\longleftarrow\longrightarrow$, to z (1) wynika, że $\langle x_0, x_4\rangle \in s \cdot s \cdot s$. Zostaje jeden przypadek nierozpatrzony postaci $\longrightarrow\longrightarrow\longleftarrow\longleftarrow$. Ale wtedy drugą strzałkę można odwrócić przy użyciu (2).

372b: Załóżmy, że r jest przechodnia. Wtedy r^{-1} jest również przechodnia. Zauważmy, że jeśli $x\, r\, y\, r\, z$ lub $x\, r^{-1}\, y\, r^{-1}\, z$ lub $x\, r^{-1}\, y\, r\, z$ to $x\, s\, z$. Z tego łatwo wynika, że $s \cdot s \cdot s \subseteq s \cdot s$. Zatem relacja $\mathbf{1}_A \cup (s \cdot s)$ jest przechodnia. Zwrotność i symetria jak w zadaniu 372a.

372c: Załóżmy, że r jest symetryczna. Jeśli $x\,s\,y\,s\,z$, to $x\,r\,y\,r\,z$ i zatem $x\,r\,z$ (1). Wynika stąd, że relacja $\mathbf{1}_A \cup s$ jest przechodnia. Zwrotność i symetria jak w zadaniu 372a.

373: Relacja R_Z jest relacją równoważności dla dowolnego Z. Zwrotność i symetria jest oczywista. Pokażemy, że relacja R_Z jest przechodnia. Weźmy dowolne takie funkcje $f, g, h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, że $\langle f, g\rangle \in R_Z$ i $\langle g, h\rangle \in R_Z$. Z definicji oznacza to, że dla każdego $n \in Z$ mamy $f(n) = g(n)$ i $g(n) = h(n)$. Wtedy jednak dla każdego $n \in Z$ zachodzi $f(n) = h(n)$. To jest równoważne temu, że $\langle f, h\rangle \in R_Z$.

Relacja S_Z jest relacją równoważności wtedy i tylko wtedy, gdy Z jest zbiorem jednoelementowym. Niech $Z = \{z\}$ będzie zbiorem jednoelementowym. Jest oczywiste, że relacja S_Z jest zwrotna i symetryczna. Pokażemy, że jest przechodnia. Weźmy dowolne funkcje $f, g, h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takie, że $\langle f, g\rangle \in S_Z$ i $\langle g, h\rangle \in S_Z$. Z definicji oznacza to, że istnieje $n \in Z$ takie, że $f(n) = g(n)$ oraz takie $m \in Z$, że $g(m) = h(m)$. Jednak $Z = \{z\}$, zatem $n = m = z$. Mamy zatem $f(z) = g(z)$ i $g(z) = h(z)$, skąd wynika, że $f(z) = h(z)$. Jest więc takie $n \in Z$, że $f(n) = h(n)$, a zatem $\langle f, h\rangle \in S_Z$.

Jeśli Z nie jest zbiorem jednoelementowym, to istnieją dwa różne elementy $a, b \in Z$. Rozważmy funkcje $f, g, h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takie, że

$$\begin{array}{llll} f(a) = 0, & f(b) = 1, & f(n) = 0, & \text{dla } n \neq a, b; \\ g(a) = 0, & g(b) = 2, & g(n) = 1, & \text{dla } n \neq a, b; \\ h(a) = 2, & h(b) = 2, & h(n) = 2, & \text{dla } n \neq a, b. \end{array}$$

Wówczas $\langle f, g\rangle \in S_Z$ oraz $\langle g, h\rangle \in S_Z$, ale $\langle f, h\rangle \notin S_Z$. Zatem relacja S_Z nie jest przechodnia.

374: Relacjami równoważności są $R_\mathbb{N}$ i $R_{\mathcal{P}\mathrm{r}}$. Łatwo zauważyć, że relacja $R_\mathbb{N}$ to relacja identyczności. Ponadto $\langle f, g\rangle \in R_{\mathcal{P}\mathrm{r}}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\forall n \in \mathcal{P}\mathrm{r}(f(n) = g(n))$.

(a) Relacja $R_\mathbb{N}$ to identyczność, zatem jedyną funkcją, która jest w relacji $R_\mathbb{N}$ z $\lambda n.n$ jest $\lambda n.n$. Zgodnie z definicją relacji $R_{\mathcal{P}\mathrm{r}}$, mamy $[\lambda n.n]_{R_{\mathcal{P}\mathrm{r}}} = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathcal{P}\mathrm{r}(f(n) = n)\}$.

(b) Zbiór $(\mathbb{N} \to \mathbb{N})/_{R_\mathbb{N}}$ jest nieskończony. Każda funkcja jest w innej klasie abstrakcji, a funkcji z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{N}$ jest nieskończenie wiele. Zbiór $(\mathbb{N} \to \mathbb{N})/_{R_{\mathcal{P}\mathrm{r}}}$ jest też nieskończony. Każda funkcja stała jest w innej klasie abstrakcji, bo każda daje inną wartość dla parzystego argumentu 0.

(c) Każda klasa abstrakcji relacji $R_\mathbb{N}$ jest skończona, bo jest jednoelementowa. Za to każda klasa abstrakcji relacji $R_{\mathcal{P}\mathrm{r}}$ jest nieskończona. Weźmy dowolną funkcję $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ i rozważmy takie funkcje $f_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, że $f_n(1) = n$ i $f_n(k) = f(k)$, dla $k \neq 1$. Jeśli $n \neq m$ to funkcje f_n i f_m są różne, a jednocześnie każda z nich należy do $[f]_{R_{\mathcal{P}\mathrm{r}}}$. Zatem klasa abstrakcji $[f]_{R_{\mathcal{P}\mathrm{r}}}$ jest nieskończona.

(d) Zbiór A nie jest klasą abstrakcji relacji $R_\mathbb{N}$, bo każda klasa abstrakcji $R_\mathbb{N}$ jest jednoelementowa. Zbiór A także nie jest klasą abstrakcji relacji $R_{\mathcal{P}\mathrm{r}}$. W klasie abstrakcji każde dwa elementy są w relacji. Jednak do A należą funkcja f stale równa 0 oraz funkcja g taka, że $g(2011) = 0$ i $g(n) = 7$ dla $n \neq 0$. Jednocześnie $\langle f, g\rangle \notin R_{\mathcal{P}\mathrm{r}}$, bo $f(0) \neq g(0)$.

375: Weźmy dowolną funkcję $S\colon \mathbb{N} \to \mathcal{R}$. Pokażemy, że relacja $R_\infty(S)$ jest relacją równoważności, poprzez sprawdzenie trzech warunków jakie taka relacja musi spełniać.

(Zwrotność) Weźmy dowolne $x \in \mathbb{N}$. Skoro dla każdego $j \in \mathbb{N}$ relacja $S(j)$ jest relacją równoważności, więc $\forall j \in \mathbb{N}.\ \langle x, x\rangle \in S(j)$. W takim razie dla $i = 0$ mamy $\forall j \geq i.\ \langle x, x\rangle \in S(j)$, skąd $\langle x, x\rangle \in R_\infty(S)$.

(Symetria) Weźmy dowolną parę $\langle x, y\rangle \in R_\infty(S)$. Pokażemy, że $\langle y, x\rangle \in R_\infty(S)$. Skoro para $\langle x, y\rangle$ należy do $R_\infty(S)$, to z definicji $R_\infty(S)$ wiemy, że istnieje takie $i \in \mathbb{N}$, że $\forall j \geq i.\ \langle x, y\rangle \in S(j)$. Ale ponieważ każda z relacji $S(j)$ dla $j \in \mathbb{N}$ jest symetryczna, więc zachodzi również $\forall j \geq i.\ \langle y, x\rangle \in S(j)$. A zatem otrzymujemy $\langle y, x\rangle \in R_\infty(S)$ z definicji $R_\infty(S)$.

(Przechodniość) Niech $\langle x, y\rangle \in R_\infty(S)$ i $\langle y, z\rangle \in R_\infty(S)$. Wykażemy, że para $\langle x, z\rangle$ należy do $R_\infty(S)$. Z definicji $R_\infty(S)$, istnieją takie $i_1, i_2 \in \mathbb{N}$, że $\forall j_1 \geq i_1.\ \langle x, y\rangle \in S(j_1)$ oraz $\forall j_2 \geq i_2.\ \langle y, z\rangle \in S(j_2)$. Niech $i = \max(i_1, i_2)$. Ponieważ $i_1 \leq i$ oraz $i_2 \leq i$, więc $\forall j \geq i.\ \langle x, y\rangle \in S(j) \wedge \langle y, z\rangle \in S(j)$. Ponieważ każda z relacji $S(j)$ dla $j \in \mathbb{N}$ jest przechodnia, więc ostatnia własność implikuje, że dla wybranego wcześniej i zachodzi $\forall j \geq i.\ \langle x, z\rangle \in S(j)$. A zatem z definicji $R_\infty(S)$ dostajemy $\langle x, z\rangle \in R_\infty(S)$.

376a: Tak, zdefiniowana powyżej relacja r_s jest zawsze relacją równoważności. Weźmy dowolny zbiór X i relację s w X. Pokażemy, że r_s jest relacją równoważności:

(Zwrotność) Przypomnijmy, że $\mathbf{1}_X = \{\langle x, x\rangle \mid x \in X\}$. Chcemy pokazać, że $\mathbf{1}_X \subseteq r_s$. Ale $\mathbf{1}_X \subseteq s^*$, bo s^* jest zwrotna i podobnie $\mathbf{1}_X = \mathbf{1}_X^{-1} \subseteq (s^*)^{-1}$. Więc $\mathbf{1}_X \subseteq r_s$, a zatem r_s jest zwrotna.

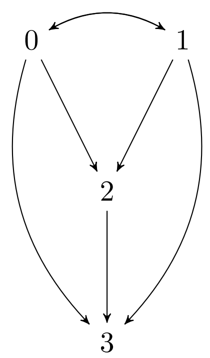
(Symetria) Zauważmy, że $r_s^{-1} = (s^* \cap (s^*)^{-1})^{-1} = (s^*)^{-1} \cap ((s^*)^{-1})^{-1} = (s^*)^{-1} \cap s^* = r_s$, gdzie:

- pierwsza równość wynika z definicji r_s,
- druga równość wynika z definicji operacji $^{-1}$,
- trzecia równość wynika z tego, że dla dowolnej relacji t zachodzi $\left(t^{-1}\right)^{-1} = t$,
- czwarta równość wynika z definicji r_s.

(Przechodniość) Wykażemy najpierw, że jeśli relacja t w X jest przechodnia to również t^{-1} jest przechodnia. Weźmy dowolne $\langle x, y\rangle, \langle y, z\rangle \in t^{-1}$, pokażemy że $\langle x, z\rangle \in t^{-1}$. Wiemy, że $\langle z, y\rangle, \langle y, x\rangle \in t$. Skoro t jest przechodnia, więc $\langle z, x\rangle \in t$, a więc $\langle x, z \in t^{-1}$.

Relacja s^* jest przechodnia z definicji, więc na mocy powyższej uwagi relacja $(s^*)^{-1}$ jest przechodnia. A zatem relacja $r = s^* \cap (s^*)^{-1}$ jest przechodnia, jako przecięcie relacji przechodnich (zadanie 264).

376b: Rozważmy relację $s = \{\langle 0,0\rangle, \langle 0,1\rangle, \langle 0,2\rangle, \langle 0,3\rangle, \langle 1,0\rangle, \langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,3\rangle\}$ w zbiorze $X = \{0,1,2,3\}$. Rysunek 6 przedstawia relację s graficznie. Strzałka $x \to y$ na obrazku oznacza, że $\langle x, y\rangle \in s$. Dla czytelności, wszystkie cztery strzałki postaci $\langle x, x\rangle \in s$ zostały pominięte. Łatwo sprawdzić, że relacja s jest spójna oraz zachodzi równość $s^* = s$. Wobec tego $(s^*)^{-1} = s^{-1}$,



Rysunek 6: Zadanie 376b.

a zatem $r_s = s \cap s^{-1} = \{\langle 0,0\rangle, \langle 0,1\rangle, \langle 1,0\rangle, \langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,3\rangle\}$. W takim razie r_s jest relacją równoważności i ma trzy klasy abstrakcji: $\{0,1\}, \{2\}$ i $\{3\}$.

377: Relacja $\sim$ jest zwrotna: $f \sim f$ dla dowolnej funkcji $f : R \to R$, gdyż $f(x) = f(x)$ dla $x > 0$. Relacja $\sim$ jest też oczywiście symetryczna. Aby udowodnić, że $\sim$ jest przechodnia, załóżmy, że $f \sim g$ oraz $g \sim h$. Wówczas istnieją takie $s, t \in \mathbb{R}$, że $f(x) = g(x)$, dla $x > s$, oraz $g(x) = h(x)$, dla $x > t$. A wtedy $f(x) = h(x)$, dla $x > \max(s, t)$, co pokazuje, że $f \sim h$.

378: Dalej dla uproszczenia piszemy $\sim$ zamiast $\sim_S$. Dla $c \in \mathbb{R}$, niech f_c oznacza funkcję stałą $\lambda x.c$. Zdefiniujmy funkcję $\alpha : \mathbb{R} \to S/_\sim$ wzorem $\alpha(c) = [f_c]_\sim$. Pokażemy, że funkcja α jest bijekcją.
1. Funkcja α jest różnowartościowa: Załóżmy, że $\alpha(c) = \alpha(d)$. Pokażemy, że $c = d$. Skoro $\alpha(c) = \alpha(d)$, to z definicji funkcji α wynika, że $f_c \sim f_d$. A zatem istnieje taka liczba t, że $f_c(x) = f_d(x) \quad$ dla $x > t$. W szczególności, $c = f_c(x+1) = f_d(x+1) = d$.
2. Funkcja α jest na $S/_\sim$: Rozważmy dowolną klasę abstrakcji C relacji $\sim$. Pokażemy, że $C = \alpha(b)$ dla pewnej liczby $b \in \mathbb{R}$. Niech f będzie dowolną funkcją należącą do C (wtedy $C = [f]_\sim$). Ponieważ f jest skokowa, więc istnieją takie liczby $t, a, b \in \mathbb{R}$, że
$$f(x) = \begin{cases} a & \text{jeśli } x < t, \\ b & \text{jeśli } x \geq t. \end{cases}$$
Jasne jest, że $f \sim f_b$. A zatem, $f_b \in C$, co implikuje że $\alpha(b) = C$.

379a: Relacja R jest relacją równoważności, ponieważ jest jądrem takiej funkcji $F : \mathbb{N}^\mathbb{N} \to \mathsf{P}(\mathbb{N})$, że $F(f) = f^{-1}(\{2013\})$.

379b: Jest tylko jedna taka funkcja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, że $f^{-1}(\{2013\}) = \mathbb{N}$. Jest to funkcja stale równa 2013, zatem $[\lambda x.2013]_R = \{\lambda x.2013\}$.

379c: Nie. Dla $n \in \mathbb{N}$ zdefiniujmy $f_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tak:

$$f_n(x) = \begin{cases} 2013, & \text{gdy } x \leq n \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Wówczas $f_n^{-1}(\{2013\}) = \{0, 1, \ldots, n\}$ i dla $n \neq m$ funkcje f_n i f_m nie są w relacji R. Zatem każda klasa abstrakcji $[f_n]_R$ jest inna.

379d: Tylko jedna. Z punktu 379b wiemy, że klasa abstrakcji funkcji $\lambda x.2013$ jest skończona. Udowodnimy, że dla każdej innej funkcji f jej klasa abstrakcji $[f]_R$ jest nieskończona. Skoro f nie jest stale równa 2013, to istnieje takie $n \in \mathbb{N}$, że $f(n) \neq 2013$. Dla $a \neq 2013$ rozważmy funkcję $f_a : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$:

$$f_a(x) = \begin{cases} f(x), & \text{gdy } x \neq n \\ a, & \text{gdy } x = n \end{cases}$$

Wtedy $\langle f_a, f \rangle \in R$ i dla różnych a_1, a_2 funkcje f_{a_1}, f_{a_2} są różne. Zatem $[f]_R$ jest nieskończona.

380a: Nie, bo relacja τ nie jest przechodnia. Na przykład $\langle 4, 2 \rangle \in \tau$ oraz $\langle 2, 6 \rangle \in \tau$, ale $\langle 4, 6 \rangle \notin \tau$.

380b: Niech $\mathcal{P}\mathrm{r}$ oznacza zbiór wszystkich liczb parzystych, niech $B_0 = \bigcup\{B \mid B \text{ jest kliką oraz } 2 \in B\}$. Wykażemy, że $B_0 = \mathcal{P}\mathrm{r} \cup \{1\}$.
($\supseteq$) Niech $m \in \mathcal{P}\mathrm{r} \cup \{1\}$. Wtedy zbiór $\{2, m\}$ jest kliką w relacji τ, bo $2 \mid m$ lub $m \mid 2$. Zatem $\{2, m\} \subseteq B_0$ i w szczególności $m \in B_0$.
($\subseteq$) Niech $m \in B_0$. Wtedy istnieje taka klika B, że $m \in B$ oraz $2 \in B$, skąd $2 \mid m$ lub $m \mid 2$. Jeżeli $2 \mid m$, to m jest parzyste. Jeżeli $m \mid 2$, to $m = 1$ lub $m = 2$. Zatem $m \in \mathcal{P}\mathrm{r} \cup \{1\}$.
Nie, zbiór B_0 nie jest kliką w relacji τ, np. $4, 6 \in B_0$ ale $\langle 4, 6 \rangle \notin \tau$, zatem $B_0 \times B_0 \nsubseteq \tau$.

380c: Wykażemy, że zbiór $A = \{2^n \mid n : \mathbb{N}\}$ jest kliką maksymalną w relacji τ. Po pierwsze jest to klika, bo $2^n \mid 2^m$ dla $n \leq m$. Po drugie przypuśćmy, że $A \subseteq B$ i B jest kliką. Jeśli $A \neq B$, to istnieje taka liczba b, że $b \in B - A$. Dla dowolnego n mamy teraz $b \mid 2^n$ lub $2^n \mid b$. Pierwszy przypadek jest niemożliwy, bo wtedy b też jest potęgą dwójki i $b \in A$. Zatem dla dowolnego n zachodzi drugi przypadek. Oznacza to, że $2^n \mid b$, w szczególności $2^n \leq b$, dla każdego n. Taka liczba b oczywiście nie istnieje.

381a: Nie, relacja τ_ε jest zwrotna i symetryczna, ale nie jest przechodnia. Istotnie, $\langle \frac{\varepsilon}{3}, \varepsilon \rangle \in \tau_\varepsilon$ oraz $\langle \varepsilon, \frac{5\varepsilon}{3} \rangle \in \tau_\varepsilon$, ale $\langle \frac{\varepsilon}{3}, \frac{5\varepsilon}{3} \rangle \notin \tau_\varepsilon$.

381b: Pokażemy, że $\bigcup\{B \mid B \text{ jest kliką oraz } 0 \in B\} = (-\varepsilon, \varepsilon)$. Zawieranie z prawej do lewej wynika stąd, że dla $x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ zbiór $\{x, 0\}$ jest kliką, do której należy zero. Na odwrót, jeśli $x \in B$, gdzie B jest kliką oraz $0 \in B$, to $|x| = |x - 0| < \varepsilon$ czyli $x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Przedział $(-\varepsilon, \varepsilon)$ nie jest kliką (więc nie jest też kliką maksymalną), bo np. liczby $-\frac{3\varepsilon}{4}$ i $\frac{3\varepsilon}{4}$ nie są w relacji τ_ε. Przykładowa klika maksymalna, do której należy zero, to przedział $[0, \varepsilon)$.

381c: Tak. Niech $\gamma = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$, wówczas $\tau_\gamma = \tau_{\varepsilon_1} \circ \tau_{\varepsilon_2}$. Dla dowodu zawierania w prawo weźmy dowolne takie x, y, że $\langle x, y \rangle \in \tau_\gamma$. Przypuśćmy najpierw, że $x < y$. Skoro różnica $y - x$ jest mniejsza od γ (czyli od $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$), to istnieje takie $z \in (x, y)$, że $z - x < \varepsilon_1$ i $y - z < \varepsilon_2$. Można przyjąć na przykład $z = x + |y - x| * \frac{\varepsilon_1}{\gamma}$. Wtedy $\langle x, z \rangle \in \tau_{\varepsilon_1}$ i $\langle y, z \rangle \in \tau_{\varepsilon_2}$, a więc $\langle x, y \rangle \in \tau_{\varepsilon_1} \circ \tau_{\varepsilon_2}$. Dla $x > y$ dowód jest analogiczny.

Zawieranie w przeciwną stronę wynika z tego, że jeśli $\langle x, z \rangle \in \tau_{\varepsilon_1}$ i $\langle z, y \rangle \in \tau_{\varepsilon_2}$, to $|x - y| \leq |x - z| + |z - y| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \gamma$, a zatem $\langle x, y \rangle \in \tau_\gamma$.

381d: Dla dowolnego ε mamy $\tau_\varepsilon^+ = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, w szczególności $\langle \varepsilon, \sqrt{2} \rangle \in \tau_\varepsilon^+$. Istotnie, dla $x < y$ istnieje taki ciąg $x = x_0, x_1, \ldots, x_n = y$, że $\langle x_i, x_{i+1} \rangle \in \tau_\varepsilon$ dla $i = 0, \ldots, n-1$. Wystarczy wziąć $n = \lceil 2\frac{y-x}{\varepsilon} \rceil$ oraz $x_i = x + i \cdot \frac{\varepsilon}{2}$ dla $i = 0 \ldots n-1$ i w końcu $x_n = y$.

382a: Tak. Udowodnimy, że jeśli $r_1 \neq r_2$, to funkcje $\varphi(r_1)$ i $\varphi(r_2)$ są różne. Niech więc $r_1 \neq r_2$, np. $\langle y, z \rangle \in r_1 - r_2$, i niech $A = [y]_{r_2}$. Wtedy $\varphi(r_2)(A) = A$, więc $z \notin \varphi(r_2)(A)$. Z drugiej strony $z \in [z]_{r_1} \subseteq \bigcup\{\, [x]_{r_1} \mid x \in A\} = \varphi(r_1)(A)$, bo $[z]_{r_1} = [y]_{r_1}$ i $y \in A$. A zatem $z \in \varphi(r_1)(A) - \varphi(r_2)(A)$, skąd $\varphi(r_1)(A) \neq \varphi(r_2)(A)$. Funkcje $\varphi(r_1)$ i $\varphi(r_2)$ są więc różne.

382b: Nie. Dla $r \in \mathcal{R}$ mamy $\varphi(r)(\varnothing) = \varnothing$, więc np. funkcja $\lambda A\, \{3\}$ nie jest postaci $\varphi(r)$.

382c: ($\Leftarrow$) Jeśli $r = \mathbf{1}_{\mathbb{N}}$, to $\varphi(r)(A) = \bigcup\{ [x]_r \mid x \in A\} = \bigcup\{ \{x\} \mid x \in A\} = A$, czyli $\varphi(r) = \mathrm{id}_{\mathsf{P}(\mathbb{N})}$.
($\Rightarrow$) Niech $\varphi(r)$ będzie różnowartościowa. Jeśli $\langle x, y\rangle \in r$, to $\varphi(r)(\{x\}) = [x]_r = [y]_r = \varphi(r)(\{y\})$. Z różnowartościowości wynika $\{x\} = \{y\}$, czyli $x = y$.

382d: Przede wszystkim zauważmy, że skoro $\mathrm{Rg}(\varphi(r))$ jest podzbiorem $\mathsf{P}(\mathbb{N})$, to $\bigcup \mathrm{Rg}(\varphi(r)) \subseteq \mathbb{N}$. Pokażemy, że $\bigcup \mathrm{Rg}(\varphi(r)) = \mathbb{N}$, niezależnie od r, W tym celu weźmy dowolne $y \in \mathbb{N}$. Wtedy $y \in [y]_r$, więc $y \in \varphi(r)(\{y\}) \in \mathrm{Rg}(\varphi(r))$. Zatem $y \in \bigcup \mathrm{Rg}(\varphi(r))$, czyli $\bigcup \mathrm{Rg}(\varphi(r)) \supseteq \mathbb{N}$.

383a: Nie. Niech na przykład $r_1 \in \mathbb{R}$ będzie relacją wyznaczającą podział $\mathbb{R}$ na dwa zbiory $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$, a relacja $r_2 \in \mathbb{R}$ niech wyznacza podział taki: $\{\mathbb{Q}\} \cup \{\{x\} \mid x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}\}$. Wtedy $\varphi(r_1) = \varphi(r_2)$, bo dla dowolnego $A \subseteq \mathbb{N}$ zachodzi $\varphi(r_1)(A) = \varphi(r_2)(A) = \mathsf{if}\ A \cap \mathbb{Q} = \varnothing\ \mathsf{then}\ \varnothing\ \mathsf{else}\ \mathbb{Q}$.

383b: Nie. Dla $r \in \mathcal{R}$ mamy $\varphi(r)(\varnothing) = \varnothing$, więc np. funkcja $\lambda A\, \{3\}$ nie jest postaci $\varphi(r)$.

383c: Nigdy tak nie jest, bo $\varphi(r)(\mathbb{Q}) = \bigcup\{ [x]_r \mid x \in \mathbb{Q}\} = \varphi(r)(\mathbb{Q} \cup \{\sqrt{2}\})$ dla dowolnej relacji $r \in \mathcal{R}$.

383d: Tak. Na przykład $\bigcup \mathrm{Rg}(\varphi(\mathbf{1}_{\mathbb{R}})) = \bigcup\{\varphi(\mathbf{1}_{\mathbb{R}})(A) \mid A \subseteq \mathbb{R}\} = \bigcup\{\bigcup\{ [x]_{\mathbf{1}_{\mathbb{R}}} \mid x \in A \cap \mathbb{Q}\} \mid A \subseteq \mathbb{R}\} = \bigcup\{\bigcup\{ \{x\} \mid x \in A \cap \mathbb{Q}\} \mid A \subseteq \mathbb{R}\} = \bigcup\{A \cap \mathbb{Q} \mid A \subseteq \mathbb{R}\} = \mathbb{Q}$. Ale z drugiej strony $\bigcup \mathrm{Rg}(\varphi(\mathbb{R} \times \mathbb{R})) = \bigcup\{\bigcup\{ [x]_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \mid x \in A \cap \mathbb{Q}\} \mid A \subseteq \mathbb{R}\} = \bigcup\{\mathbb{R}, \varnothing\} = \mathbb{R}$.

384a: Dla $g = \lambda x.\mathsf{if}\ x < 0\ \mathsf{then}\ {-1}\ \mathsf{else}\ 0$, mamy $\psi(g) = \{(-\infty, 0), [0, \infty), \varnothing\}$. Istotnie, $g^{-1}(\{-1\}) = (-\infty, 0)$, $g^{-1}(\{0\}) = [0, \infty)$ oraz $g^{-1}(\{x\}) = \varnothing$ dla wszystkich $x \neq 0, 1$.

384b: Nie, bo zawsze $\psi(g) \neq \varnothing$, na przykład $g^{-1}(\{0\}) \in \psi(g)$.

384c: Nie, np. $\psi(\lambda x\, 0) = \{\mathbb{R}, \varnothing\} = \psi(\lambda x\, 1)$, bo $(\lambda x\, c)^{-1}(\{c\}) = \mathbb{R}$ i $(\lambda x\, c)^{-1}(\{x\}) = \varnothing$, dla $x \neq c$.

384d: Tak. Warunek $\exists S\, (S \in \psi(g) \wedge x \in S \wedge y \in S)$ jest równoważny stwierdzeniu, że $x, y \in g^{-1}(\{z\})$, dla tego samego $z \in \mathbb{R}$, czyli że $g(x) = g(y)$. Inaczej mówiąc, relacja r_g to po prostu jądro funkcji g.

384e: Zbiór $\psi^{-1}(\{\{(-\infty, 0), [0, \infty), \varnothing\}\})$, to zbiór wszystkich funkcji postaci $\lambda x.\, \mathsf{if}\ x < 0\ \mathsf{then}\ c\ \mathsf{else}\ d$, dla pewnych stałych $c \neq d \in \mathbb{R}$. Istotnie, dla każdej takiej funkcji g mamy $\psi(g) = \{(-\infty, 0), [0, \infty), \varnothing\}$, bo $g^{-1}(\{c\}) = (-\infty, 0)$, $g^{-1}(\{d\}) = [0, \infty)$ oraz $g^{-1}(\{x\}) = \varnothing$ dla $x \neq c, d$. Ponadto, z zadania 384d wynika, że jeśli $g \in \psi^{-1}(\{\{(-\infty, 0), [0, \infty), \varnothing\}\})$, to g jest stała na przedziałach $(-\infty, 0)$ oraz $[0, \infty)$.

385a: Dla $g = \lambda x.\mathsf{if}\ x < 0\ \mathsf{then}\ {-1}\ \mathsf{else}\ 0$, mamy $\psi(g) = \{(-\infty, 0), [0, \infty), \varnothing, \mathbb{R}\}$. Istotnie, $g^{-1}(\{x, y\}) = g^{-1}(\{x\}) \cup g^{-1}(\{y\})$, a wiemy z zadania 384a, że każde $g^{-1}(\{x\})$ musi być jednej z postaci $(-\infty, 0)$, $[0, \infty)$ lub $\varnothing$.

385b: Nie, bo zawsze $\psi(g) \neq \varnothing$, na przykład $g^{-1}(\{0, 1\}) \in \psi(g)$. Zatem $\varnothing \notin \mathrm{Rg}(\psi)$.

385c: Nie, np. $\psi(\lambda z\, 0) = \{\mathbb{R}, \varnothing\} = \psi(\lambda z\, 1)$, bo $(\lambda z\, c)^{-1}(\{c, y\}) = \mathbb{R}$ dla $y \in \mathbb{R}$ i $(\lambda z\, c)^{-1}(\{x, y\}) = \varnothing$, dla $x, y \neq c$.

385d: Tak, bo zawsze $r_g = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Mamy bowiem $x, y \in g^{-1}(\{g(x), g(y)\}) \in \psi(g)$.

387a: Zbiory A, B są w relacji r, gdy $A{\downarrow} = B{\downarrow}$, gdzie $X{\downarrow} = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists y \in A.\, x \leq y\}$, dla dowolnego $X \subseteq \mathbb{N}$. Relacja r jest więc jądrem operacji ${\downarrow} : \mathsf{P}(\mathbb{N}) \to \mathsf{P}(\mathbb{N})$, a każde jądro jest relacją równoważności.

387b: Każdy zbiór postaci $A{\downarrow}$ jest odcinkiem początkowym w $\langle \mathbb{N}, \leq\rangle$. To znaczy, że albo $A{\downarrow} = \mathbb{N}$ (odcinek niewłaściwy), albo $A{\downarrow} = \mathcal{O}_{\mathbb{N}}(n) = \{0, \ldots, n-1\}$ dla pewnego n.

Określimy funkcję $f : \mathsf{P}(\mathbb{N})/_r \to \mathbb{N} \cup \{\omega\}$ w następujący sposób:

$$f([A]_r) = \mathsf{if}\ A{\downarrow} = \mathcal{O}_{\mathbb{N}}(n)\ \mathsf{then}\ n\ \mathsf{else}\ \omega$$

Funkcja f jest dobrze określona, bo $B{\downarrow} = A{\downarrow}$ dla wszystkich $B \in [A]_r$. Jest to funkcja różnowartościowa, bo wartość $f([A]_r)$ zależy tylko od $A{\downarrow}$, a ten zbiór jest inny dla każdej klasy. Jest też surjekcją, bo $\omega = f([\mathbb{N}]_r)$ oraz $n = f([\mathcal{O}_{\mathbb{N}}(n)]_r)$ dla $n \in \mathbb{N}$ (na przykład $0 = f([\varnothing]_r)$). Zbiór ilorazowy jest więc mocy $\aleph_0$, bo jest równoliczny ze zbiorem $\mathbb{N} \cup \{\omega\}$.

387c: Ponieważ $A \subseteq A{\downarrow}$ dla dowolnego A, więc jedynym zbiorem o własności $A{\downarrow} = \mathcal{O}_{\mathbb{N}}(0) = \varnothing$ jest zbiór pusty. Klasa $[\varnothing]_r$ ma więc jeden element.

Jeśli $A \neq \varnothing$ jest ograniczony z góry, to ma największy element m. Wtedy $A{\downarrow} = \{m\}{\downarrow} = \mathcal{O}_{\mathbb{N}}(m+1)$. Do klasy abstrakcji $[A]_r = [\{m\}]_r$ należą wszystkie zbiory zawarte w $\mathcal{O}_{\mathbb{N}}(m+1)$, których największym elementem jest m. Jest ich tyle ile różnych podzbiorów m-elementowego zbioru $\mathcal{O}_{\mathbb{N}}(m)$ czyli dokładnie 2^m.

A jeśli zbiór A nie jest ograniczony z góry, to $A{\downarrow} = \mathbb{N}$. Zatem klasa abstrakcji $[A]_r = [\mathbb{N}]_r$ to zbiór $\mathcal{U}$ wszystkich nieograniczonych podzbiorów zbioru $\mathbb{N}$. Pokażemy, że $\overline{\overline{\mathcal{U}}} = \mathfrak{C}$.

Oczywiście $\overline{\overline{\mathcal{U}}} \leq \mathfrak{C}$, bo $\mathcal{U} \subseteq \mathsf{P}(\mathbb{N})$. Z drugiej strony rozpatrzmy funkcję $h : \mathsf{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{U}$ określoną tak: $h(B) = \{2k \mid k \in B\} \cup \{2k+1 \mid k \in \mathbb{N}\}$. Ta funkcja jest dobrze określona, bo do każdego zbioru postaci $h(B)$ należą wszystkie liczby nieparzyste; zbiór ten jest więc na pewno nieograniczony. Ponadto funkcja h jest różnowartościowa, bo jeśli np. $k \in B_1 - B_2$, to $2k \in h(B_1) - h(B_2)$. A zatem $\mathfrak{C} = \overline{\overline{\mathsf{P}(\mathbb{N})}} \leq \overline{\overline{\mathcal{U}}}$ i ostatecznie wnioskujemy, że $\overline{\overline{\mathcal{U}}} = \mathfrak{C}$.

388a: Relacja r jest relacją równoważności, bo jest jądrem operacji $\Downarrow : \mathsf{P}(\mathbb{N}) \to \mathsf{P}(\mathbb{N})$, która każdemu zbiorowi $X \subseteq \mathbb{N}$ przypisuje zbiór wszystkich jego ograniczeń dolnych $X{\Downarrow} = \{x \in \mathbb{N} \mid \forall y \in X.\, x \leq y\}$.

388b: Jeśli $A \neq \varnothing$, to $A{\Downarrow} = \{\min A\}{\Downarrow} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq \min A\}$. Natomiast $\varnothing{\Downarrow} = \mathbb{N}$, bo każda liczba jest ograniczeniem dolnym zbioru pustego. Określimy taka funkcję $f : \mathsf{P}(\mathbb{N})/_r \to \mathbb{N} \cup \{\omega\}$:

$$f([A]_r) = \mathsf{if}\ A{\Downarrow} = \{n\}{\Downarrow}\ \mathsf{then}\ n\ \mathsf{else}\ \omega\,.$$

Funkcja f jest dobrze określona, bo $B{\Downarrow} = A{\Downarrow}$ dla wszystkich $B \in [A]_r$. Jest to funkcja różnowartościowa, bo zbiór $A{\Downarrow}$ jest inny dla każdej klasy. Jest też surjekcją, bo $\omega = f([\varnothing]_r)$ oraz $n = f([\{n\}]_r)$ dla $n \in \mathbb{N}$. Zbiór ilorazowy jest więc mocy $\aleph_0$, bo jest równoliczny ze zbiorem $\mathbb{N} \cup \{\omega\}$.

388c: Jedynym zbiorem A o własności $A{\Downarrow} = \mathbb{N}$ jest zbiór pusty; istotnie, gdyby $a \in A$, to $n \leq a$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Klasa $[\varnothing]_r$ ma więc jeden element.

Jeśli $A \neq \varnothing$, to niech $n = \min A$ i niech $g : \mathsf{P}(\{k \in \mathbb{N} \mid k > n\}) \to [A]_r$ będzie taka, że $g(B) = B \cup \{n\}$. Ta funkcja jest dobrze określona, bo jeśli $B \in \mathrm{Dom}(g)$, to $\min(g(B)) = \min(B \cup \{n\}) = n$, więc $g(B){\Downarrow} = \{n\}{\Downarrow} = A{\Downarrow}$. Funkcja g jest różnowartościowa, bo jeśli $B, B' \in \mathrm{Dom}(g)$ i na przykład $k \in B - B'$, to $k > n$, więc nadal $k \in g(B) - g(B')$. Ponadto jeśli $A'\, r\, A$, to $A'{\Downarrow} = A{\Downarrow} = \{n\}{\Downarrow}$, w szczególności $\min A' = n$, skąd $A' = g(A' - \{n\})$. A więc nasza funkcja jest bijekcją. Zatem moc zbioru $[A]_r$ jest równa mocy zbioru $\mathsf{P}(\{k \in \mathbb{N} \mid k > n\})$, która jest taka jak moc zbioru $\mathsf{P}(\mathbb{N})$, czyli $\mathfrak{C}$.

389a: Zwrotność i symetria są oczywiste. Dla dowodu przechodniości załóżmy, że $f \sim g$ oraz $g \sim h$, tj. istnieją takie liczby M_1 i M_2, że $\forall n\, |f(n) - g(n)| \leq M_1$ i $\forall n\, |g(n) - h(n)| \leq M_2$. Ponieważ dla dowolnego n mamy $|f(n) - h(n)| \leq |f(n) - g(n)| + |g(n) - h(n)| \leq M_1 + M_2$, więc $f \sim h$.

389b: Zbiór ilorazowy $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}/_{\sim}$ jest mocy continuum. Nierówność $\overline{\overline{\mathbb{N}^{\mathbb{N}}/_{\sim}}} \leq \mathfrak{C}$ wynika stąd, że przekształcenie kanoniczne $\lambda f.\, [f]_{\sim} : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}/_{\sim}$ jest „na”. Nierówność w przeciwną stronę można wywnioskować z tego, że każda z funkcji $f_r(n) = \lfloor rn \rfloor$, gdzie r jest dodatnią liczbą rzeczywistą, jest w innej klasie abstrakcji. Faktycznie, dla $r_1 > r_2$, dowolnego M i dostatecznie dużego n mamy $\lfloor r_1 n \rfloor - \lfloor r_2 n \rfloor > M$, a więc różnica $|f_1 - f_2|$ nie jest ograniczona. A zatem funkcja $\lambda r.[f_r]_{\sim}$ jest dobrze określoną injekcją z R_+ w $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}/_{\sim}$, skąd $\mathfrak{C} \leq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}/_{\sim}$.

389c: Wszystkie klasy abstrakcji tej relacji są mocy continuum. Ograniczenie z góry jest oczywiste, bo wszystkich ciągów liczb naturalnych jest continuum. Szacowanie z dołu uzyskamy definiując funkcję $F : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \xrightarrow{1-1} [f]_{\sim}$ w ten sposób: dla $\alpha : \mathbb{N} \to \{0,1\}$ niech $F(\alpha)(n) = f(n) + \alpha(n)$. Wtedy $F(\alpha) \in [f]_{\sim}$, bo $\forall n.\, |F(\alpha)(n) - f(n)| \leq 1$, a więc F jest dobrze określona. Jest też różnowartościowa: jeśli $\alpha, \beta : \mathbb{N} \to \{0,1\}$ oraz $\alpha \neq \beta$, to $\alpha(n) \neq \beta(n)$ dla pewnego n. Wówczas $F(\alpha)(n) \neq F(\beta)(n)$, więc $F(\alpha) \neq F(\beta)$.

390a: Relacja $\sim$ jest jądrem operacji $\Phi : (\mathbb{N} \to \mathbb{N}) \to \mathsf{P}(\mathbb{N})$, która każdej funkcji $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ przyporządkowuje zbiór jej wszystkich punktów stałych $\Phi(f) = \{x \in \mathbb{N} \mid f(x) = x\}$.

390b: Zbiór ilorazowy jądra jest równoliczny ze zbiorem wartości funkcji, wystarczy więc określić moc $\mathrm{Rg}(\Phi)$. Ale $\mathrm{Rg}(\Phi) = \mathsf{P}(\mathbb{N})$, bo każdy zbiór $A \subseteq \mathbb{N}$ ma postać $\Phi(f)$ dla pewnej funkcji f. W rzeczy samej: $A = \Phi(\lambda n.\, \mathsf{if}\ n \in A\ \mathsf{then}\ n\ \mathsf{else}\ n+1)$. A zatem moc naszego zbioru jest taka jak moc $\mathsf{P}(\mathbb{N})$ czyli $\mathfrak{C}$.

390c: Dla $n \in \Phi(f)$ mamy $f(n) = n$, zatem funkcje z klasy $[f]_{\sim}$ mogą się różnić tylko dla argumentów ze zbioru $Z = \mathbb{N} - \Phi(f)$. Niech $F = \{f : Z \to \mathbb{N} \mid \forall z \in Z.\, f(z) \neq z\}$. Jeśli $g \in [f]_{\sim}$ i $\beta(g) = g{\restriction_Z}$, to funkcja $\beta(g)$ należy do zbioru F. Tak określone przekształcenie $\beta : [f]_{\sim} \to F$ jest bijekcją, bo:
– Jeśli $g, h \in [f]_{\sim}$ są różne, to muszą się różnić na jakimś argumencie ze zbioru Z.
– Każde $\alpha \in F$ jest postaci $\beta(g_\alpha)$, gdzie $g_\alpha = \lambda n.\, \mathsf{if}\ n \in Z\ \mathsf{then}\ \alpha(n)\ \mathsf{else}\ n$.
To znaczy, że klasa $[f]_{\sim}$ jest równoliczna z F i pozostaje zbadać moc zbioru F w zależności od Z.

Jeśli $Z = \varnothing$, to $F = \varnothing$, a klasa $[f]_{\sim}$ ma jeden element $\mathrm{id}_{\mathbb{N}}$. Jeśli Z jest skończony i niepusty, to F ma moc $\aleph_0$, bo $Z \to \Phi(f) \subseteq F \subseteq Z \to \mathbb{N}$. Pierwsza inkluzja daje nam $\aleph_0 \leq F$, bo zbiór $\Phi(f)$ jest wtedy mocy $\aleph_0$, więc funkcji typu $Z \to \Phi(f)$ jest też $\aleph_0$. Druga inkluzja daje $F \leq \aleph_0$, bo zbiór $Z \to \mathbb{N}$ jest przeliczalny z powodu skończoności Z.

Jeśli Z jest zbiorem nieskończonym, to zbiór F i klasa $[f]_\sim$ są mocy continuum. W istocie moc continuum ma wtedy nawet podzbiór $F_0 = \{f : Z \to Z \mid \forall z \in Z.\, f(z) \neq z\}$ zawarty w F. Ponieważ Z jest równoliczny z $\mathbb{N}$, więc wystarczy pokazać, że zbiór H tych funkcji z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{N}$, które nie mają punktów stałych, ma moc $\mathfrak{C}$. Ograniczenie z góry jest oczywiste, bo taka jest moc zbioru wszystkich funkcji z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{N}$. Ograniczenie z dołu da nam funkcja $\Gamma : (\mathbb{N} \to \{1,2\}) \xrightarrow{1-1} H$ określona takim sposobem: $\Gamma(\varphi)(n) = n + \varphi(n)$.

391a: Relacja $\sim$ to jądro funkcji $\Phi : (\mathbb{N} \to \mathbb{N}) \to (\mathbb{N} \to \mathsf{P}(\mathbb{N}))$ określonej tak: $\Phi(f) = \lambda n. f(\{0,\ldots,n\})$.

391b: Zauważmy, że $g(\{0\}) = \{0\}$, $g(\{0,1\}) = \{0,1\}$ oraz $g(\{0,1,2\}) = \{0,1,2\}$. Następnie $g(\{0,1,2,3\}) = g(\{0,1,2\}) = \{0,1,2\}$, a potem $g(\{0,\ldots,n\}) = \{0,1,2,4,\ldots,n\}$, dla $n > 3$. Przypuśćmy, że $f \in [g]_\sim$. Skoro $f(\{0\}) = g(\{0\}) = \{0\}$, to $f(0) = 0$. Dalej $f(\{0,1\}) = g(\{0,1\}) = \{0,1\} = \{f(0),1\}$, skąd wynika, że $f(1) = 1$. Uogólnijmy tę obserwację: ponieważ dla $n \neq 2$ zachodzi równość $f(\{0,\ldots,n,n{+}1\}) = f(\{0,\ldots,n\}) \cup \{n+1\}$ oraz $n+1 \notin f(\{0,\ldots,n\})$, więc $f(n+1) = n+1$. Zatem $f(k) = g(k)$ dla $k \neq 3$, a ponadto $f(3) \in f(\{0,1,2,3\}) = \{0,1,2\}$. Są więc dokładnie trzy funkcje w tej klasie: $f_i = \lambda n.\, \mathsf{if}\ n = 3\ \mathsf{then}\ i\ \mathsf{else}\ n$, dla $i = 0,1,2$.

391c: Ta klasa abstrakcji ma moc continuum. Aby skorzystać z tw. Cantora-Bernsteina, wystarczy wskazać ograniczenie dolne, gdyż ograniczenie górne jest oczywiste. Zdefiniujmy funkcję różnowartościową $\Psi : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to [h]_\sim$ przez $\Psi(b) = \lambda n.\, \mathsf{if}\ n < 2\ \mathsf{then}\ n\ \mathsf{else}\ b(n-2)$. Funkcja Ψ jest dobrze określona, bo dla każdego b mamy $\Psi(b)(\{0\}) = \{0\}$, $\Psi(b)(\{0,1\}) = \{0,1\}$ i dla każdego $n \geq 2$ również mamy $\Psi(b)(\{0,\ldots,n\}) = \{0,1\}$, a zatem zbiory te są te same, co dla funkcji h. Różnowartościowość Ψ jest oczywista.

391d: Zbiór wszystkich klas abstrakcji jest co najwyżej takiej mocy jak $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, czyli continuum. Pokażemy, że jest też mocy co najmniej continuum i użyjemy twierdzenia Cantora-Bernsteina. W tym celu zauważmy, że jeśli $f \sim g$, to $\mathrm{Rg}(f) = \mathrm{Rg}(g)$. (Istotnie, $k \in \mathrm{Rg}(f)$ oznacza $k = f(n)$ a więc $k \in f(\{0,\ldots,n\})$ dla pewnego n. Jeśli więc $f \sim g$, to $k \in g(\{0,\ldots,n\}) \subseteq \mathrm{Rg}(g)$.) A zatem możemy określić funkcję $\Theta : (\mathbb{N} \to \mathbb{N})/_\sim \to \mathsf{P}(\mathbb{N}) - \{\varnothing\}$, przyjmując $\Theta([f]_\sim) = \mathrm{Rg}(f)$, a ta funkcja jest oczywiście „na".

391e: Są to wszystkie liczby naturalne różne od zera i moc continuum. Uogólniając zadanie 391b, zobaczymy, że klasa wyznaczona przez funkcję $g_k = \lambda n.\, \mathsf{if}\ n = k\ \mathsf{then}\ 1\ \mathsf{else}\ n$, gdzie $k > 0$, ma dokładnie k elementów. (Nieco szczególnym ale łatwym przypadkiem jest $g_1 = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$.) W części 391d mamy przykład klasy mocy $\mathfrak{C}$, pozostaje więc pokazać, że nie ma innych możliwości.

Weźmy więc jakąś funkcję $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ i zauważmy, że ciąg zbiorów $A_n = f(\{0,\ldots,n\})$ jest wstępujący: $A_0 \subseteq A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots$ Niech $C = \{n > 0 \mid A_n = A_{n-1}\}$.

Przypadek 1: zbiór C jest skończony. Rozumujemy podobnie jak w części 391b. Jeśli $g \sim f$ i $n \notin C$, to $g(\{0,\ldots,n\}) = A_n = A_{n-1} \cup \{f(n)\}$ oraz $g(n) \notin A_{n-1}$, więc $g(n) = f(n)$. Ponieważ $g(0) = f(0)$, więc jeśli $g(n) \neq f(n)$, to $n \in C$. Zatem funkcja g może różnić się od f tylko na skończenie wielu argumentach $n \in C$, co więcej wtedy $g(n) \in A_{n-1}$, a zbiór A_{n-1} jest skończony. Jest więc tylko skończenie wiele takich funkcji.

Przypadek 2: $C = \mathbb{N} - \{0\}$. Wtedy funkcja f jest stała, bo $f(n) = f(n-1)$ dla każdego $n > 0$. Zatem klasa $[f]_\sim$ jest jednoelementowa, bo jeśli $g \sim f$, to też $g(n) \in A_n = \{f(0)\}$ dla każdego n.

Przypadek 3: zbiór C jest nieskończony, ale $C \neq \mathbb{N} - \{0\}$. Niech d będzie najmniejszą liczbą dodatnią, która nie należy do C, czyli $f(d) \notin \{f(0),\ldots,f(d-1)\}$. Wtedy na pewno $f(d) \neq f(0)$. Zbiór $C' = \{n \in C \mid n > d\}$ jest nadal nieskończony a jego zbiór potęgowy $\mathsf{P}(C')$ ma moc $\mathfrak{C}$. Określimy różnowartościowe przekształcenie $\Xi : \mathsf{P}(C') \xrightarrow{1-1} [f]_\sim$. Zrobimy to tak: dla $S \subseteq C'$:

$$\Xi(S) = \lambda n.\, \mathsf{if}\ n \in C'\ \mathsf{then}\ (\mathsf{if}\ n \in S\ \mathsf{then}\ f(0)\ \mathsf{else}\ f(d))\ \mathsf{else}\ f(n).$$

Najpierw sprawdźmy, czy Ξ jest dobrze określona, tj. czy zawsze $\Xi(S) \sim f$. Trzeba sprawdzić, że równość $A_n = \Xi(S)(\{0,\ldots,n\}) = \{\Xi(S)(0),\ldots,\Xi(S)(n)\}$ zachodzi dla dowolnego n, i zrobimy to przez indukcję. Ponieważ $0 \notin C'$, więc $A_0 = \{f(0)\} = \{\Xi(S)(0)\}$ i mamy zrobiony krok bazowy. Teraz załóżmy, że $A_{n-1} = \Xi(S)(\{0,\ldots,n{-}1\})$. Jeśli $n \notin C'$, to $\Xi(S)(n) = f(n)$, więc $A_n = \Xi(S)(\{0,\ldots,n\})$. Jeśli zaś $n \in C'$, to $0, d < n$, więc $f(0), f(d) \in A_{n-1} = A_n$ i też dobrze.

Sprawdźmy różnowartościowość funkcji Ξ. Jeśli podzbiory S_1 i S_2 zbioru C' są różne, np. $a \in S_1 - S_2$, to wtedy $\Xi(S_1)(a) = f(0) \neq f(d) = \Xi(S_2)(a)$, a więc $\Xi(S_1) \neq \Xi(S_2)$.

Pokazaliśmy, że klasa $[f]_\sim$ jest co najmniej mocy $\mathfrak{C}$, a skoro jest podzbiorem zbioru $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, to na mocy twierdzenia Cantora-Bernsteina jest dokładnie mocy $\mathfrak{C}$.

392a: Udowodnimy tezę przez indukcję *ze względu na m*. Inaczej mówiąc udowodnimy, ze każde $m \in \mathbb{N}$ ma własność $\forall k, l{:}\mathbb{N}.\, m + (k + l) = (m + k) + l$.

Po pierwsze, $0 + (k + l) = (k + l) = (0 + k) + l$, po drugie z warunku $m + (k + l) = (m + k) + l$ wynika $s(m) + (k + l) = s(m + (k + l)) = s((m + k) + l) = s(m + k) + l = (s(m) + k) + l$.

392b: Indukcja ze względu na m. Po pierwsze $0 + k = k$, a więc warunek $0 + k = 0$ oznacza, że $k = 0$. Po drugie równość $s(m) + k = s(m)$ implikuje $s(m + k) = s(m)$ (bo $s(m) + k = s(m + k)$). Zatem $m + k = m$, a więc $k = 0$ z założenia indukcyjnego.

392c: Gdyby $k+l = 0$ i $k \neq 0$, to $k = s(k')$, dla pewnego k'. Zatem $0 = k+l = s(k')+l = s(k'+l) \neq 0$, sprzeczność.

392d: Indukcja ze względu na m. Po pierwsze $0 + 0 = 0$ wynika wprost z definicji, po drugie $s(m) + 0 = s(m + 0) = s(m)$, z założenia indukcyjnego.

392e: Indukcja ze względu na m. Po pierwsze $s(0) + k = s(0 + k) = s(k) = 0 + s(k)$. Po drugie, z równości $s(m) + k = m + s(k)$ wynika $s(s(m)) + k = s(s(m) + k) = s(m + s(k)) = s(m) + s(k)$.

392f: Indukcja ze względu na m. Dla $m = 0$ wynika natychmiast z części (d). Krok indukcyjny wynika z części (e): $s(m) + k = s(m + k) = s(k + m) = s(k) + m = k + s(m)$.

411a: Elementem najmniejszym (a więc jedynym minimalnym) jest $\lambda n.\varnothing$, a największym (a więc jedynym maksymalnym) jest $\lambda n.\mathbb{N}$.

411b: Porządek ten nie jest liniowy. Na przykład nieporównywalne są funkcje $\lambda n.\{0\}$ i $\lambda n.\{1\}$.

411c: Porządek ten jest kratą zupełną. Kresem górnym dowolnego zbioru $X \subseteq \mathsf{P}(\mathbb{N})^{\mathbb{N}}$ jest funkcja $\varphi_X = \lambda n. \bigcup\{f(n) \mid f \in X\}$. Istotnie, jeśli $f \in X$, to $f(n) \subseteq \bigcup\{f(n) \mid f \in X\}$, dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$, skąd φ_X jest ograniczeniem górnym zbioru X.

A jeśli jakaś funkcja ψ jest ograniczeniem górnym zbioru X, to $f(n) \subseteq \psi(n)$ dla wszystkich $f \in X$ i wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Stąd od razu wynika, że $\varphi_X \leq \psi$.

412a: Tak. Ponieważ x jest ograniczeniem górnym zbioru X, więc zbiór $X \cup \{x\}$ jest łańcuchem. Ponieważ $X \subseteq X \cup \{x\}$, a X jest łańcuchem maksymalnym, więc $X = X \cup \{x\}$, skąd $x \in X$.

412b: Tak. Jeśli $x \leq y$, to y jest też ograniczeniem górnym zbioru X, więc $y \in X$ na mocy zadania 412a. A zatem $y \leq x$, więc $x = y$.

412c: Nie. Niech na przykład $A = \{0, 1\}$ będzie uporządkowane tak, że 0 i 1 są nieporównywalne. Wtedy $X = \{0\}$ jest łańcuchem maksymalnym, ale jego ograniczenie górne $x = 0$ nie jest elementem największym w A.

412d: Tak, bo jest ograniczeniem górnym X i należy do X.

418a: Nie ma elementu najmniejszego, bo wszystkie podzbiory zbioru $\mathcal{N}\mathrm{p}$ (i tylko one) są elementami minimalnymi. Dualnie, zbiór A jest elementem maksymalnym wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{P}\mathrm{r} \subseteq A$. Jest takich nieprzeliczalnie wiele, nie ma więc elementu największego. Elementy maksymalne (i tak samo minimalne) tworzą nieprzeliczalny antyłańcuch.

418b: Nie, bo są skończone rodziny, które nie mają ograniczenia górnego, na przykład $\{\varnothing, \mathcal{N}\mathrm{p}\}$.

418c: Tak. Niech $\mathcal{R} \subseteq \mathsf{P}(\mathbb{N})$ będzie rodziną zbiorów ograniczoną z góry przez jakiś zbiór B. Niech $B \cap \mathcal{N}\mathrm{p} = X$. Wtedy dla każdego $A \in \mathcal{R}$ mamy $A \cap \mathcal{N}\mathrm{p} = X$. Sprawdzimy, że kresem górnym rodziny $\mathcal{R}$ jest jej suma $\bigcup\mathcal{R}$. Najpierw zauważmy, że $\bigcup\mathcal{R} \cap \mathcal{N}\mathrm{p} = X$ (tu korzystamy z niepustości). Zatem jeśli $A \in \mathcal{R}$, to $A \sqsubseteq \bigcup\mathcal{R}$, więc suma jest ograniczeniem górnym. A jeśli jakiś zbiór C jest też ograniczeniem górnym, to znowu musi być porównywalny z elementami rodziny $\mathcal{R}$, więc $C \cap \mathcal{N}\mathrm{p} = X$. Ponadto $C \cap \mathcal{P}\mathrm{r} \supseteq \bigcup\mathcal{R} \cap \mathcal{P}\mathrm{r}$, więc $C \sqsupseteq \bigcup\mathcal{R}$.

418d: Tak. Niech $\zeta : \{a, b\}^* \xrightarrow[\text{na}]{1-1} \mathcal{P}\mathrm{r}$ będzie dowolną bijekcją i niech $Z(w) = \{\zeta(v) \mid v \subseteq w\}$ dla $w \in \{a, b\}^*$. Zauważmy, że $Z(w) \cap \mathcal{N}\mathrm{p} = \varnothing$ dla każdego słowa w, a zatem $Z(w) \sqsubseteq Z(v) \leftrightarrow Z(w) \subseteq Z(v)$.

Wreszcie niech $V = \mathrm{Rg}(Z) = \{Z(w) \mid w \in \{a,b\}^*\}$. Funkcja Z jest izomorfizmem z $\{a,b\}^*$ na V, bo zachodzi równoważność $v \subseteq w \leftrightarrow Z(v) \sqsubseteq Z(w)$. (Wynika z niej też różnowartościowość.) Sprawdzamy: jeśli $v \subseteq w$, oraz $n \in Z(v)$, to $n = \zeta(u)$, gdzie $u \subseteq v \subseteq w$, więc także $n = \zeta(u) \in Z(w)$. Na odwrót, jeśli $Z(v) \sqsubseteq Z(w)$, to w szczególności $\zeta(v) \in Z(w)$, bo $\zeta(v) \in Z(v)$. Ale wtedy właśnie $v \subseteq w$.

420a: W porządku $\mathcal{N}$ zero i wszystkie liczby, które mają co najmniej dwa różne czynniki pierwsze są zarówno elementami maksymalnymi jak minimalnymi. Elementem minimalnym jest jeszcze jedynka. Elementu najmniejszego ani największego nie ma, bo jest wiele elementów minimalnych i wiele maksymalnych. Słowo puste jest elementem najmniejszym w porządku $\mathcal{W}$, ale żadne słowo w nie jest maksymalne, bo $w \subsetneq wa$.

420b: Tak, na przykład $V = \{a^n b \mid n \in C\} \cup \{b^p a^k \mid p \in P \wedge k > 0\}$, gdzie C jest zbiorem wszystkich elementów minimalnych w $\mathcal{N}$. Izomorfizm $\varphi : \mathbb{N} \to V$ można określić, przyjmując

$$\varphi(n) = \begin{cases} b, & \text{jeśli } n = 1; \\ b^p a^k, & \text{jeśli } n = p^k, \text{ gdzie } p \in P \text{ i } k > 0; \\ ab, & \text{jeśli } n = 0; \\ a^n b, & \text{jeśli } n \in C - \{0,1\}. \end{cases}$$

420c: Nie. Gdyby $\langle M, \preceq \rangle$ był izomorficzny z $\mathcal{W}$, to każdy element zbioru M miałby dwa nieporównywalne następniki w M. Tymczasem dla każdego $n \neq 1$ zbiór $\{k \in \mathbb{N} \mid n \preceq k\}$ jest uporządkowany liniowo, nie ma więc nieporównywalnych następników n.

420d: Porządki $\mathcal{N}$ i $\mathcal{W}$ są dobrze ufundowane, bo $\mathcal{W}$ jest drzewem, a $\mathcal{N}$ jest sumą rozłącznych drzew. Porządki odwrotne nie są dobrze ufundowane, bo w $\mathcal{N}$ i $\mathcal{W}$ istnieją nieskończone zbiory bez elementów maksymalnych, na przykład $M = \{2^n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{N}$ i $V = \{a^n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \{a,b\}^*$.

422b: Tak. Jeśli $A \sqsubseteq B$ lub $B \sqsubseteq A$, to kresem górnym rodziny $\{A, B\}$ jest, odpowiednio, B lub A. Załóżmy więc, że A i B są nieporównywalne ze względu na relację $\sqsubseteq$. Wtedy kresem górnym jest jednoelementowy zbiór $\{m\}$, gdzie liczba m jest najmniejszą wspólną wielokrotnością wszystkich elementów sumy $A \cup B$. Liczba ta istnieje, bo $A \cup B$ jest zbiorem skończonym.

Ponieważ każdy element A i każdy element B jest dzielnikiem m, więc $A, B \sqsubseteq \{m\}$, czyli $\{m\}$ jest ograniczeniem górnym rodziny $\{A, B\}$. Sprawdzimy, czy jest to najmniejsze ograniczenie górne. Załóżmy, że jakiś zbiór C też jest ograniczeniem górnym $\{A, B\}$. Ponieważ A i B są nieporównywalne, więc $C \neq A, B$. Zatem każdy element sumy $A \cup B$ (a w takim razie także ich najmniejsza wspólna wielokrotność m) jest dzielnikiem każdego elementu C. Wynika stąd od razu, że $\{m\} \sqsubseteq C$.

422c: Tak. Zauważmy najpierw, że rodzina $\mathcal{R}$ ma dwa elementy minimalne, $\{4, 16\}$ i $\{8, 32\}$, w szczególności nie ma elementu najmniejszego. Jeśli więc jakiś zbiór C jest ograniczeniem dolnym rodziny $\mathcal{R}$, to $C \notin \mathcal{R}$. Elementami C mogą być więc tylko takie liczby, które dzielą wszystkie potęgi postaci 2^n dla $n \geq 2$, czyli liczby 1, 2 i 4. Wszystkie te liczby są dzielnikami liczby 4, więc jeśli C jest ograniczeniem dolnym rodziny $\mathcal{R}$, to $C \sqsubseteq \{4\}$. A zatem $\sup \mathcal{R} = \{4\}$, bo przecież $\{4\}$ też jest ograniczeniem dolnym.

422d: Tak. Jeśli rodzina $\mathcal{R}$ ma element najmniejszy, to jest on oczywiście kresem dolnym. W przeciwnym razie niech $\mathcal{R} \neq \varnothing$ i niech $A = \{n \in \mathbb{N} \mid \forall x\,(x \in \bigcup \mathcal{R} \to n \,|\, x)\}$. Zbiór A jest niepusty, bo $1 \,|\, x$ dla dowolnego x. Zauważmy, że jest on też skończony. Istotnie, każdy element zbioru A musi być dzielnikiem liczby $\min \bigcup \mathcal{R}$. Oczywiście wszystkie podzbiory zbioru A są wprost z definicji ograniczeniami dolnymi dla $\mathcal{R}$. I na odwrót: jeśli C jest ograniczeniem dolnym rodziny $\mathcal{R}$, to $C \subseteq A$. No bo wtedy $C \notin \mathcal{R}$ (dlaczego?), więc jeśli $c \in C$, to c jest dzielnikiem każdego elementu każdego elementu rodziny $\mathcal{R}$. Niech liczba m będzie najmniejszą wspólną wielokrotnością wszystkich elementów zbioru A. Ponieważ $m \in A$, więc singleton $\{m\}$ jest największym elementem $\mathsf{P}(A)$, ze względu na porządek $\sqsubseteq$. A zatem $\inf \mathcal{R} = \{m\}$.

422e: Nie. Nie istnieje element największy (czyli kres dolny pustej rodziny) bo każdy jego element musiałby być wielokrotnością każdej liczby naturalnej.

423b: Nie. Rodzina $\{\{2,3\},\{2,5\}\}$ nie jest ograniczona z dołu, nie ma więc kresu dolnego. Istotnie, gdyby $C \sqsubseteq \{2,3\}$ i $C \sqsubseteq \{2,5\}$, to mielibyśmy $C \subseteq \{2,3\}$ i $C \subseteq \{2,5\}$, a zatem $C = \{2\}$, bo $C \neq \varnothing$. Ale $\{2\} \not\sqsubseteq \{2,3\}$, gdyż nie istnieje takie $x \in \{2\}$, że $x \,|\, 3$.

423c: Nie. Rodzina $\{\{2,3\},\{2,5\}\}$ nie jest ograniczona z góry, nie ma więc kresu górnego. Do każdego zbioru D ograniczającego z góry rodzinę $\{\{2,3\},\{2,5\}\}$ należy liczba 5. W takim razie $\{2,3\} \not\sqsubseteq D$, gdyż nie istnieje takie $x \in \{2,3\}$, że $x \mid 5$.

423d: Tak. Pokażemy, że jeśli L jest niepustym łańcuchem, to $\bigcup L = \sup L$. Najpierw sprawdźmy, czy suma jest ograniczeniem górnym dla L. Niech więc $A \in L$. Wtedy oczywiście $A \subseteq \bigcup L$, rozpatrzmy więc jakieś $y \in \bigcup L$ i poszukajmy takiego $x \in A$, że $x \mid y$. Skoro $y \in \bigcup L$, to $y \in B$ dla pewnego $B \in L$. Zbiory A i B należą do łańcucha, więc albo $A \sqsubseteq B$ albo $B \sqsubseteq A$. Jeśli $A \sqsubseteq B$, to poszukiwane x istnieje wprost z definicji $\sqsubseteq$. W drugim przypadku $y \in A$ oraz $y \mid y$, więc wystarczy po prostu $x = y$.

Niech teraz jakiś zbiór C będzie ograniczeniem górnym łańcucha L. Pokażemy, że $\bigcup L \sqsubseteq C$. Ponieważ $A \subseteq C$ dla wszystkich $A \in L$, więc oczywiście $\bigcup L \subseteq C$. Dalej, niech $y \in C$. Ponieważ $L \neq \varnothing$, więc L ma jakiś element, powiedzmy B. Wtedy $B \sqsubseteq C$, skąd istnieje takie $x \in B$, że $x \mid y$. Ponieważ $x \in B$, więc tym bardziej $x \in \bigcup L$.

424: Zbiór liczb pierwszych nie ma kresu górnego w $\langle \mathbb{N}_+, \mid \rangle$, bo nie ma żadnych ograniczeń górnych. Nie ma bowiem liczby podzielnej przez wszystkie liczby pierwsze. Z podobnego powodu zbiór pusty nie ma kresu dolnego: taki kres byłby elementem największym w $\langle \mathbb{N}_+, \mid \rangle$, czyli byłby podzielny przez wszystkie liczby naturalne dodatnie.

425: Niech B będzie n-elementowym podzbiorem częściowego porządku $\langle Z, \leq \rangle$. Przez indukcję ze względu na n dowodzimy, że jeśli $n > 0$, to B ma kres górny. Dla $n = 0$ implikacja jest trywialna, dla $n = 1$ mamy zbiór jednoelementowy, którego kresem jest jego jedyny element. Dla $n = 2$ teza wynika wprost z założenia. Rozpatrzmy więc przypadek $n \geq 3$ i załóżmy, że wszystkie niepuste zbiory mniej niż n-elementowe mają kresy górne. Zbiór B możemy przedstawić jako sumę $B = A \cup \{a\}$, gdzie $a \notin A$ i A ma $n-1$ elementów, a zatem ma kres górny $\alpha = \sup A$. Dwuelelementowe zbiory też mają kresy górne, niech więc $\beta = \sup\{\alpha, a\}$. Pokażemy, że $\beta = \sup B$.

Najpierw zauważmy, że β ogranicza B z góry. Jeśli bowiem $x \in B$, to albo $x = a$ albo $x \in A$ i wtedy $x \leq \alpha$. W obu przypadkach $a \leq \sup\{\alpha, a\} = \beta$. Teraz przypuśćmy, że jakiś element $d \in Z$ jest ograniczeniem górnym B. Wtedy $d \geq A$, skąd $d \geq \alpha$ (bo $\alpha = \sup A$) oraz $d \geq a$. Ale to znaczy, że $d \geq \{\alpha, a\}$, a więc $d \geq \sup\{\alpha, a\} = \beta$.

426: Zauważmy, że $\langle \mathcal{R}, \preceq_X \rangle$ jest porządkiem częściowym wtedy i tylko wtedy, gdy:

- $0 \in X$;
- $\forall x : \mathbb{R}\, (x \in X \wedge -x \in X \to x = 0)$;
- $\forall x, y : \mathbb{R}\, (x \in X \wedge y \in X \to x + y \in X)$.

Istotnie, pierwszy warunek jest równoważny zwrotności, drugi antysymetrii, a trzeci przechodniości. Zatem nie są porządne zbiory z punktów (b), (d) i (f), ze względu na brak odpowiednio zwrotności, antysymetrii i przechodniości. Pozostałe zbiory spełniają wszystkie warunki, więc są porządne.

427a: Tak. Załóżmy, że x jest elementem największym w $\langle \mathbb{R}, \preceq_X \rangle$. Wówczas $x - 1 \preceq_X x$, więc $1 \in X$, a w konsekwencji $x \preceq_X x + 1$, co jest sprzeczne z naszym założeniem.

427b: Nie. W porządku $\langle \mathcal{R}, \preceq_{\{0\}} \rangle$ wszystkie elementy są minimalne.

427c: Tak. Zauważmy, że dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzi równość $(y+1)-(x+1) = y-x$. Oznacza to, że $x \preceq_X y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x+1 \preceq_X y+1$. Zatem c jest ograniczeniem górnym zbioru B wtedy i tylko wtedy, gdy $c+1$ jest ograniczeniem górnym zbioru $B' = \{b+1 \mid b \in B\}$. W szczególności, jeśli $a = \sup B$, to $a+1$ jest ograniczeniem górnym B'. Jest to najmniejsze ograniczenie, bo jeśli $B' \preceq_X c$, to $B \preceq_X c-1$, skąd $a \preceq_X c-1$ i wreszcie $a+1 \preceq_X c$. A więc $a+1 = \sup B'$. Podobnie dowodzimy implikacji odwrotnej.

427d: Nie. W porządku $\langle \mathbb{R}, \preceq_X \rangle$ dla zbioru X z zadania 426f, zbiór $\{1, -\pi, 1-\pi\}$ jest skierowany (bo $1 \preceq_X 1-\pi$ i $-\pi \preceq_X 1-\pi$), ale nie jest łańcuchem (bo 1 i $-\pi$ są nieporównywalne).

427e: Tak. Implikacja w prawą stronę jest oczywista. Żeby pokazać implikację w lewą stronę, załóżmy, że w pewnym porządku $\langle \mathbb{R}, \preceq_X \rangle$ przedział (a, b) jest łańcuchem, i rozpatrzmy dowolne $x, y \in \mathbb{R}$. Niech n będzie dostatecznie dużą liczbą naturalną, żeby $|\frac{y-x}{n}| < b - a$. Wówczas dla pewnych $a', b' \in (a, b)$ zachodzi $b' - a' = \frac{y-x}{n}$, co oznacza, że $\frac{y-x}{n} \in X$ lub $\frac{x-y}{n} \in X$. Przypuśćmy, że $\frac{y-x}{n} \in X$. Wiemy już, że suma liczb ze zbioru X musi należeć do X, skąd przez łatwą indukcję wynika $y - x = n \cdot \frac{y-x}{n} \in X$.

A więc $x \preceq_X y$. W drugim przypadku analogicznie otrzymujemy $y \preceq_X x$. Ponieważ liczby x i y były wybrane dowolnie, porządek $\langle \mathbb{R}, \preceq_X \rangle$ jest liniowy.

429: Dla $A \in \mathcal{C}$, niech $h(A)$ będzie maksymalną długością słowa w A. Funkcja $h : \mathcal{C} \to \mathbb{N}$ jest dobrze zdefiniowana, bo każdy zbiór $A \in \mathcal{C}$ jest skończony. Pokażemy najpierw, że dla $A, B \in \mathcal{C}$, jeśli $A \prec B$ (tzn. $A \preceq B$ oraz $A \neq B$), to $h(A) < h(B)$. Przypuśćmy więc, że $A, B \in \mathcal{C}$ oraz $A \prec B$. Wtedy istnieje takie $w \in \mathbb{N}^*$, że $A = \{u \in \mathbb{N}^* \mid wu \in B\}$. Jeśli $w = \varepsilon$, to $A = \{u \in \mathbb{N}^* \mid u \in B\} = B$, sprzeczność. Zatem $|w| > 0$. Niech $u \in A$ będzie słowem o maksymalnej długości w A. Wtedy $wu \in B$ oraz $|wu| > |u|$.

429a: Tak. Niech $A \in \mathcal{C}$. Ponieważ $u = \varepsilon u$ dla dowolnego $u \in \mathbb{N}^*$, to $A = \{u \in \mathbb{N}^* \mid \varepsilon u \in A\}$. Stąd $A \preceq A$. Zatem $\preceq$ jest zwrotna. Niech $A, B, C \in \mathcal{C}$, $A \preceq B$ oraz $B \preceq C$. Wtedy istnieją takie $w_1, w_2 \in \mathbb{N}^*$, że $A = \{u \in \mathbb{N}^* \mid w_1 u \in B\}$ oraz $B = \{u \in \mathbb{N}^* \mid w_2 u \in C\}$. Pokażemy, że $A = \{u \in \mathbb{N}^* \mid w_2 w_1 u \in C\}$. Jeśli $u \in A$ to $w_1 u \in B$, skąd $w_2 w_1 u \in C$. Jeśli $u \in \mathbb{N}^*$ jest takie, że $w_2 w_1 u \in C$, to $w_1 u \in B$, skąd $u \in A$. Zatem $A \preceq C$. Udowodniliśmy więc, że $\preceq$ jest przechodnia. Niech $A, B \in \mathcal{C}$, $A \preceq B$ oraz $B \preceq A$. Jeśli $A \neq B$, to $h(A) < h(B) < h(A)$. Sprzeczność. Zatem $A = B$. Dowodzi to antysymetryczności $\preceq$.

429b: Ten porządek ma nieskończony antyłańcuch, a zatem nie jest liniowy. Niech $A_n = \{\varepsilon, n\} \in \mathsf{P}(\mathbb{N}^*)$ dla $n \in \mathbb{N}$. Łatwo sprawdzić, że $A_n \in \mathcal{C}$ dla $n \in \mathbb{N}$. Przypuśćmy, że $A_n \preceq A_m$ dla pewnych $n, m \in \mathbb{N}$. Wtedy istnieje takie $w \in \mathbb{N}^*$, że $A_n = \{u \in \mathbb{N}^* \mid wu \in A_m\}$. W szczególności $wn \in A_m$, skąd wynika $wn = m$, co jest możliwe tylko gdy $w = \varepsilon$ i $n = m$. Zatem $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ jest nieskończonym antyłańcuchem.

429c: Elementem najmniejszym jest $M = \{\varepsilon\}$. Istotnie, niech $A \in \mathcal{C}$ i niech $w \in A$ będzie słowem o maksymalnej długości. Zatem $\{u \in \mathbb{N}^* \mid wu \in A\} = \{\varepsilon\} = M$. Wynika stąd $M \preceq A$. Oczywiście M jest też elementem minimalnym.

431: (a $\Rightarrow$ b) Oczywiście $f(a) \leq f(a)$, więc z warunku (a) wynika $a \leq g(f(a))$. Podobnie z $g(b) \leq g(b)$ otrzymamy $f(g(b)) \leq b$.

(b $\Rightarrow$ a) Przypuśćmy, że $a \leq g(b)$. Z monotoniczności mamy $f(a) \leq f(g(b))$, a z warunku (b) także $f(g(b)) \leq b$. Stąd $f(a) \leq b$. Implikacja odwrotna ma analogiczne uzasadnienie.

434: Łatwo widzieć, że funkcja $g : A \times A \to A \times A$ z zadania 433 jest bijekcją. Rozpatrzmy obraz $g(\leq)$ relacji $\leq$. Z monotoniczności funkcji f wynika (por. zad. 433a), że $g(\leq)$ jest podzbiorem $\leq$. Obcięcie funkcji g do relacji $\leq$ jest więc różnowartościowym przekształceniem skończonego zbioru $\leq$ w siebie, a jako takie musi być także na zbiór $\leq$. Inaczej mówiąc, obraz $g(\leq)$ jest równy relacji $\leq$.
Aby udowodnić, że f jest izomorfizmem, wystarczy więc skorzystać z zadania 433b.

438a: Niech X i Y będą zbiorami współkońcowymi. Pokażemy, że $X \cup Y$ też jest współkońcowy. Weźmy dowolne $a \in A$. Ponieważ X jest współkońcowy, więc istnieje takie $x \in X$, że $a \leq x$. A zatem $a \leq x$, dla pewnego $x \in X \cup Y$.

438b: Niekoniecznie. Zbiory liczb parzystych $\mathcal{P}\mathrm{r}$ i nieparzystych $\mathcal{N}\mathrm{p}$ są współkońcowe w $\mathbb{N}$ ze zwykłym porządkiem. Istotnie, dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieje zarówno liczba parzysta, jak i nieparzysta większa od n. Jednocześnie $\mathcal{N}\mathrm{p} \cap \mathcal{P}\mathrm{r} = \varnothing$, a zbiór pusty nie jest współkońcowy.

438c: Niech $L \subseteq A$ będzie współkońcowym łańcuchem ograniczonym z góry i niech n będzie tym ograniczeniem. Pokażemy, że n jest elementem największym w A. Rozpatrzmy dowolny $a \in A$. Ponieważ L jest współkońcowy, więc istnieje takie $x \in L$, że $a \leq x$, a skoro $L \leq n$, to $a \leq x \leq n$.

438d: Nie. W zbiorze $\{0, 1\}$ z porządkiem dyskretnym (tzn. $x \leq y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = y$) nie istnieje żaden łańcuch współkońcowy, a zatem każdy łańcuch współkońcowy jest ograniczony z góry. Jednocześnie nie istnieje w tym porządku element największy.

438e : Nie. Rozpatrzmy zbiór $A = \mathbb{N} \oplus \mathbb{N}$, tak uporządkowany relacją $\preceq$, że nierówność $\langle n \rangle_i \preceq \langle m \rangle_j$ zachodzi (dla $n, m \in \mathbb{N}$ oraz $i, j \in \{1, 2\}$) wtedy i tylko wtedy, gdy $n \leq m$ oraz $i \leq j$. Zbiór A jest skierowany, bo dowolne dwa elementy $\langle n \rangle_i$ i $\langle m \rangle_j$ są ograniczone z góry przez $\langle \max\{n, m\} \rangle_{\max\{i,j\}}$. Jego podzbiór $\mathbb{N}_1 = \{\langle n \rangle_1 \mid n \in \mathbb{N}\}$ jest łańcuchem, który nie ma ograniczenia górnego. Ale nie jest współkońcowy, bo nie istnieje taki element $x \in \mathbb{N}_1$, że $\langle 0 \rangle_2 \leq x$.

440a: Nie. Niech na przykład $A = \mathbb{N}$ i niech $\leq$ będzie zwykłym porządkiem w $\mathbb{N}$. Rozpatrzmy łańcuch zbiorów $\mathcal{R} = \{X_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, gdzie $X_i = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq i\}$. Wtedy $\bigcap \mathcal{R} = \varnothing$, a więc również $(\bigcap \mathcal{R})\!\downarrow = \varnothing$. Jednocześnie dla każdego $i \in \mathbb{N}$ mamy $\mathcal{X}_i\!\downarrow = \mathbb{N}$, a więc $\bigcap\{X_i\!\downarrow \mid i \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}$.

440b: Niech $S \subseteq (X \cup Y)\!\downarrow$. Przypuśćmy, że $S \not\subseteq X\!\downarrow$ i $S \not\subseteq Y\!\downarrow$. A zatem istnieją takie $x, y \in S$, że $x \in X\!\downarrow - Y\!\downarrow$ i $y \in Y\!\downarrow - X\!\downarrow$. Ale ponieważ S jest skierowany, więc $x, y \leq z$ dla pewnego $z \in S$. Skoro $S \subseteq (X \cup Y)\!\downarrow$, to jest takie $c \in X \cup Y$, że $z \leq c$. Jeśli $c \in X$, to $y \in X\!\downarrow$, bo $y \leq z \leq c$, w przeciwnym razie analogicznie $x \in Y\!\downarrow$. Tak czy owak, dostajemy sprzeczność.

440c: Nie. Niech na przykład $A = \mathbb{N}$ i niech $\leq$ będzie relacją podzielności, tj. $m \leq n$ wtedy i tylko wtedy, gdy m jest dzielnikiem n. Przyjmijmy $X = \{24\}$ i $Y = \{60\}$. Zbiór $S = \{3, 4, 12\}$ jest skierowany i zawarty w iloczynie $X\!\downarrow \cap Y\!\downarrow$, ale nie jest zawarty w pustym zbiorze $(X \cap Y)\!\downarrow$.

441a: Elementem najmniejszym (a więc jedynym minimalnym) jest $\lambda n.\ {-1}$. Elementów maksymalnych (a więc i największego) nie ma. Istotnie, dla dowolnego $f \in M^{\mathbb{N}}$ istnieje takie g, że $f < g$, na przykład $g(n) = \mathsf{if}\ f(n) \in \mathbb{N}\ \mathsf{then}\ f(n) + 1\ \mathsf{else}\ 0$.

441b: Nie. Na przykład nieporównywalne są funkcje $\lambda n.\mathsf{if}\ 2|n\ \mathsf{then}\ 0\ \mathsf{else}\ 1$ i $\lambda n.\mathsf{if}\ 2|n\ \mathsf{then}\ 1\ \mathsf{else}\ 0$.

441c: Niech $X \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ i niech $X \neq \varnothing$. Kresem dolnym X jest funkcja $f_X = \lambda n.\ \min\{f(n) \mid f \in X\}$. Funkcja ta jest dobrze określona, ponieważ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zbiór $T_n = \{f(n) \mid f \in X\}$ jest niepustym podzbiorem $\mathbb{N}$. Oczywiście $f_X \leq f$ dla dowolnego $f \in X$. Ponadto f_X jest najmniejszym ograniczeniem dolnym X, gdyż każda funkcja g, która jest ograniczeniem dolnym X, musi dla każdego n spełniać warunek $g(n) \leq \min T_n$, co jest równoważne z $g \leq f_X$.

Nie każdy podzbiór $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ma kres górny, np. sam zbiór $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ nie jest w ogóle ograniczony w $M^{\mathbb{N}}$.

441d: Zauważmy najpierw, że porządek w L jest izomorficzny z porządkiem na liczbach naturalnych, więc każdy niepusty podzbiór L ma element najmniejszy. Niech $X \subseteq L^{\mathbb{N}}$ będzie niepuste. Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ określamy zbiór $T_n = \{f(n) \mid f \in X\}$. Oczywiście T_n jest niepusty, a więc ma element najmniejszy.

Kresem dolnym X jest funkcja $f_X = \lambda n.\ \min T_n$. Oczywiście $f_X \leq f$ dla dowolnego $f \in X$. Ponadto f_X jest największym ograniczeniem dolnym X, gdyż każda funkcja g, która jest ograniczeniem dolnym X, musi dla każdego n spełniać warunek $g(n) \leq \min T_n$, co jest równoważne z $g \leq f_X$.

Kres górny dowolnego niepustego $X \subseteq L^{\mathbb{N}}$ również istnieje. Niech $T_n = \{f(n) \mid f \in X\}$ i niech

$$g_X(n) = \begin{cases} \max T_n, & \text{jeśli } \max T_n \text{ jest określony;} \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}.$$

Oczywiście g_X jest ograniczeniem górnym zbioru X. Aby wykazać, że jest najmniejszym ograniczeniem górnym, załóżmy, że pewne $g \in M^{\mathbb{N}}$ jest ograniczeniem górnym X. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$, liczba $g(n)$ jest wtedy ograniczeniem górnym zbioru T_n. Jeśli istnieje $\max T_n$, to od razu mamy $g_X(n) \leq g(n)$. Jeśli nie, to zbiór T_n nie jest ograniczony z góry przez żadną liczbę ujemną, więc $g(n) \geq 0 = g_X(n)$.

441e: Nie, np. funkcje $g_i = \lambda n.\ \mathsf{if}\ n < i\ \mathsf{then}\ 0\ \mathsf{else}\ 1$ tworzą nieskończony ciąg malejący.

441f: Tak. Nieskończony łańcuch tworzą np. funkcje stałe $\lambda n.c$ dla $c \in \mathbb{N}$.

441g: Tak. Nieskończony antyłańcuch tworzą np. funkcje $f_i = \lambda n.\ \mathsf{if}\ n = i\ \mathsf{then}\ 1\ \mathsf{else}\ 0$ dla $i \in \mathbb{N}$. Istotnie, dla $i \neq j$ funkcje f_i i f_j są nieporównywalne, bo $f_i(i) \not\leq f_j(i)$ i $f_i(j) \not\geq f_j(j)$.

442a: Nie, np. częścią wspólną zbiorów $X = \{1, 2, 3, 12\}$ i $Y = \{1, 3, 4, 12\}$ uporządkowanych przez podzielność jest liniowy porządek $Z = \{1, 3, 12\}$.

442b: Nie, np. przecięciem liniowych porządków $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ i $\langle \mathbb{N}, \geq \rangle$ jest relacja równości na $\mathbb{N}$, a więc porządek częściowy, który nie jest liniowy.

442c: Nie, np. w zbiorach $X = \{2, 3, 60, 90\}$ oraz $Y = \{3, 5, 60, 90\}$, uporządkowanych przez podzielność, nie istnieją kresy dolne zbioru $A = \{60, 90\}$. Kres ten istnieje w zbiorze $Z = \{3, 60, 90\}$ i jest równy 3.

442d: Nie, np. dla $X = \{2, 3, 5, 7, 35, 30030\}$ i $Y = \{5, 7, 11, 13, 35, 30030\}$ uporządkowanych przez podzielność, mamy $30030 = \sup_X\{2, 3, 5, 7\} = \sup_Y\{5, 7, 11, 13\}$, ale w $Z = X \cap Y = \{5, 7, 35, 30030\}$ mamy $\sup_Z A \cap B = \sup_Z\{5, 7\} = 35$.

443a: Zwrotność i przechodniość są oczywistymi konsekwencjami zwrotności i przechodniości zwykłej relacji $\leq$. Aby wykazać antysymetrię załóżmy, że $\langle f_1, f_2 \rangle \preceq \langle g_1, g_2 \rangle$ oraz $\langle g_1, g_2 \rangle \preceq \langle f_1, f_2 \rangle$. Wtedy dla każdego n zachodzi równość $2^{f_1(n)} \cdot 3^{f_2(n)} = 2^{g_1(n)} \cdot 3^{g_2(n)}$. Ale każda liczba ma tylko jeden rozkład na czynniki pierwsze, więc $f_1(n) = g_1(n)$ i $f_2(n) = g_2(n)$. Tak jest dla każdego n, więc $f_1 = g_1$ i $f_2 = g_2$.

443b: W porządku $\preceq$ nie ma elementów maksymalnych (a zatem i elementu największego). Istotnie, dla dowolnej pary funkcji $\langle f_1, f_2\rangle$ zachodzi $\langle f_1, f_2\rangle \prec \langle \lambda x.f_1(x) + 1, f_2\rangle$, a zatem $\langle f_1, f_2\rangle$ nie jest elementem maksymalnym. Z kolei elementem najmniejszym w tym porządku (a więc jedynym minimalnym) jest para $\langle \lambda x.0, \lambda x.0\rangle$, gdyż dla dowolnej pary $\langle f_1, f_2\rangle$ i dowolnego n zachodzi $2^0 3^0 = 1 \leq 2^{f_1(n)} 3^{f_2(n)}$.

443c: Rozpatrzmy zbiór dwuelementowy $\{\langle f_1, f_2\rangle, \langle g_1, g_2\rangle\}$. Jego kresem górnym jest para $\langle h_1, h_2\rangle$ określona tak: jeśli $2^{f_1(n)} \cdot 3^{f_2(n)} \leq 2^{g_1(n)} \cdot 3^{g_2(n)}$, to $h_1(n) = g_1(n)$ i $h_2(n) = g_2(n)$, a w przeciwnym razie $h_1(n) = f_1(n)$ i $h_2(n) = f_2(n)$. Analogicznie definiujemy kres dolny.

443d: Takim łańcuchem jest na przykład zbiór wszystkich par postaci $\langle \lambda x.\, n, \mathrm{id}_{\mathbb{N}}\rangle$, dla $n \in \mathbb{N}$.

443e: Niech $f_k = \lambda x.\, \mathsf{if}\ x < k\ \mathsf{then}\ 0\ \mathsf{else}\ kx$. Wtedy pary postaci $\{\lambda x.\, 0, f_k\rangle$, dla $k > 0$, tworzą nieskończony antyłańcuch (zauważmy, że $\mathrm{id}_{\mathbb{N}} = f_1$). Istotnie, niech $k \neq \ell$, na przykład $k < \ell$. Wtedy $f_k(k) = k^2 > f_\ell(k) = 0$ oraz $f_k(\ell) = k\ell < f_\ell(\ell) = \ell^2$, Ponieważ $2^0 3^{k^2} > 2^0 3^0$ i $2^0 3^{k\ell} < 2^0 3^{\ell^2}$, więc pary $\langle \lambda x.\, 0, f_k\rangle$ i $\langle \lambda x.\, 0, f_\ell\rangle$ są nieporównywalne.

444a: Zwrotność wynika wprost z definicji. Przechodniość: jeśli $x \leq_A y \leq_A z$, to w jedynym nieoczywistym przypadku $F(x) <_B F(y) <_B F(z)$ korzystamy z przechodniości relacji $<_B$. Antysymetria: przypadek $F(x) <_B F(y) <_B F(x)$ jest niemożliwy, bo wtedy $F(x) \leq_B F(y) \leq_B F(x)$, a więc $F(x) = F(y)$ z antysymetrii relacji $\leq_B$, skąd dostajemy sprzeczność. W pozostałych przypadkach zachodzi równość $x = y$.

444b: Załóżmy, że porządek $\leq_A$ jest liniowy. Aby sprawdzić, że wtedy $\leq_B$ jest też liniowy, weźmy dowolne elementy $u, v \in B$. Jeśli $u = v$, to u i v są oczywiście porównywalne, więc zakładamy, że $u \neq v$. Ponieważ F jest surjekcją, więc są takie $x, y \in A$, że $F(x) = u$ i $F(y) = v$. Z liniowości relacji $\leq_A$ wynika, że x i y są porównywalne, np. $x \leq_A y$. Wtedy albo $x = y$ (a to jest niemożliwe, bo $F(x) = u \neq v = F(y)$) albo $u = F(x) <_B F(y) = v$, w szczególności u i v są porównywalne.

Funkcja F musi być różnowartościowa, bo jeśli x, y są porównywalne i $x \neq y$, to albo $F(x) <_B F(y)$ albo $F(y) <_B F(x)$, w szczególności $F(y) \neq F(x)$.

Dla dowodu implikacji odwrotnej rozpatrzmy dowolne $x, y \in A$. Przypadek $x = y$ jest trywialny, więc niech $x \neq y$. Wtedy $F(x) \neq F(y)$, bo F jest różnowartościowa, a więc albo $F(x) <_B F(y)$ albo $F(y) <_B F(x)$, bo porządek $\leq_B$ jest liniowy. No to $x \leq_A y$ albo $y \leq_A x$.

444c: Nie zawsze. Na przykład niech $B = \{1, 2, 3\}$ i jako relację $\leq_B$ wybierzmy $\mathbf{1}_B \cup \{\langle 1, 3\rangle, \langle 2, 3\rangle\}$. Mamy wtedy $3 = \sup\{1, 2\}$. Teraz niech $A = \{10, 20, 30, 31\}$ oraz $F(10) = 1$, $F(20) = 2$ i $F(30) = F(31) = 3$. Zbiór $\{10, 20\} = F^{-1}(\{1, 2\})$ ma dwa nieporównywalne ograniczenia górne 30 i 31, a więc nie ma kresu górnego.

444d: Tak. Przypuśćmy, że w zbiorze A istnieje kres $x = \sup F^{-1}(X)$. Pokażemy, że zbiór X ma kres górny w zbiorze B. Jeśli X ma element największy, to element ten jest także kresem górnym.

Jeśli natomiast w zbiorze X nie ma elementu największego, to pokażemy, że $F(x) = \sup X$. Zaczniemy od tego, że dla dowolnego $u \in X$ istnieje takie $y \in A$, że $F(y) = u$. Wtedy $y \in F^{-1}(X)$, więc $y \leq_A x$, co oznacza albo $y = x$ albo $F(y) <_B F(x)$. W każdym razie $u \leq_B F(x)$. Pokazaliśmy w ten sposób, że $F(x)$ jest ograniczeniem górnym dla X.

Aby pokazać, że to ograniczenie jest najmniejsze, rozpatrzmy jakiekolwiek ograniczenie górne v. Funkcja F jest surjekcją, więc $v = F(z)$ dla pewnego $z \in A$. Udowodnimy, że z musi być ograniczeniem górnym zbioru $F^{-1}(X)$. W tym celu rozpatrzmy dowolne $y \in F^{-1}(X)$. Wtedy $F(y) \in X$, więc $F(y) \leq_B v = F(z)$. Równość $F(y) = F(z)$ oznaczałaby, że $v = F(z) \in X$, a zatem v byłby elementem największym zbioru X. Pozostaje więc przypadek $F(y) <_B F(z)$, a wtedy $y \leq_A z$. A zatem z jest ograniczeniem górnym zbioru $F^{-1}(X)$, skąd $x \leq_A z$, więc wprost z definicji $F(x) \leq_B F(z) = v$.

Uwaga: Jeśli zbiór X ma element największy, to nie zawsze jest tak, że $F(\sup F^{-1}(X)) = \sup X$. Na przykład niech $B = \{1, 2\}$ będzie tak uporządkowany, że $1 \leq_B 2$. Weźmy $A = \{10, 11, 20\}$ i taką funkcję F, że $F(10) = F(11) = 1$ oraz $F(20) = 2$. Dla $X = \{1\}$ mamy $F^{-1}(X) = \{10, 11\}$ i mamy $\sup\{10, 11\} = 20$ w zbiorze A. Tymczasem kresem górnym podzbioru X w zbiorze B jest 1, a nie 2.

445: Ten porządek nie jest liniowy, bo np. zbiory $\{0, 1\}$ i $\{0, 2\}$ nie są porównywalne. Nie jest też dobrze ufundowany, bo zbiory $A_n = \mathbb{N} - \{i : \mathbb{N} \mid 0 < i \leq n\}$ tworzą nieskończony ciąg malejący. Elementem najmniejszym (a więc jedynym minimalnym) jest $\{0\}$, natomiast elementów maksymalnych (tym bardziej największych) nie ma. Jeśli bowiem $\min A = n$, to w naszym porządku $A < \{n+1\}$. Brak elementu największego implikuje, że nasz zbiór nie jest kratą zupełną.

446a: Niech podstawa B będzie minimalna i niech $x, y \in B$. Jeśli $x \leq y$ to $B - \{y\}$ jest podstawą – sprzeczność. Zatem minimalna podstawa jest antyłańcuchem. Na odwrót, jeśli podstawa B jest antyłańcuchem, to jest minimalna. Istotnie, jeśli $C \subsetneq B$, np. $b \in B - C$, to C nie jest podstawą, bo nie istnieje takie $c \in C$, że $c \leq b$. Oczywiście nie każdy antyłańcuch jest podstawą, np. zbiór pusty nie jest podstawą zbioru $\mathbb{N}$.

446b: Nie, na przykład zbiór liczb całkowitych $\mathbb{Z}$ nie ma minimalnej podstawy. Każdy antyłańcuch w $\mathbb{Z}$ jest jednoelementowy, a jeśli podstawa jest jednoelementowa to ten element jest minimalny.

447a: Nie. Niech na przykład $\mathcal{S} = \{\{0,1\}, \{0,2\}\}$. Wtedy $\{0,1\} \preceq_{\mathcal{S}} \{0,2\}$ i $\{0,2\} \preceq_{\mathcal{S}} \{0,1\}$, więc relacja nie jest antysymetryczna.

447b: Tak. Przypuśćmy, że $\preceq_{\mathcal{S}}$ jest częściowym porządkiem i niech $f : \mathcal{S} \to (\mathbb{N} \cup \{\aleph_0\}) \times \mathbb{N}$ będzie taka, że $f(A) = \langle \overline{\overline{A}}, \min A \rangle$. Zauważmy, że $f(A) = f(B)$ implikuje $A \preceq_{\mathcal{S}} B$ i $B \preceq_{\mathcal{S}} A$, a więc $A = B$ z antysymetrii. Funkcja f jest więc różnowartościowa. Ponieważ zbiór $(\mathbb{N} \cup \{\aleph_0\}) \times \mathbb{N}$ jest przeliczalny, więc i $\mathcal{S}$ jest przeliczalny.

447c: Tak. Zwrotność i przechodniość relacji $\preceq_{\mathcal{S}}$ jest oczywista. Udowodnimy antysymetrię. Jeśli dla $A, B \in \mathcal{S}$ zachodzi $A \preceq_{\mathcal{S}} B$ i $B \preceq_{\mathcal{S}} A$, to A i B mają ten sam element najmniejszy, a więc $A \cap B \neq \varnothing$. Ponieważ rodzina $\mathcal{S}$ jest podziałem, więc z $A \cap B \neq \varnothing$ wynika $A = B$.

447d: Tak. Relacja $\preceq_{\mathcal{S}}$ zawsze jest spójna, więc jeśli jest częściowym porządkiem, to jest to porządek liniowy. Niech $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{S}$ będzie niepusty i niech $\alpha \in \mathbb{N} \cup \{\aleph_0\}$ będzie najmniejszą taką liczbą, że $\alpha = \overline{\overline{A}}$ dla pewnego $A \in \mathcal{V}$. Dalej, niech $m = \min\{\min A \mid A \in \mathcal{V} \wedge \overline{\overline{A}} = \alpha\}$. Najmniejszym elementem $\mathcal{V}$ jest taki zbiór $A \in \mathcal{V}$, że $\overline{\overline{A}} = \alpha$ i $\min A = m$.

448a: Tak. Zwrotność wynika wprost z definicji podniesienia (warunek $f = g$). Żeby wykazać antysymetrię, załóżmy, że równocześnie zachodzą warunki $f \preccurlyeq_A^B g$ i $g \preccurlyeq_A^B f$. Jeśli $f \neq g$, to z pierwszego warunku wynika, że dla pewnego $b_0 \in B$ zachodzi $f(b_0) <_A g(b_0) \wedge \forall b' <_B b_0 . f(b') = g(b')$. W takim razie nierówność $g(b_1) <_A f(b_1)$ może zachodzić tylko dla $b_1 >_B b_0$, co wyklucza zachodzenie warunku $\forall b' <_B b_1 . \, g(b') = f(b')$, a w konsekwencji także drugiego z założonych warunków. Zatem $f = g$.

Żeby wykazać przechodniość, załóżmy, że $f \preccurlyeq_A^B g \preccurlyeq_A^B h$. Jeśli $f = g$ lub $g = h$, to $f \preccurlyeq_A^B h$ z oczywistych względów. W przeciwnym razie dla pewnych $b_0, b_1 \in B$ zachodzą warunki

$$f(b_0) <_A g(b_0) \wedge \forall b' <_B b_0 . f(b') = g(b') \text{ oraz } g(b_1) <_A h(b_1) \wedge \forall b' <_B b_1 . g(b') = h(b').$$

Niech b będzie mniejszym z elementów b_0, b_1 w porządku $\leq_B$. Wówczas dla każdego $b' <_B b$ mamy $f(b') = g(b') = h(b')$, a ponadto:

- $f(b) <_A g(b) \leq_A h(b)$, gdy $b_0 <_B b_1$,
- $f(b) <_A g(b) <_A h(b)$, gdy $b_0 = b_1$,
- $f(b) \leq_A g(b) <_A h(b)$, gdy $b_0 >_B b_1$.

W każdym z powyższych przypadków $f(b) <_A h(b)$, więc ostatecznie $f \preccurlyeq_A^B h$.

448b: Nie. Niech $\leq_A$ będzie zwykłym porządkiem na zbiorze $A = \{0, 1\}$, natomiast $\leq_B$ zwykłym porządkiem na zbiorze $B = \mathbb{Z} - \mathbb{N}$. Wówczas, pomimo liniowości $\leq_A$, funkcje $\lambda n.0$ oraz $\lambda n.1$ są nieporównywalne w porządku $\preccurlyeq_A^B$.

448c: Oznaczmy $\leq$-podniesienie porządku $\subseteq$ przez $\preccurlyeq$. Relacja $\preccurlyeq$ jest porządkiem częściowym na mocy zadania 448a. Elementem najmniejszym (a więc jedynym minimalnym) jest $f = \lambda n.\varnothing$. Istotnie, weźmy dowolną funkcję $g \neq f$. Niech n będzie najmniejszą liczbą, dla której $f(n) \neq g(n)$. Wówczas $f(n) = \varnothing \subsetneq g(n)$, natomiast $f(n') = \varnothing = g(n')$ dla każdego $n' < n$, więc $f \prec g$.

Elementami maksymalnymi są funkcje f, dla których $\varnothing \notin \mathrm{Rg}(f)$. Jeśli bowiem $f \prec g$, to dla pewnego $k \in \mathbb{N}$ musi zachodzić warunek $f(k) \subsetneq g(k)$, a wówczas $f(k) = \varnothing$. Jeśli natomiast $f(k) = \varnothing$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}$, to $f \prec g$ dla funkcji g zdefiniowanej następująco:

$$g(n) = \begin{cases} \{0\} & \text{gdy } n = k; \\ f(n) & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Ponieważ jest wiele elementów maksymalnych (np. $\lambda n.\{0\}$ i $\lambda n.\{1\}$), nie ma elementu największego.

448d: Dla $k \in \mathbb{N}$ definiujemy $f_k \in \{\varnothing, \{0\}, \{1\}\}^{\mathbb{N}}$ w następujący sposób:

$$f_k(n) = \begin{cases} \{0\} & \text{gdy } n = k; \\ \varnothing & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Jeśli $k < l$, to $f_l(k) = \varnothing \subsetneq \{0\} = f_k(k)$ oraz $f_l(k') = \varnothing = f_k(k')$ dla każdego $k' < k$, więc $f_k \prec f_l$. Zatem $\{f_k \in \{\varnothing, \{0\}, \{1\}\}^{\mathbb{N}} | k \in \mathbb{N}\}$ jest nieskończonym łańcuchem.

Zbiór wszystkich elementów maksymalnych jest antyłańcuchem. Jest on nieskończony, gdyż na mocy zadania 448c należą do niego m.in. wszystkie funkcje f_k, dla $k \in \mathbb{N}$, gdzie:

$$f_k(n) = \begin{cases} \{1\} & \text{gdy } n = k; \\ \{0\} & \text{w przeciwnym przypadku,} \end{cases}$$

449a: Oczywiście $A = A \cup \varnothing$, dla dowolnego A, więc relacja jest zwrotna. Jesli $B = A \cup S$ i $C = B \cup T$, gdzie S i T są skończone, to $C = A \cup (S \cup T)$, mamy więc też przechodniość. A antysymetria wynika stąd, że relacja $\sqsubseteq$ jest zawarta w relacji inkluzji.

449b: Gdyby A był elementem najmniejszym, to także $\varnothing = A \cup S$ dla pewnego skończonego S. Zatem $A = \varnothing$, ale wtedy niemożliwe jest $A \sqsubseteq \mathbb{N}$. Podobnie jeśli A jest największy, to z $\mathbb{N} \sqsubseteq A$ wynika $A = \mathbb{N}$, a wtedy $\varnothing \not\sqsubseteq A$.

449c: Nie, bo zbiory $A_n = \mathbb{N} - \{0, \ldots, n\}$ tworzą ciąg malejący.

449d: Jeśli C jest ograniczeniem dolnym zbioru $\{A, B\}$, to $C \subseteq A$ i $C \subseteq B$, więc $A \cup B = A \cup C \cup (B - C) = A \cup (B - C)$. Zbiór $B - C$ jest skończony, więc $A \sqsubseteq A \cup B$ i podobnie $B \sqsubseteq A \cup B$. Zatem suma $A \cup B$ ogranicza $\{A, B\}$ z góry. Jeśli teraz $A, B \sqsubseteq D$, to $A, B \subseteq D$, więc $A \cup B \subseteq D$. Ponadto $D - (A \cup B) \subseteq (D - A) \cup (D - B)$, więc $A \cup B \sqsubseteq D$. Oznacza to, że $A \cup B = \sup\{A, B\}$.

449e: Nie. Na przykład rodzina wszystkich zbiorów jednoelementowych ma ograniczenie dolne (zbiór pusty), ale nie ma kresu górnego, ani w ogóle żadnego ograniczenia górnego. Takie ograniczenie musiałoby zawierać sumę wszystkich singletonów, czyli $\mathbb{N}$, a przecież $\{13\} \not\sqsubseteq \mathbb{N}$.

450a: Relacja $\preceq$ jest zwrotna, bo $f = f$ dla każdej funkcji f. Udowodnimy przechodniość. Niech $f \preceq g \preceq h$ i załóżmy, że funkcje f, g, h są różne (inaczej oczywiście $f \preceq h$). Mamy więc takie n_0, n_1, że $f(n_0) < g(n_0)$ oraz $\forall n > n_0\, (f(n) = g(n))$, a także $g(n_1) < h(n_1)$ i $\forall n > n_1\, (g(n) = h(n))$. Przypuśćmy, że $n_0 < n_1$. Wtedy $f(n_1) = g(n_1) < h(n_1)$ oraz $f(n) = g(n) = h(n)$ dla $n > n_1$. Zatem $f \preceq h$. Podobnie jest, gdy $n_0 \geq n_1$: wtedy $f(n_0) < g(n_0) \leq h(n_0)$. Aby wykazać antysymetrię, załóżmy, że $f \preceq g \preceq f$, oraz $f \neq g$. Jest takie n_0, że $f(n_0) < g(n_0)$ oraz $\forall n > n_0\, (f(n) = g(n))$. I jest takie n_1, że $g(n_1) < f(n_1)$ i $\forall n > n_1\, (g(n) = f(n))$. Ale jeśli $n_0 < n_1$, to $f(n_1) = g(n_1)$ i jednocześnie $g(n_1) < f(n_1)$. Podobnie, gdy $n_0 \geq n_1$: wtedy $f(n_0) < g(n_0)$ i jednocześnie $g(n_0) \leq f(n_0)$.

450b: Nie. Na przykład zbiór $G = \{g_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, gdzie $g_n = \lambda x.\,\mathsf{if}\ x \leq n\ \mathsf{then}\ 1\ \mathsf{else}\ 0$, jest łańcuchem, ale nie ma kresu, a nawet ograniczenia górnego. Zbiór G jest łańcuchem, bo $g_n \prec g_m$ dla dowolnych $n < m$. Istotnie, $g_n(m) = 0 < 1 = g_m(m)$ oraz $g_n(k) = 0 = g_m(k)$, dla $k > m$. Załóżmy, że h jest ograniczeniem górnym zbioru G. Ponieważ $h \succeq g_0$, więc istnieje takie n_0, że $\forall n > n_0\, (h(n) = g_0(n) = 0)$. Ale wtedy $g_{n_0+1} \succ h$, bo $g_{n_0+1}(n_0 + 1) = 1 > 0 = h(n_0 + 1)$ oraz dla $n > n_0 + 1$ mamy $g_{n_0+1}(n) = h(n) = 0$. A więc h nie jest ograniczeniem górnym G.

450c: Nie, bo istnieje nieskończony ciąg malejący złożony z funkcji $f_n = \lambda x.\,\mathsf{if}\ x \leq n\ \mathsf{then}\ 0\ \mathsf{else}\ 1$. Dla $n < m$ mamy bowiem $f_n(m) = 1 > 0 = f_m(m)$ oraz $f_n(k) = f_m(k)$ gdy $k > m$. A więc $f_n \succ f_m$.

450d: Tak, na przykład zbiór wszystkich funkcji $h_n = \lambda x.\,\mathsf{if}\ x \mod n = 0\ \mathsf{then}\ 1\ \mathsf{else}\ 0$, dla $n > 1$. Istotnie, jeśli $i \neq j$, to h_i i h_j nie są porównywalne, gdyż istnieją dowolnie duże liczby podzielne przez i, a niepodzielne przez j, lub na odwrót. A zatem nie istnieje takie n_0, że $\forall n > n_0\, (h_i(n) = h_j(n))$, i nie jest możliwe ani $h_i \preceq h_j$ ani $h_i \succeq h_j$.

450e: Niech G będzie łańcuchem i niech $f \in G$. Z definicji $\preceq$ wynika, że jeśli $h \in G$, to funkcje f i h są prawie wszędzie równe. Inaczej, $G \subseteq \{h \in \{0, 1\}^N \mid \exists n_0\, \forall n > n_0\, (f(n) = h(n))\}$. Ten ostatni zbiór, to $\bigcup_{n_0 \in \mathbb{N}} H_{n_0}$, gdzie $H_{n_0} = \{h \in \{0, 1\}^N \mid \forall n > n_0\, (f(n) = h(n))\}$. Ponieważ każdy ze zbiorów H_{n_0} jest skończony, więc G jest zawarty w przeliczalnej sumie zbiorów przeliczalnych, a zatem jest przeliczalny. Ponieważ istnieją łańcuchy nieskończone, więc największa moc łańcucha to $\aleph_0$.

451a: Kresem górnym tego zbioru jest funkcja $f = \lambda x.\,\mathsf{if}\ x = 1\ \mathsf{then}\ 1\ \mathsf{else}\ 0$. Dla dowolnego n zachodzi $g_n \preceq f$, bo $g_n(1) = 0 < 1 = f(1)$ oraz $g_n(k) = f(k) = 0$ dla wszystkich $k > 1$. A zatem f jest ograniczeniem górnym zbioru $\mathcal{X}$.

Przypuśćmy, że funkcja h jest też ograniczeniem górnym zbioru $\mathcal{X}$, tj. $h \succeq g_n$, dla wszystkich n, oraz że $h \neq f$. Wtedy dla każdego n istnieje takie t_n, że $h(t_n) > g_n(t_n)$, oraz $h(k) = 0$ dla $k > t_n$. Niemożliwe, aby wszystkie liczby t_n były zerami, bo wtedy $h(0) > n$, dla każdego n. Jest więc takie n, że $t_n \geq 1$. Wówczas $h(t_n) > g_n(t_n) = 0$ czyli $h(t_n) \geq 1 \geq f(t_n)$ oraz $h(k) = 0 = f(k)$ dla $k > t_n$. Jeśli $h(t_n) > 1$, to mamy $h > f$, pozostaje więc przypadek $1 = h(t_n) = f(t_n)$, co jest możliwe tylko wtedy, gdy $t_n = 1$. A skoro $h \neq f$, to $h(0) > 0$ i także $h > f$.

451b: Nie, bo istnieje łańcuch bez kresu górnego (por. zadanie 450c). A każdy łańcuch jest skierowany.

451c: Tak. Zwrotność wynika ze zwrotności relacji $\preceq$, symetria wprost z definicji. Udowodnimy przechodniość. Niech $f\,s\,g$ oraz $g\,s\,h$. W każdym przypadku istnieją takie m, n, że dla każdego $k > m$ zachodzi $f(k) = g(k)$ i dla każdego $k > n$ zachodzi $g(k) = h(k)$. To znaczy, że dla $k > \max\{m, n\}$ mamy $f(k) = h(k)$. Ale wtedy funkcje f i h są porównywalne. Istotnie, albo $f = h$ albo istnieje największa taka liczba u, że $f(u) \neq h(u)$. Jeśli $f(u) < h(u)$, to $f \preceq h$, w przeciwnym razie $h \preceq f$.

Uwaga: z powyższego wynika, że dwie funkcje f i g są porównywalne wtedy i tylko wtedy, gdy są prawie wszędzie równe, tj. gdy istnieje takie d, że dla wszystkich $k > d$ zachodzi $f(k) = g(k)$.

451d: Zbiór wszystkich funkcji stałych jest nieskończonym (przeliczalnym) antyłańcuchem. Istnieją też antyłańcuchy mocy continuum. Skonstruujemy przykład takiego antyłańcucha. Będzie to zbiór $\mathcal{Y} = \{f_\alpha \mid \alpha \in \mathbb{N} \to \{0,1\}\}$, gdzie f_α jest taką funkcją, że $f_\alpha(2^p(2q+1) - 1) = \alpha(q)$ dla $p, q \in \mathbb{N}$. Zauważmy, że każda liczba naturalna ma dokładnie jedno przedstawienie w postaci $2^p(2q+1) - 1$, a więc nasza definicja jest poprawna. Pokażemy, że jeśli $\alpha \neq \beta$, to funkcje f_α i f_β są nieporównywalne ze względu na $\preceq$. Przypuśćmy, że są porównywalne. Wtedy istnieje taka liczba d, że $f_\alpha(k) = f_\beta(k)$ dla wszystkich $k > d$. Weźmy takie p, że $2^p > d + 1$. Wtedy dla dowolnego q zachodzi $2^p(2q+1) - 1 > d$, więc $\alpha(q) = f_\alpha(2^p(2q+1) - 1) = f_\beta(2^p(2q+1) - 1) = \beta(q)$ i mamy $\alpha = \beta$, sprzeczność.

Inny przykład antyłańcucha mocy $\mathfrak{C}$ jest widoczny na rysunku 7 (por. zad. 608f).

Oczywiście każdy antyłańcuch jest podzbiorem zbioru $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, a więc ma co najwyżej moc continuum. Zatem największa moc antyłańcucha to $\mathfrak{C}$.

451e: Niech G będzie łańcuchem i niech $f \in G$. Z definicji $\preceq$ wynika, że jeśli $h \in G$, to funkcje f i h są prawie wszędzie równe. Inaczej, $G \subseteq \{h : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid \exists m\, \forall n > m\, (f(n) = h(n))\}$. Ten ostatni zbiór, to suma $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} H_m$, gdzie $H_m = \{h : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid \forall n > m\, (f(n) = h(n))\}$. Każdy ze zbiorów H_m jest przeliczalny, więc G jest zawarty w przeliczalnej sumie zbiorów przeliczalnych, a zatem jest przeliczalny. Ponieważ istnieją łańcuchy nieskończone (np. $\mathcal{X}$ w zadaniu 451a), więc największa moc łańcucha to $\aleph_0$.

452: Przekształcenie $\alpha : (\mathbb{N} \to \{2,3\}) \to \mathsf{P}(\mathbb{N})$ dane wzorem $\alpha(f) = f^{-1}(\{2\})$ jest izomorfizmem porządków $\langle \mathbb{N} \to \{2,3\}, \leq \rangle$ i $\langle \mathsf{P}(\mathbb{N}), \subseteq \rangle$. Istotnie, $f \leq g$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha(f) \subseteq \alpha(g)$. Dlatego wszystkie własności tych porządków są takie same. A więc:

(a) nie jest to porządek liniowy (np. funkcje $\lambda x.2 + (x \bmod 2)$ i $\lambda x.3 - (x \bmod 2)$ są nieporównywalne);
(b) ani dobrze ufundowany (rozpatrzmy np. ciąg funkcji $f_n = \lambda x.\,\mathsf{if}\ x \geq n\ \mathsf{then}\ 2\ \mathsf{else}\ 3$);
(c) elementem najmniejszym (a więc także jedynym minimalnym) jest funkcja $\lambda x.3$, a elementem największym (i jedynym maksymalnym) $\lambda x.2$;
(d) jest to krata zupełna.

453a: Są to wszystkie liczby naturalne większe od zera oraz continuum.

Jeśli $f(n) \neq 0$ tylko dla skończenie wielu n, to D_f jest skończony. Niech $x_1, x_2, \ldots, x_k$ to wszystkie argumenty, dla których f przyjmuje niezerową wartość. Liczba elementów zbioru D_f wynosi w tym przypadku $(f(x_1) + 1) \cdot (f(x_2) + 1) \cdot \ldots \cdot (f(x_k) + 1)$. Każdą niezerową moc skończoną można uzyskać: jeśli $f_n(0) = n - 1$ i $f_n(x) = 0$ dla $x > 0$, to $\overline{\overline{D_{f_n}}} = n$.

Jeśli $f(n) \neq 0$ dla nieskończenie wielu n, to D_f ma moc continuum. Oczywiście D_f ma moc co najwyżej continuum, bo $D_f \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Niech $X_f = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ będzie zbiorem wszystkich argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartości niezerowe i niech $x_i < x_{i+1}$ dla każdego $i \in \mathbb{N}$. Niech $F\colon \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to D_f$ będzie taka, że $F(h)(x_i) = h(i)$ dla $i \in \mathbb{N}$ oraz $F(h)(x) = 0$ dla $x \notin X_f$. Funkcja F jest różnowartościowa, gdyż jeśli $h \neq h'$, to $h(i) \neq h'(i)$ dla pewnego $i \in \mathbb{N}$, a wtedy mamy $F(h)(x_i) \neq F(h')(x_i)$, czyli $F(h) \neq F(h')$. Zatem moc D_f jest co najmniej continuum.

453b: Z zadania 453a wynika, że D_f jest nieskończony wtedy i tylko wtedy, gdy f przyjmuje niezerową wartość dla nieskończnie wielu argumentów. Takich funkcji jest oczywiście co najwyżej continuum. Jest ich również co najmniej continnum, bo wszystkie funkcje $(\mathbb{N} - \{0\})^{\mathbb{N}}$ mają tę własność, a ich jest continuum.

454a: Oczywiście $B \preceq B$ dla dowolnego $B \in \mathcal{A}$, bo jeśli $b \in B$, to $b \leq b$. Zatem relacja $\preceq$ jest zwrotna. Pokażemy, że $\preceq$ jest antysymetryczna. Załóżmy, że $B, C \in \mathcal{A}$, $B \preceq C$ i $C \preceq B$. Weźmy dowolne $b \in B$. Ponieważ $B \preceq C$, więc istnieje takie $c \in C$, że $b \leq c$. Ponieważ $C \preceq B$, więc istnieje takie $b' \in B$, że $c \leq b'$. Z przechodniości relacji $\leq$ wynika, że $b \leq b'$. Stąd $b = b'$, bo B jest antyłańcuchem. Zatem $b = c = b'$ i mamy $b \in C$. To pokazuje, że $B \subseteq C$. Podobnie, $C \subseteq B$. Zatem $B = C$.

Pokażemy, że $\preceq$ jest przechodnia. Załóżmy, że $B, C, D \in \mathcal{A}$, $B \preceq C$ i $C \preceq D$. Weźmy dowolne $b \in B$. Ponieważ $B \preceq C$, więc istnieje takie $c \in C$, że $b \leq c$. Ponieważ $C \preceq D$, więc istnieje takie $d \in D$, że $c \leq d$. Z przechodniości relacji $\leq$ wynika, że $b \leq d$. Z dowolności b wynika $B \preceq D$.

454b: Nie. Niech $A = \mathbb{N} \cup \{a\}$ i niech dla $x, y \in A$:

$$x \leq y \quad \Leftrightarrow \quad (x, y \in \mathbb{N} \wedge x \leq_{\mathbb{N}} y) \vee x = y = a,$$

gdzie $\leq_{\mathbb{N}}$ jest zwykłą relacją nierówności w zbiorze $\mathbb{N}$. Wtedy a jest elementem maksymalnym w $\langle A, \leq\rangle$, ale $\langle \mathcal{A}, \preceq\rangle$ nie ma elementu maksymalnego (mamy $\mathcal{A} = \{\{a\}\} \cup \{\{n\} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{\{a, n\} \mid n \in \mathbb{N}\}$).

454c: Jeśli $A = \varnothing$, to $\mathcal{A} = \{\varnothing\}$ i $\varnothing$ jest elementem maksymalnym porządku $\langle \mathcal{A}, \preceq\rangle$, ale $\langle A, \leq\rangle$ nie ma elementu maksymalnego. W przypadku $A \neq \varnothing$ implikacja jest prawdziwa. Załóżmy przeciwnie, że porządek $\langle \mathcal{A}, \preceq\rangle$ ma element maksymalny B, ale $\langle A, \leq\rangle$ nie ma elementów maksymalnych. Zbiór B jest niepusty, bo $\varnothing \preceq \{a\}$ dla dowolnego $a \in A$, więc $\varnothing$ nie jest elementem maksymalnym. Zatem B ma jakiś element b. Weźmy dowolne $c \in A$, takie że $b < c$, i niech $C = \{x \in B \mid \neg(x \leq c)\} \cup \{c\}$. Zauważmy, że C jest antyłańcuchem, bo gdyby istniało takie $x \in B$, że $c < x$, to $b < x$ i B nie byłby antyłańcuchem. Ponadto $B \preceq C$, co jest sprzeczne z tym, że B jest elementem maksymalnym częściowego porządku $\langle \mathcal{A}, \preceq\rangle$.

455a: Można łatwo zauważyć, że relacja $\preceq$ jest zwrotna i przechodnia. Jest też antysymetryczna: załóżmy, że $f, g \in \mathcal{A}$, $f \preceq g$ i $g \preceq f$. Dla każdego $a \in A$ mamy $f^{-1}(a) \leq g^{-1}(a) \leq f^{-1}(a)$. Stąd $f^{-1} = g^{-1}$, więc też $f = g$. Istotnie, jeśli $f(a) = b$, to $a = f^{-1}(b) = g^{-1}(b)$, skąd $g(a) = b$.

Inny sposób: Relacja $\preceq$ jest izomorficzna z uporządkowaniem zbioru $\mathcal{F}$ „po współrzędnych”. Ta obserwacja może też pomóc w rozwiązaniu zadania 455b.

455b: Rozważmy dowolne $g \in \mathcal{F}$. Niech $f = \lambda x.g(x+1)$ i $h = \lambda x.g(x-1)$. Zauważmy, że $f, h \in \mathcal{F}$ (czyli są bijekcjami). Niech $a \in \mathbb{Z}$ i niech $x = g^{-1}(a)$. Mamy $f(x-1) = h(x+1) = g(x) = a$. Stąd wynika $f^{-1}(a) < g^{-1}(a) < h^{-1}(a)$. Zatem $f \prec g \prec h$. Tak pokazaliśmy, że:

- $\langle \mathcal{F}, \preceq\rangle$ nie ma elementów maksymalnych, minimalnych, największego ani najmniejszego;
- $\langle \mathcal{F}, \preceq\rangle$ ma nieskończone łańcuchy.

Dla $i \in \mathbb{N}$, niech $f_i : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ będzie taką bijekcją, że $f_i(0) = i$, $f_i(i) = 0$ oraz $f_i(k) = k$ dla $k \in \mathbb{N} - \{0, i\}$. Niech $\mathcal{G} = \{f_i \mid i > 0\}$. Rozważmy dowolne liczby $i, j \in \mathbb{N}$ takie, że $0 < i < j$. Mamy $f_i^{-1}(i) = 0 < i = f_j^{-1}(i)$ oraz $f_i^{-1}(j) = j > 0 = f_j^{-1}(j)$. Stąd wynika nieporównywalność f_i i f_j. A więc zbiór $\mathcal{G}$ jest nieskończonym antyłańcuchem w $\langle \mathcal{F}, \preceq\rangle$.

456: $(\Rightarrow)$ Załóżmy, że f jest monotoniczna i niech rodzina $\mathcal{R} \subseteq \mathsf{P}(\mathbb{N})$ będzie zamknięta w górę. Aby wykazać, że przeciwobraz $f^{-1}(\mathcal{R})$ jest zamknięty w górę, przypuśćmy, że $A \in f^{-1}(\mathcal{R})$, oraz $A \subseteq B$. Wtedy $f(A) \in \mathcal{R}$, a ponieważ funkcja f jest monotoniczna, więc $f(A) \subseteq f(B)$. Stąd od razu $f(B) \in \mathcal{R}$, czyli $B \in f^{-1}(\mathcal{R})$.

$(\Leftarrow)$ Teraz załóżmy, że przeciwobrazy rodzin zamkniętych w górę są zamknięte w górę. Niech $A \subseteq B$. Rozpatrzmy rodzinę $\mathcal{D} = \{C \in \mathsf{P}(\mathbb{N}) \mid f(A) \subseteq C\}$. Jest ona oczywiście zamknięta w górę, zatem jej przeciwobraz $f^{-1}(\mathcal{D})$ też jest zamknięty w górę. Ponieważ $f(A) \in \mathcal{D}$, więc $A \in f^{-1}(\mathcal{D})$, a skoro $A \subseteq B$. to także $B \in f^{-1}(\mathcal{D})$. Stąd $f(B) \in \mathcal{D}$ i ostatecznie $f(A) \subseteq f(B)$.

457: $(\Rightarrow)$ Załóżmy, że f jest monotoniczna i niech $X \subseteq A$ będzie zamknięty w dół. Aby wykazać, że przeciwobraz $f^{-1}(X)$ jest zamknięty w dół, przypuśćmy, że $x \in f^{-1}(X)$, oraz $x \geq y$. Wtedy $f(x) \in X$ a ponieważ funkcja f jest monotoniczna, więc $f(x) \geq f(y)$. Stąd od razu $f(y) \in X$, czyli $y \in f^{-1}(X)$.
$(\Leftarrow)$ Teraz załóżmy, że przeciwobrazy zbiorów zamkniętych w dół są zamknięte w dół. Niech $x \geq y$. Rozpatrzmy zbiór $C = \{z \in A \mid f(x) \geq z\}$. Jest to oczywiście zbiór zamknięty w dół, zatem jego przeciwobraz $f^{-1}(C)$ też jest zamknięty w dół. Ponieważ $f(x) \in C$, więc $x \in f^{-1}(C)$, a skoro $x \geq y$, to także $y \in f^{-1}(C)$. Stąd $f(y) \in C$ i ostatecznie $f(x) \geq f(y)$.

458a: Zwrotność i przechodniość są oczywiste (dla zwrotności korzystamy z funkcji identycznościowej, dla przechodniości stosujemy składanie funkcji). Mniej oczywista jest antysymetria. Jeśli $A \leq B \leq A$, to mamy takie funkcje $f : A \xrightarrow{1-1} B$ i $g : B \xrightarrow{1-1} A$, że $x \leq f(x) \leq g(f(x))$ dla każdego $x \in A$. Złożenie $g \circ f$ jest różnowartościowe, a skoro A jest zbiorem skończonym, to $g \circ f$ jest też na A. Mamy więc bijekcję $g \circ f : A \xrightarrow[\text{na}]{1-1} B$ o własności $\forall x \in A.\, x \leq (g \circ f)(x)$. Wtedy $g \circ f = \mathrm{id}_A$, inaczej bowiem element $a = \min\{x \in A \mid x < (g \circ f)(x)\}$ nie jest wartością funkcji $g \circ f$. A zatem dla $x \in A$ mamy $x \leq f(x) \leq g(f(x)) = x$, skąd $f(x) = x$. Funkcja $f : A \to B$ jest więc identycznościowa, co oznacza, że $A \subseteq B$. Podobnie pokażemy $B \subseteq A$ i w konsekwencji $A = B$.

458b: Tak. Dla $s \in \mathbb{N}$ i $s < 2014$ niech $A_s = \{n \in \mathbb{N} \mid n < s\} \cup \{4028-s\}$. Każdy zbiór A_s ma dokładnie $s + 1$ elementów, więc jeśli $t < s$, to nie istnieje funkcja różnowartościowa z A_s do A_t. Stąd wynika, że $A_s \not\leq A_t$. Ale także $A_t \not\leq A_s$, bo jeśli $f : A_t \xrightarrow{1-1} A_s$, to $f(\max A_t) = f(4028-t) \leq \max A_s = 4028-s$. Niemożliwe jest więc, aby $\max A_t \leq f(\max A_t)$.

458c: Pokażemy, że dla dowolnego ciągu $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ podzbiorów $\mathbb{N}$ istnieją takie $i, j \in \mathbb{N}$, że $i < j$ oraz $A_i \leq A_j$. Zastosujemy indukcję ze względu na liczbę $k = \overline{\overline{A_0}}$. Jeśli k jest zerem, to $A_0 = \varnothing \leq A_1$. Dla $k > 0$ rozpatrzymy dwa przypadki. Pierwszy przypadek zachodzi wtedy, kiedy wszystkie zbiory A_i są ograniczone z góry przez pewną stałą M. To znaczy, że zbiory A_i są podzbiorami zbioru $\{0, 1, \ldots, M\}$, a takich podzbiorów jest skończenie wiele. Zatem $A_i = A_j$, dla pewnych $i < j$, w szczególności $A_i \leq A_j$.

Rozpatrzmy więc drugi przypadek, kiedy takie ograniczenie nie istnieje. Niech $a_n = \max A_n$ dla $n \in \mathbb{N}$. Określimy przez indukcję ciąg liczb $\{n_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, zaczynając od $n_0 = 0$. Dalej określamy n_{i+1} jako najmniejszą liczbę $m > n_i$ o tej własności, że zbiór A_m ma element większy od a_{n_i}. (Wtedy oczywiście także $a_{n_{i+1}} > a_{n_i}$.) Taka liczba istnieje, bo inaczej mielibyśmy przypadek pierwszy dla $M = a_{n_i}$.

Niech teraz $B_i = A_{n_i} - \{a_{n_i}\}$. Ponieważ B_0 ma $k - 1$ elementów, więc możemy do ciagu $\{B_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ zastosować założenie indukcyjne. Mamy więc liczby $i < j$ i funkcję $f : B_i \xrightarrow{1-1} B_j$ spełniającą warunek $\forall n\, (n \in B_i \to n \leq f(n))$. Funkcję f łatwo można rozszerzyć do funkcji $f' : A_{n_i} \xrightarrow{1-1} A_{n_j}$ przyjmując, że $f'(\max A_{n_i}) = \max A_{n_j}$.

458d: Nie. Mamy na przykład $\mathbb{N} \leq \mathbb{N} - \{0\} \leq \mathbb{N}$, a więc relacja $\leq$ nie jest antysymetryczna.

460a: Nie, np. funkcje $f = \lambda n.\, \mathsf{if}\ n = 0\ \mathsf{then}\ 2\ \mathsf{else}\ 0$ i $g = \lambda n.\, \mathsf{if}\ n = 0\ \mathsf{then}\ 0\ \mathsf{else}\ 2$ są nieporównywalne, gdyż nieporównywalne są zbiory $f^{-1}(\{2\}) = \{0\}$ i $g^{-1}(\{2\}) = \mathbb{N} - \{0\}$.

460b: Elementem największym, a więc jedynym maksymalnym, jest funkcja $\lambda n.\, 2$, natomiast najmniejszym, a więc jedynym minimalnym, jest funkcja $\lambda n.\, 0$.

460c: Nie. Wystarczy wskazać malejący ciąg $f_n = \lambda k.\, \mathsf{if}\ k < n\ \mathsf{then}\ 0\ \mathsf{else}\ 2$. Faktycznie, dla $n < m$ mamy $f_n^{-1}(\{2\}) = \{k \in \mathbb{N} \mid n \leq k\} \supsetneq \{k \in \mathbb{N} \mid m \leq k\} = f_m^{-1}(\{2\})$, a zatem $f_n \succ f_m$.

460d: Można przyjąć np. $f_n = \lambda k.\, \mathsf{if}\ k \leq n\ \mathsf{then}\ 2\ \mathsf{else}\ \mathsf{if}\ k = n + 1\ \mathsf{then}\ 0\ \mathsf{else}\ 1$. Wtedy $f_n \prec f_m$ dla $n < m$, ale $f_n(m + 1) = 1 > 0 = f_m(m + 1)$.

460e: Niech Z będzie dowolnym podzbiorem $\mathbb{N} \to \{0, 1, 2\}$ i niech $D = \bigcup\{f^{-1}(\{2\}) \mid f \in Z\}$. Dalej niech $W = \{f \in Z \mid f^{-1}(\{2\}) = D\}$ i niech $J = \bigcup\{f^{-1}(\{1\}) \mid f \in W\}$. Zauważmy, że zbiory D i J są rozłączne, bo jeśli $k \in J$, to $f(k) = 1$ dla pewnego $f \in W$. Z tego ostatniego wynika, że $k \notin D = f^{-1}(\{2\})$. Rozpatrzmy funkcję $\zeta = \lambda n.\, \mathsf{if}\ n \in D\ \mathsf{then}\ 2\ \mathsf{else}\ \mathsf{if}\ n \in J\ \mathsf{then}\ 1\ \mathsf{else}\ 0$. Pokażemy, że $\zeta = \sup Z$. Najpierw sprawdźmy, że ζ jest ograniczeniem górnym zbioru Z. Niech więc $f \in Z$. Mamy $f^{-1}(\{2\}) \subseteq D = \zeta^{-1}(\{2\})$. Jeśli powyższe zawieranie jest właściwe, to już $f \prec \zeta$. W przeciwnym razie $f \in W$ i wtedy $f^{-1}(\{1\}) \subseteq J = \zeta^{-1}(\{1\})$. Jeśli zawieranie jest właściwe, to $f \prec \zeta$, a jeśli nie, to $f = \zeta$.

Niech teraz jakaś funkcja h będzie ograniczeniem górnym Z. Wtedy $f^{-1}(\{2\}) \subseteq h^{-1}(\{2\})$ dla $f \in Z$. Z tego wynika, że $h(k) = 2$ dla $k \in D$, czyli $D = \zeta^{-1}(\{2\}) \subseteq h^{-1}(\{2\})$. Jeśli $h^{-1}(\{2\}) \neq D$, to już $h \succ \zeta$, przypuśćmy więc, że $h^{-1}(\{2\}) = D$. Pokażemy, że wtedy $J = \zeta^{-1}(\{1\}) \subseteq h^{-1}(\{1\})$, a więc $\zeta \preceq h$. Niech więc $k \in J$; wtedy $f(k) = 1$ dla pewnego $f \in W$. Ponieważ $f \preceq h$ oraz $f^{-1}(\{2\}) = D = h^{-1}(\{2\})$, więc $f^{-1}(\{1\}) \subseteq h^{-1}(\{1\})$, a zatem $h(k) = 1$.

461a: Nie. Kontrprzykład jest taki sam jak w zadaniu 460a (bo $f^{-1}(\{k\}) = g^{-1}(\{k\}) = \varnothing$ dla $k > 2$).

461b: Funkcja $z = \lambda n.\, 0$ jest elementem minimalnym. Istotnie, jeśli $f \preceq z$, to albo $f = z$ (i dobrze), albo istnieje takie n, że $f^{-1}(\{k\}) = z^{-1}(\{k\})$, dla $k > n$, oraz $f^{-1}(\{n\}) \subsetneq z^{-1}(\{n\})$. Wtedy $n = 0$, bo dla $n > 0$ zbiór $z^{-1}(\{n\})$ jest pusty. Z tego też wynika, że dla $k \neq 0$ także $f^{-1}(\{k\})$ jest pusty, czyli funkcja f nie przyjmuje innych wartości niż zero. A więc $f^{-1}(\{0\}) = \mathbb{N} = z^{-1}(\{0\})$, sprzeczność.

Innych elementów minimalnych nie ma. Przypuśćmy bowiem, że $f \neq z$ czyli $f(m) = n > 0$, dla pewnych m, n. Wtedy $g \prec f$, gdzie $g = \lambda x.\, \mathsf{if}\ x = m\ \mathsf{then}\ n - 1\ \mathsf{else}\ f(x)$. Istotnie: funkcje f i g różnią się tylko dla argumentu m, więc wartości większe od $f(m)$ przyjmują w tych samych miejscach. Czyli jeśli $k > f(m) = n$, to $g^{-1}(\{k\}) = f^{-1}(\{k\})$. Ponadto $g^{-1}(\{n\}) = f^{-1}(\{n\}) - \{m\} \subsetneq f^{-1}(\{n\})$.

Jedyny element minimalny z nie jest najmniejszy, bo na przykład $z \not\preceq \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$. Gdyby $z \preceq \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$, to dla nieskończenie wielu $k > 0$ mielibyśmy równość $\varnothing = z^{-1}(\{k\}) = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}^{-1}(\{k\}) = \{k\}$. Zatem elementu najmniejszego nie ma.

Nie ma żadnych elementów maksymalnych: jeśli $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jest dowolną funkcją, to $f \prec h$, gdzie $h = \lambda x.\, \mathsf{if}\ x = 0\ \mathsf{then}\ f(0) + 1\ \mathsf{else}\ f(x)$. Dla $n = f(0) + 1$ mamy $h^{-1}(\{n\}) = f^{-1}(\{n\}) \cup \{0\}$, więc $f^{-1}(\{n\}) \subsetneq h^{-1}(\{n\})$. Tymczasem $h^{-1}(\{k\}) = f^{-1}(\{k\})$ dla wszystkich liczb $k > n$.

461c: Nie. Kontrprzykład jest taki sam, jak w zadaniu 460c, bo dla $k > 2$ zbiory $f_n^{-1}(\{k\})$ są puste.

461d: Nie. Rozpatrzmy zbiór L wszystkich funkcji stałych. Jest to łańcuch (a zatem zbiór skierowany), bo $\lambda x.\, n \preceq \lambda x.\, m$, gdy $n < m$. Istotnie, dla $k > m$ przeciwobrazy zbiorów $\{k\}$ są w obu przypadkach puste, natomiast $(\lambda x.\, n)^{-1}(\{m\}) = \varnothing \subsetneq \mathbb{N} = (\lambda x.\, m)^{-1}(\{m\})$.

Zbiór L nie ma kresu górnego, bo nie jest ograniczony z góry. Gdyby jakaś funkcja h była takim ograniczeniem, to $\lambda x.\, 0 \prec \lambda x.\, 1 \preceq h$, więc $\lambda x.\, 0 \prec h$. Zatem istnieje takie n, że $h^{-1}(\{k\}) = \varnothing$ dla wszystkich $k > n$. Wtedy jednak $h \prec \lambda x.\, n + 1 \in L$, sprzeczność.

461e: Tak. Niech $L \neq \varnothing$ będzie łańcuchem ograniczonym z góry przez funkcję a. Bez straty ogólności załóżmy, że L nie ma elementu największego, w szczególności $a \notin L$. Napis $f <_n g$ będzie oznaczał, że $f^{-1}(\{n\}) \subsetneq g^{-1}(\{n\})$ oraz $f^{-1}(\{k\}) = g^{-1}(\{k\})$ dla $k > n$. Niech $L_n = \{f \in L \mid f <_n a\}$. Oczywiście $L = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L_n$. Druga obserwacja jest taka: jeśli $n < m$ oraz $f \in L_n$ i $g \in L_m$, to $g <_m f$. Niech n będzie najmniejszą taką liczbą, że $L_n \neq \varnothing$. Zauważmy, że $n \neq 0$, bo jeśli $f <_0 a$, to istnieje takie x, że $a(x) = 0$ ale $f(x) > 0$. Wtedy $x \in f^{-1}(\{f(x)\}) = a^{-1}(\{f(x)\})$, skąd $a(x) = f(x)$, sprzeczność.

Dla $0 < p \leq n$ definiujemy przez indukcję zbiory $F_p \subseteq L_n$ oraz $Z_p \subseteq \mathbb{N}$:
– $F_n = L_n$;
– $F_p = \{f \in F_{p+1} \mid f^{-1}(\{p + 1\}) = Z_{p+1}\}$, dla $0 < p < n$;
– $Z_p = \bigcup\{f^{-1}(\{p\}) \mid f \in F_p\}$, $0 < p \leq n$.

Zauważmy, że ciąg zbiorów F_p jest zstępujący, przy tym może się zdarzyć, że któreś F_p jest puste. Wtedy także $Z_p = \varnothing$. Dalej jeśli $f \in F_p$, to $f^{-1}(\{p\}) \subseteq Z_p$ oraz $f^{-1}(\{q\}) = Z_q$ dla $p < q \leq n$.

Zbiory Z_p są natomiast parami rozłączne. Przypuśćmy bowiem, że $x \in Z_p \cap Z_q$, gdzie $p < q$. Wtedy $f(x) = p$ dla pewnego $f \in F_p$. Ponieważ $F_p \subseteq F_{q-1}$, więc $f \in F_{q-1}$, czyli $f^{-1}(\{q\}) = Z_q$. Skoro $x \in Z_q$, to $f(x) = q$, sprzeczność. Ponadto dla $x \in Z_p$ mamy $a(x) \leq n$ (dlaczego?).

Poszukiwanym kresem łańcucha L jest funkcja h:

$$h(x) = \begin{cases} m, & \text{jeśli } a(x) = m > n; \\ p, & \text{jeśli } x \in Z_p, \text{ gdzie } 0 < p \leq n; \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Funkcja h jest dobrze określona, bo zbiory Z_p są rozłączne. Zauważmy, że $h^{-1}(p) = Z_p$, dla $0 < p \leq n$.

Udowodnimy teraz, że h jest ograniczeniem górnym L; oczywiście wystarczy sprawdzić, że $f \preceq h$ dla $f \in L_n$. Niech więc $f \in L_n = F_n$ i niech p będzie najmniejszą taką liczbą, że $f \in F_p$. To znaczy, że także $f \in F_q$ dla wszystkich $p < q \leq n$, skąd $f^{-1}(\{q\}) = Z_q = h^{-1}(\{q\})$. Ponadto $f^{-1}(\{p\}) \subseteq Z_p = h^{-1}(\{p\})$ i jeśli inkluzja jest ostra, to mamy $f \preceq h$. Jeśli zaś $f^{-1}(\{p\}) = Z_p$, to z minimalności liczby p wynika, że $p = 1$; inaczej bowiem $f \in F_{p-1}$. Wtedy jednak wszystkie przeciwobrazy niezerowych singletonów są takie same przy f i przy h, co wymusza także równość $f^{-1}(\{0\}) = h^{-1}(\{0\})$, czyli równość $f = h$.

Załóżmy teraz, że g jest ograniczeniem górnym $L \supseteq L_n \neq \varnothing$. Istnieje jakieś $f \in L_n$. Skoro $f \preceq g$, to istnieje takie n_0, że $g^{-1}(\{k\}) = f^{-1}(\{k\}) = a^{-1}(\{k\})$ gdy $k > n_0, n$. Niech m będzie najmniejszą taką liczbą, że $g^{-1}(\{k\}) = a^{-1}(\{k\})$ dla wszystkich $k > m$. Jeśli $m = 0$, to $g = a \succeq h$ (dlaczego?). Niech więc $m > 0$. Wtedy $g^{-1}(\{m\}) \neq a^{-1}(\{m\})$. Jeśli $m > n$, to w istocie $g^{-1}(\{m\}) \supsetneq a^{-1}(\{m\})$, bo wtedy zbiór $a^{-1}(\{m\})$ jest taki sam jak $f^{-1}(\{m\})$, a przecież $g \succeq f$. Stąd wynika, że $g \succ a \succeq h$.

Niech więc $m \leq n$. Wtedy wszystkie przeciwobrazy $g^{-1}(\{k\})$ dla $k > n$ są takie same jak $a^{-1}(\{k\})$. Niech p będzie największą taką liczbą, że $h^{-1}(\{p\}) \neq g^{-1}(\{p\})$. (Jeśli takiej nie ma, to $h = g$ i dobrze.) Wtedy dla $p < q \leq n$ zachodzi równość $g^{-1}(\{q\}) = Z_q$ dla $p < q \leq n$.

Rozpatrzmy dowolną funkcję $f \in F_p$. Wtedy $g^{-1}(\{q\}) = Z_q = f^{-1}(\{q\})$ dla $p < q \leq n$, a ponieważ $f \preceq g$, więc musi zachodzić (właściwa lub nie) inkluzja $f^{-1}(\{p\}) \subseteq g^{-1}(\{p\})$. Z dowolności f wynika $h^{-1}(\{p\}) = Z_p = \bigcup\{f^{-1}(\{p\}) \mid f \in F_p\} \subseteq g^{-1}(\{p\})$. Ale skoro $h^{-1}(\{p\}) \neq g^{-1}(\{p\})$, to $h \preceq g$.

462: Zbiory słów spełniające warunek (*) z treści zadania to antyłańcuchy ze względu na dobrze ufundowany porządek prefiksowy. Każdy przekrój jest więc antyłańcuchem i to niepustym, bo musi mieć np. element porównywalny ze słowem pustym ε.

462a: Zbiór $\mathcal{B}$ jest mocy continuum. Ponieważ $\mathcal{B} \subseteq \mathsf{P}(\{a,b\}^*)$, więc moc zbioru $\mathcal{B}$ jest co najwyżej continuum. Dla oszacowania z dołu zdefiniujemy funkcję $F : \mathsf{P}(\mathbb{N}) \xrightarrow{1-1} \mathcal{B}$, przyjmując, dla $X \subseteq \mathbb{N}$:

$$F(X) = \{a^n b \mid n \in X\} \cup \{a^n bx \mid n \notin X \wedge x \in \{a,b\}\}.$$

Trzeba sprawdzić, czy funkcja F jest dobrze określona, tj. czy $F(X)$ jest zawsze przekrojem. Elementy $F(X)$ są oczywiście nieporównywalne ze względu na $\subseteq$. Niech więc $w \in \{a,b\}^*$ i niech $w = a^k v$, gdzie k jest największe o tej własności (możliwe, że $k = 0$ lub $v = \varepsilon$). Dla $k \in X$ słowo w jest porównywalne z $a^k b \in F(X)$, a jeśli $k \notin X$, to w jest porównywalne z $a^k ba$ lub $a^k bb$. Pozostaje zauważyć, że F jest funkcją różnowartościową, bo jeśli $n \in X \dot{-} Y$, to $a^n b \in F(X) \dot{-} F(Y)$.

462b: Zwrotność i przechodniość są zgoła oczywiste. Sprawdzamy antysymetrię: niech $A \sqsubseteq B \sqsubseteq A$ i niech $a \in A$. Jest takie $b \in B$, że $a \subseteq b$ i jest takie $a' \in A$, że $b \subseteq a'$. Wtedy $a \subseteq a'$, a ponieważ A jest antyłańcuchem, więc to znaczy, że $a = b = a'$, w szczególności $a \in B$. W ten sposób pokazaliśmy $A \subseteq B$ i podobnie $B \subseteq A$, skąd $A = B$.

462c: Elementem najmniejszym (a więc jedynym minimalnym) jest $\{\varepsilon\}$, bo słowo puste jest prefiksem każdego słowa, a przekroje są niepuste. Elementów maksymalnych (a więc także największego) nie ma: jeśli $A \in \mathcal{B}$, to $A \neq \varnothing$; niech $w \in A$. Wtedy $A \sqsubseteq A' = (A - \{w\}) \cup \{wa, wb\} \in \mathcal{B}$ oraz $A \neq A'$.

462d: Tak. Niech $\varnothing \neq \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ i niech:

$$C = \{w \in \bigcup\mathcal{A} \mid w \text{ jest minimalne w } \bigcup\mathcal{A} \text{ ze względu na porządek prefiksowy}\}.$$

Łatwo widzieć, że C jest antyłańcuchem. Aby pokazać, że jest przekrojem, rozpatrzmy dowolne słowo w. Skoro $\mathcal{A} \neq \varnothing$, to zbiór $\{v \in \bigcup\mathcal{A} \mid v \text{ porównywalne z } w\}$ jest niepusty. Wybierzmy z niego element minimalny v. Ponieważ każdy prefiks v jest porównywalny z w, więc v musi być minimalny w całym zbiorze $\bigcup\mathcal{A}$, a zatem $v \in C$.

Zbiór C jest ograniczeniem dolnym rodziny $\mathcal{A}$. Niech bowiem $A \in \mathcal{A}$. Aby pokazać, że $C \sqsubseteq A$, rozpatrzmy jakieś słowo $w \in C$. Ponieważ A jest przekrojem, więc w jest porównywalne z jakimś słowem $v \in A$, a z minimalności wynika, że $w \subseteq v$.

Przypuśćmy teraz, że $D \in \mathcal{B}$ jest ograniczeniem dolnym rodziny $\mathcal{A}$. Dowodzimy, że $D \sqsubseteq C$, niech więc $w \in D$ i niech słowo $v \in C$ będzie porównywalne z w. Jeśli $w \subseteq v$, to dobrze, w przeciwnym razie $v \subsetneq w$. Jest takie $A \in \mathcal{A}$, że $v \in A$. Ponieważ $D \sqsubseteq A$, więc $v \subsetneq w \subseteq v'$, dla pewnego $v' \in A$ i zbiór A nie jest antyłańcuchem.

462e: Nie, istnieje bowiem ciąg malejący, na przykład złożony z takich zbiorów A_n, gdzie $n \in \mathbb{N}$:

$$A_n = \{a^k b \mid k < n\} \cup \{a^k bx \mid k \geq n \wedge x \in \{a,b\}\}.$$

Łatwo sprawdzić, że zbiory te są przekrojami, i że są parami różne. Ponadto $A_n \sqsupseteq A_{n+1}$, dla każdego n. bo jeśli $w \in A_{n+1}$, to albo $w \in A_n$ albo $w = a^n b \subseteq a^n ba \in A_n$.

464a: To twierdzenie oczywiście nie zachodzi. Niech na przykład $A = \{0,1\}$ ze zwykłym porządkiem, oraz $B = \{0,1\}$ z porządkiem dyskretnym, w którym zero i jedynka są nieporównywalne. Jako f weźmy funkcję stale równą 0.

464b: To też oczywista nieprawda. Jako kontrprzykład wystarczy identycznościowe włożenie $f = \lambda n.n$ ze zbioru $A = \mathbb{N}$ do $B = \mathbb{Z}$ ze zwykłym uporządkowaniem.

464c: To twierdzenie zachodzi. Przypuśćmy, że mamy ciąg malejący $a_0 >_A a_1 >_A a_2 >_A \cdots$ w zbiorze A. Wtedy w B jest ciąg antymonotoniczny $f(a_0) \geq_B f(a_1) \geq_B f(a_2) \geq_B \cdots$, niekoniecznie ostro malejący, bo może tak być, że $a_i > a_{i+1}$, ale $f(a_i) = f(a_{i+1})$. Jednak przeciwobraz każdego singletona $\{f(a_i)\}$ jest skończony, więc zawsze istnieje takie $k > i$, że $f(a_k) \neq f(a_i)$, czyli w istocie $f(a_k) < f(a_i)$. Zatem możemy określić przez indukcję nieskończony ciąg indeksów $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$, biorąc $k_0 = 0$ oraz $k_{n+1} = \min\{k \mid f(a_k) < f(a_{k_n})\}$. Wtedy ciąg $(f(a_{k_n}))_{n\in\mathbb{N}}$ jest już ostro malejący, a to niemożliwe.

464d: To też zachodzi. Przypuśćmy bowiem, że $f(x) = f(y) = b$ dla pewnych x, y. Zwykły porządek w zbiorze $\mathbb{Q}$ jest liniowy, mamy więc na przykład $x < y$. Wtedy dla dowolnego z, takiego że $x < z < y$, mamy też $f(x) \leq f(z) \leq f(y)$, skąd $f(z) = b$. Zatem przeciwobraz $f^{-1}(\{b\})$ zawiera przedział wymierny $(x, y) \cap \mathbb{Q}$, który przecież jest nieskończony.

465: Rozpatrywany porządek[23] jest liniowy, gdyż relacja $\preceq$ jest porządkiem liniowym. Niech teraz $w_k(x) = 17x^2 + 42x - k$, dla $k \in \mathbb{N}$. Funkcje w_k tworzą ciąg malejący, więc nasz porządek nie jest dobrze ufundowany. Nie jest on też kratą zupełną, bo nie istnieje element najmniejszy ani nawet minimalny: wielomian $w-1$ jest zawsze mniejszy od w. Analogicznie, $w+1$ jest zawsze większe od w, więc nie ma też elementów największych ani maksymalnych.

Gdyby w definicji zbioru X zastąpić funkcje kwadratowe dowolnymi wielomianami, to relacja przestaje być antysymetryczna i pytania tracą sens. Zbiór X jest mocy $\aleph_0$, więc gęsty porządek w X można określić, przyjmując $x_1 \leq x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$, gdzie $f : X \xrightarrow[\text{na}]{1-1} \mathbb{Q}$.

466a: Tak. Niech $C \subseteq P$. Jeśli $C = \varnothing$, to kresem górnym C jest najmniejszy element zbioru P, czyli para $\langle\varepsilon, 0\rangle$. Można więc zakładać, że $C \neq \varnothing$. Niech $\langle v, y\rangle$ będzie jakimś ograniczeniem górnym zbioru C. Wtedy każdy element C ma postać $\langle u, x\rangle$, gdzie $u \subseteq v$. Wszystkie elementy niepustego zbioru $C_1 = \{w \mid \exists x.\, \langle w, x\rangle \in C\}$ (czyli rzutu C na pierwszą współrzędną) są więc prefiksami słowa u i jeden z nich, powiedzmy u_0, jest najdłuższy. Rozpatrzmy teraz zbiór $Z = \{x \in \mathbb{R} \mid \langle u_0, x\rangle \in C\}$. To jest podzbiór przedziału $[0, 1]$, ograniczony z góry przez 1, zatem istnieje $\sup Z$. Poszukiwanym kresem górnym zbioru C jest para $\langle u_0, \sup Z\rangle$. Oczywiście jest to ograniczenie górne. Aby pokazać, że to kres, przypuśćmy, że $\langle w, x\rangle$ też jest ograniczeniem górnym zbioru C. Wtedy w ogranicza z góry zbiór C_1 więc $w \supseteq u_0$.Zatem $\langle w, x\rangle \succeq \langle u_0, \sup Z\rangle$, bo albo $w \supset u_0$, albo $w = u_0$ i x ogranicza z góry zbiór Z, więc $x \geq \sup Z$.

466b: Tak. Niech $D \subseteq P$ i niech $\langle w_0, x_0\rangle \in D$. Rozpatrzmy rzut D na pierwszą współrzędną, czyli zbiór $D_1 = \{w \mid \exists x.\, \langle w, x\rangle \in D\} \subseteq \{a, b\}^*$. Pokażemy najpierw, że D_1 ma kres dolny ze względu na porządek $\subseteq$. Oczywiście D_1 jest ograniczony z dołu przez ε. Teraz zauważmy, że wszystkie ograniczenia dolne zbioru D_1 są w szczególności prefiksami słowa $w_0 \in D_1$. Jedno z nich jest najdłuższe i to właśnie jest kres dolny D_1. Oznaczmy ten kres przez v_0.
Przypadek 1: $v_0 \in D_1$, czyli zbiór $X = \{x \mid \langle v_0, x\rangle \in D\} \subseteq [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ jest niepusty. Z ciągłości zbioru $[0, 1]$ wynika, że istnieje $\inf X$. Wtedy para $\langle v_0, \inf X\rangle$ jest kresem dolnym zbioru D. Sprawdzamy, że to istotnie kres: dla $\langle w, x\rangle \in D$ mamy $w \in D_1$ więc $v_0 \subseteq w$. Przy tym jeśli $v_0 = w$, to $\inf X \leq x$, więc w każdym razie $\langle v_0, \inf X\rangle \preceq \langle w, x\rangle$. Zatem para $\langle v_0, \inf X\rangle$ jest ograniczeniem dolnym zbioru D. Jeśli jakaś para $\langle v, y\rangle$ też jest ograniczeniem dolnym zbioru D, to wtedy v jest ograniczeniem dolnym zbioru D_1, więc $v \subseteq v_0$. A jeśli $v = v_0$, to $y \leq X$, więc $y \leq \inf X$. Stąd $\langle v, y\rangle \preceq \langle v_0, \inf X\rangle$ i to faktycznie kres.
Przypadek 2: $v_0 \notin D_1$. Wtedy kresem dolnym zbioru D jest para $\langle v_0, 1\rangle$. Istotnie, dla dowolnego $\langle w, x\rangle \in D$ mamy wtedy $v_0 \subsetneq w$, więc $\langle v_0, 1\rangle$ ogranicza D z dołu. Teraz jeśli jakaś para $\langle v, y\rangle$ też jest ograniczeniem dolnym zbioru D, to v jest ograniczeniem dolnym zbioru D_1, a więc $v \subseteq v_0$. No to oczywiście $\langle v, y\rangle \preceq \langle v_0, 1\rangle$.

466c: Nie istnieje taki podzbiór. Przypuśćmy przeciwnie, że $\zeta : \mathbb{R} \times \mathbb{N} \to G \subseteq P$ jest izomorfizmem porządków $\langle \mathbb{R} \times \mathbb{N}, \preccurlyeq\rangle$ i $\langle G, \preceq\rangle$.

[23] Relacja $\leq$ jest częściowym porządkiem. Zwrotność i przechodniość są oczywiste. Antysymetria wynika stąd, że wartości trójmianu kwadratowego w trzech różnych punktach wyznaczają go jednoznacznie.

Dla $\zeta(r,n) = \langle w, x\rangle$ napiszemy $\zeta_1(r,n) = w$ i $\zeta_2(r,n) = x$. Funkcja $\lambda r.\zeta_1(r,0) : \mathbb{R} \to \{a,b\}^*$ nie może być różnowartościowa, bo zbiór $\mathbb{R}$ jest nieprzeliczalny, a zbiór $\{a,b\}^*$ jest przeliczalny. Zatem istnieje takie $w \in \{a,b\}^*$, i takie różne liczby rzeczywiste r_1, r_2, że $\zeta_1(r_1,0) = \zeta_1(r_2,0) = w$. Powiedzmy, że $r_1 < r_2$; wtedy dla każdego rzeczywistego r z przedziału (r_1,r_2) i każdego $n \in \mathbb{N}$ też zachodzi $\zeta_1(r,n) = w$. Skoro pierwsze współrzędne par $\zeta(r,n)$ są takie same, to drugie współrzędne muszą być różne. W szczególności przedziały postaci $(\zeta_2(r,0), \zeta_2(r,1))$ są rozłączne, a jest ich aż continuum. Pozostaje zauważyć, że w każdym jest inna liczba wymierna, a tych jest przeliczalnie wiele.

467a: Nie. Zbiór $(0,1] \times \{a,b\}^*$ nie ma kresu dolnego, choć jest ograniczony z dołu przez wszystkie pary postaci $\langle 0, w\rangle$. Ale wśród tych par nie ma największej.

467b: Niestety też nie. Zbiór $\{\frac{1}{2}\} \times \{a,b\}^*$ jest ograniczony z góry przez wszystkie pary $\langle x, v\rangle$, gdzie $x > \frac{1}{2}$. Ale wśród tych par nie ma najmniejszej.

467c: Ponieważ dowolny przedział otwarty jest izomorficzny z $\mathbb{R}$, podzbiorem izomorficznym z $\mathbb{N}\times\mathbb{R}$ jest np. suma $\bigcup\{(a_n, a_{n+1}) \times \{\varepsilon\} \mid n \in \mathbb{N}\}$, gdzie liczby a_n tworzą ciąg rosnący, np. $a_n = 1 - \frac{1}{n+1}$. Podzbiorem izomorficznym z $\mathbb{R}\times\mathbb{N}$ może być $(0,1) \times \{a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

467d: Zbiór Q nie jest dobrze uporządkowany, z tego prostego powodu, że nie jest łańcuchem: na przykład elementy $\langle x_1, aaa\rangle$ i $\langle x_1, abb\rangle$ nie są porównywalne.

Pokażemy, że zbiór Q jest dobrze ufundowany, bo każdy jego niepusty podzbiór ma element minimalny. Weźmy jakiś niepusty podzbiór $Y \subseteq Q$ i niech n_0 będzie najmniejszym elementem zbioru $L = \{n \mid \exists w.\, \langle x_n, w\rangle \in Y\}$. Dalej niech $D = \{w \mid \langle x_{n_0}, w\rangle \in Y\}$. Zbiór D jest niepustym podzbiorem dobrze ufundowanego drzewa wszystkich słów, ma więc element minimalny w_0. Pozostaje sprawdzić, że para $\langle x_{n_0}, w_0\rangle$ jest elementem minimalnym zbioru Y. Przypuśćmy więc, że $\langle x_n, w\rangle \in Y$ oraz $\langle x_n, w\rangle \preceq \langle x_{n_0}, w_0\rangle$. Wtedy $x_n \le x_{n_0}$, skąd $n \le n_0$, a ponieważ n_0 był elementem minimalnym L, więc $n = n_0$. A zatem $w \in D$ jest prefiksem w_0. Ale w_0 jest minimalne w D, więc $w = w_0$.

468: Niech A będzie zbiorem skierowanym. Jeśli $A = \varnothing$, to jego kresem górnym jest najmniejszy element zbioru $\mathbb{N} \to \mathsf{Bool}_\perp$, czyli funkcja stale równa $\perp$. Załóżmy więc, że A nie jest pusty i niech $A_n = \{\tau \in \mathsf{Bool}_\perp \mid \exists\alpha \in A.\, \alpha(n) = \tau\}$. Ponieważ A jest zbiorem skierowanym, więc nie może być tak, że $0, 1 \in A_n$. Mielibyśmy wtedy w zbiorze A dwa ciągi nie mające wspólnego ograniczenia w A. Zatem A_n ma element największy $\delta(n)$. Zauważmy, że:

a) Dla każdego $\alpha \in A$ i każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi $\alpha(n) \le \delta(n)$.

b) Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieje takie $\alpha \in A$, że $\alpha(n) = \delta(n)$.

Ciąg $\delta = \lambda n.\, \delta(n)$ jest kresem górnym zbioru A. Istotnie, dla $\alpha \in A$ nierówność $\alpha \trianglelefteq \delta$ wynika od razu z własności (a). Zatem δ jest ograniczeniem górnym dla A. Jeśli zaś jakiś ciąg ρ jest też ograniczeniem górnym dla A, to $\delta(n) \le \rho(n)$ wynika z własności (b), bo przecież $\alpha(n) \le \delta(n)$.

469: Niech A będzie zbiorem skierowanym. Jeśli $A = \varnothing$, to jego kresem górnym jest najmniejszy element zbioru $\mathbb{N} \to \mathsf{Bool}_\perp$, czyli funkcja stale równa $\perp$. Załóżmy więc, że $A \neq \varnothing$. Określimy przez indukcję ciąg $\delta : \mathbb{N} \to \mathsf{Bool}_\perp$, który będzie kresem górnym zbioru A. Załóżmy, że $\delta(k)$ jest już określone dla wszystkich liczb $k < n$, i to w ten sposób, że spełnione są warunki:

a) Dla każdego $\alpha \in A$ i każdego $k < n$ zachodzi $\alpha(k) \le \delta(k)$;

b) Zbiór $A_n = \{\alpha \in A \mid \forall k\, (k < n \to \alpha(k) = \delta(k))$ jest niepusty.

Oczywiście $A_0 = A$ i oba powyższe warunki są dla $n = 0$ spełnione. Rozpatrzmy teraz zbiór $D_n = \{\tau \in \mathsf{Bool}_\perp \mid \exists\alpha \in A_n\, (\alpha(n) = \tau)\}$. Zbiór A jest skierowany, więc nie może być tak, że $0, 1 \in D_n$. Mielibyśmy wtedy w zbiorze A dwa ciągi nie mające wspólnego ograniczenia w A. Zatem D_n ma element największy, który wybieramy jako $\delta(n)$.

Z warunku (a) wynika, że $\alpha \preceq \delta$ dla każdego $\alpha \in A$, czyli, że δ jest ograniczeniem górnym dla A. Jeśli ciąg ρ jest też ograniczeniem górnym dla A, to $\delta(n) \le \rho(n)$ wynika z warunku (b) założenia indukcyjnego.

475: Niech $\mathcal{X}$ będzie skierowanym podzbiorem zbioru $\mathsf{P}(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$. Ponieważ w $\mathsf{P}(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$ kresem górnym dowolnej rodziny zbiorów jest jej suma, więc należy udowodnić równość $\bigcup\{s \cdot s \mid s \in \mathcal{X}\} = \bigcup\mathcal{X} \cdot \bigcup\mathcal{X}$. Aby wykazać inkluzję z lewej do prawej, przypuśćmy, że $\langle a, b\rangle \in \bigcup\{s \cdot s \mid s \in \mathcal{X}\}$. Wtedy istnieje takie $s \in \mathcal{X}$, i takie $c \in \mathbb{N}$, że $\langle a, c\rangle, \langle c, b\rangle \in s$. Ponieważ $s \subseteq \bigcup\mathcal{X}$, więc $\langle a, b\rangle \in \bigcup\mathcal{X} \cdot \bigcup\mathcal{X}$.

Załóżmy teraz, że $\langle a, b\rangle \in \bigcup\mathcal{X} \cdot \bigcup\mathcal{X}$. Istnieje takie $c \in \mathbb{N}$, że $\langle a, c\rangle, \langle c, b\rangle \in \bigcup\mathcal{X}$. A więc $\langle a, c\rangle \in s$

oraz $\langle c, b\rangle \in s'$, dla pewnych relacji $s, s' \in \mathcal{X}$. Ponieważ zbiór $\mathcal{X}$ jest skierowany, więc istnieje relacja $s'' \in \mathcal{X}$ zawierająca zarówno s jak s'. Zatem $\langle a, c\rangle, \langle c, b\rangle \in s''$ czyli $\langle a, b\rangle \in (s'' \cdot s'')$. Stąd mamy $\langle a, b\rangle \in \bigcup\{(s \cdot s) \mid s \in \mathcal{X}\}$, co kończy dowód inkluzji z prawej do lewej.

480: Niech $\langle A, \leq\rangle$ będzie przeliczalnym zbiorem częściowo uporządkowanym, w którym każdy łańcuch ma kres górny i niech S będzie jego skierowanym podzbiorem. Jeśli $S = \varnothing$, to S jest łańcuchem i ma kres górny, załóżmy więc, że $S \neq \varnothing$. Skoro S jest przeliczalny, więc możemy ponumerować jego elementy, przyjmując $S = \{s_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Definiujemy przez indukcję ciąg b_n elementów zbioru S w ten sposób, że każdy „prefiks” postaci $\{b_0, \ldots, b_n\}$ jest łańcuchem. Zaczynamy od $b_0 = s_0$, a następnie (zakładając, że $b_0, \ldots, b_n$ są już określone i tworzą łańcuch) definiujemy b_{n+1} w zależności od s_{n+1}. Jeśli s_{n+1} jest porównywalne ze wszystkimi elementami $b_1, \ldots, b_n$ to przyjmujemy $b_{n+1} = s_{n+1}$. W przeciwnym razie wybieramy element $s \in S$, który ogranicza z góry zbiór $\{b_1, \ldots, b_n, s_{n+1}\}$ i definiujemy $b_{n+1} = s$.

Zbiór $B = \{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, skonstruowany w ten sposób, jest oczywiście łańcuchem, z założenia ma więc kres górny b. Pokażemy, że jest to także kres górny dla S. Ponieważ dla dowolnego $s \in S$ istnieje takie n, że $s \leq b_n \leq b$, więc b ogranicza z z góry cały zbiór S. Ponadto jeśli jakieś d jest ograniczeniem górnym S, to tym bardziej jest ograniczeniem górnym B więc $d \geq b$.

483: Inkluzja $\bigcup f(S) \subseteq f(\bigcup S)$ wynika wprost z monotoniczności, bo dla $B \in S$ mamy $B \subseteq \bigcup S$. Niech więc $x \in f(\bigcup S)$. Z założenia istnieje skończony zbiór $B = \{b_1, \ldots b_k\} \subseteq \bigcup S$, taki że $x \in f(B)$. Skoro $B \subseteq \bigcup S$, to każdy z elementów b_k należy do pewnego składnika $D_k \in S$. Ale ponieważ S jest skierowany, to w S musi istnieć zbiór E zawierający wszystkie D_k. Wtedy także $B \subseteq E$, skąd $x \in f(B) \subseteq f(E) \subseteq \bigcup f(S)$.

484: Każdy zbiór jest sumą rodziny swoich skończonych podzbiorów i na dodatek ta rodzina jest skierowana i niepusta. Zatem natychmiast z ciągłości wynika warunek

$$f(a) = \bigcup\{f(e) \mid e \text{ skończony oraz } e \subseteq a\}.$$

Dla dowodu implikacji odwrotnej załóżmy, że S jest skierowanym podzbiorem $\mathsf{P}(\mathbb{N})$. Kresem górnym w $\mathsf{P}(\mathbb{N})$ jest oczywiście suma, więc równość $\sup f(S) = f(\sup S)$ sprowadza się do równości

$$\bigcup\{f(s) \mid s \in S\} = \bigcup\{f(e) \mid e \text{ skończony oraz } e \subseteq \bigcup S\}.$$

Oznaczmy lewą i prawą stronę tej równości przez LS i PS. Przypuśćmy, że $x \in \mathrm{LS}$. Wtedy $x \in f(s)$ dla pewnego $s \in S$, ale $f(s) = \bigcup\{f(e) \mid e \text{ skończony oraz } e \subseteq s\}$, więc $x \in f(e)$, gdzie e jest skończony i $e \subseteq s \subseteq \bigcup S$. Zatem $x \in \mathrm{PS}$. Na odwrót, jeśli $x \in \mathrm{PS}$, to $x \in f(e)$, gdzie $e = \{y_1, \ldots, y_k\}$ jest skończonym podzbiorem $\bigcup S$. Istnieją takie $s_1, \ldots, s_k \in S$, że $y_1 \in s_1, \ldots, y_k \in s_k$. Zbiór S jest skierowany, więc istnieje też takie $s \in S$, że $s_1, \ldots, s_k \subseteq s$. Mamy więc $e \subseteq s$. Ponieważ $f(s) = \bigcup\{f(e) \mid e \text{ skończony oraz } e \subseteq s\}$, więc $f(e) \subseteq f(s)$ i ostatecznie $x \in f(s)$.

486: Ponieważ zbiór pusty jest łańcuchem, więc istnieje $\inf \varnothing$, czyli największy element zbioru A. Oznaczmy go przez $\top$. Dalej zauważmy, że funkcja f jest monotoniczna. Jeśli bowiem $a \leq b$ to zbiór $\{a, b\}$ tworzy łańcuch o kresie dolnym a. Zatem $f(a)$ jest kresem dolnym dla $\{f(a), f(b)\}$, czyli $f(a) \leq f(b)$.

Niech $a_k = f^k(\top)$. Z monotoniczności funkcji f wynika, że ciąg a_k jest zstępujący: $a_0 \geq a_1 \geq a_2 \ldots$ Zbiór $\{a_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ jest więc łańcuchem i ma kres dolny a_ω. Z założenia o f mamy teraz $f(a_\omega) = \inf\{f^{k+1}(\top) \mid k \in \mathbb{N}\} = \inf\{f^k(a_k) \mid k \in \mathbb{N}\} = a_\omega$. A więc a_ω jest punktem stałym f. Jeśli b jest innym punktem stałym, to oczywiście $b \leq \top$. Przez indukcję łatwo udowodnić, że $b = f^k(b) \leq f^k(\top) = a_k$ skąd b jest ograniczeniem dolnym zbioru $\{a_k \mid k \in \mathbb{N}\}$. A zatem $b \leq a_\omega$, bo a_ω jest kresem dolnym tego zbioru.

487a: Nie. Niech np. $f(2k) = 2k + 1$ i $f(2k + 1) = 2k$ dla wszystkich k. Ponieważ porządek $\sqsubseteq$ ma być liniowy, to albo $0 \sqsubseteq 1$ albo $1 \sqsubseteq 0$. W pierwszym przypadku otrzymamy wtedy $1 \sqsubseteq 0$, w drugim przypadku $0 \sqsubseteq 1$. Tak, czy owak, $0 \sqsubseteq 1 \sqsubseteq 0$, skąd wynika sprzeczność: $0 = 1$.

487b: Nie. Weźmy np. $f(2k) = 0$ i $f(2k + 1) = 1$, dla wszystkich k. Wtedy $0 \leq 1 \leq 2$ implikuje $0 \sqsubseteq 1 \sqsubseteq 0$ i znowu mamy $0 = 1$.

487c: Tak. Przyjmijmy, że $m \sqsubseteq n$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(f(m) < f(n)) \vee (f(m) = f(n) \wedge m \leq n)$.

488a: Nie, np. dla $X = \mathbb{Z}_- \cup (0, 1)$ i $Y = (0, 1) \cup \mathbb{N}$ ze zwykłym porządkiem, porządek w zbiorze $Z = (0, 1)$ jest gęsty.

488b: Nie, np. dla $X = \mathbb{Q}$ i $Y = (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cup \mathbb{N}$, ze zwykłym porządkiem, mamy $Z = \mathbb{N}$, gdzie zwykły porządek nie jest gęsty.

488c: Nie, np. dla $X = (0,1) \cup (1,2) \cup [3,4)$ i $Y = (0,1) \cup (2,3]$ ze zwykłym porządkiem, mamy $Z = (0,1) \cup \{3\}$. Kresem górnym zbioru $(0,1)$ w Z jest 3, natomiast $\sup(0,1)$ nie istnieje ani w X, ani w Y.

488d: Nie, np. dla $X = \mathbb{Z}_- \cup (0,1)$ i $Y = (0,1) \cup \mathbb{N}$ ze zwykłym porządkiem, mamy $Z = (0,1)$ i kres dolny zbioru $(0,1)$ nie istnieje w Z, natomiast $\inf_X(0,1) = -1$ i $\inf_Y(0,1) = 0$.

492: Wprost z definicji wynika, że ciągi k_m i ℓ_m są różnowartościowe. Ponadto, każda liczba naturalna k jest postaci k_m, gdzie $m \leq 2k$ (łatwa indukcja). W ciągu ℓ_m też występują wszystkie liczby naturalne. Dlatego funkcja h jest dobrze określona.

Także wprost z definicji wynika równoważność $(f(k_i) \leq f(k_m) \leftrightarrow g(\ell_i) \leq g(\ell_m))$ dla dowolnych liczb i, m, a więc nasza bijekcja h jest izomorfizmem.

494: Zbiór Ku jest mocy $\aleph_0$, jest gęsty i nie ma elementu pierwszego ani ostatniego, a więc (por. zadanie 493) jest izomorficzny ze zbiorem liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ (uporządkowanym tak jak zwykle). Niech $f : Ku \xrightarrow[\text{na}]{1-1} \mathbb{Q}$ będzie izomorfizmem. Dla $er \in Er$ przez $er{\downarrow}$ oznaczymy zbiór $\{ku \in Ku \mid ku < er\}$.

Rozpatrzmy przekształcenie $F : Er \to \mathbb{R}$, dane wzorem $F(er) = \sup f(er{\downarrow})$. Przekształcenie to jest różnowartościowe, bo jeśli $x < y$ to $x < ku_1 < ku_2 < y$ dla pewnych $ku_1, ku_2 \in Ku$. Wtedy dla dowolnego $d \in x{\downarrow}$ mamy $f(d) < f(ku_1)$, skąd $F(x) \leq f(ku_1) < f(ku_2) \leq F(y)$.

Analogicznie, jeśli $G(r) = \sup f^{-1}(\{q \in \mathbb{Q} \mid q < r\})$ dla $r \in \mathbb{R}$, to $G : \mathbb{R} \xrightarrow{1-1} Er$. Dowód jest w zasadzie taki sam. A więc pokazaliśmy, że $\overline{\overline{Er}} \leq \overline{\overline{\mathbb{R}}}$ oraz $\overline{\overline{\mathbb{R}}} \leq \overline{\overline{Er}}$. Zatem $\overline{\overline{Er}} = \mathfrak{C}$.

495a: Załóżmy, że $\mathcal{B}$ nie jest dobrze ufundowany, czyli że istnieje nieskończony łańcuch malejący $A = \{a_i \in B \mid i \in \mathbb{N}\}$, gdzie $a_{i+1} < a_i$ dla każdego $i \in \mathbb{N}$. Element a_0 jest na pewno większy od zera, bo jest tylko pięć elementów $\mathcal{B}$ mniejszych od zera (są to $1-\pi$, $2-\pi$, $1-\frac{\pi}{2}$, $3-\pi$ i $1-\frac{\pi}{3}$). Rozpatrzmy przedziały postaci $[k, k+1)$ dla $k \in \mathbb{N}$, $k < a_0$. Jest ich skończenie wiele, a więc musi istnieć takie $n \in \mathbb{N}$, że zbiór $A \cap [n, n+1)$ jest nieskończony. Niech a_k będzie elementem o najmniejszym indeksie wśród wszystkich elementów zbioru A w przedziale $[n, n+1)$. Wtedy $A \cap [n, n+1) \subseteq [n, a_k]$, ale w przedziale $[n, a_k]$ jest tylko skończenie wiele[24] elementów B, a więc tym bardziej skończenie wiele elementów A. Sprzeczność.

495b: Nie, zbiór $\{n - \pi \mid n \in \mathbb{N} - \{0\}\}$ nie ma żadnego ograniczenia górnego, a więc nie ma też kresu.

495c: Tak, niech $P \subseteq B$ i $P \neq \varnothing$. Jeśli P ma element największy, to jest to oczywiście jego kres górny. W przeciwnym przypadku P musi być nieskończony. Ponieważ P jest ograniczony z góry, to istnieje największe takie n, że iloczyn $P \cap [n, n+1)$ jest niepusty. W istocie ten iloczyn jest nieskończony, bo inaczej zbiór P miałby element największy. Pokażemy, że wtedy najmniejszym ograniczeniem górnym zbioru P jest $b = n + 2 - \frac{\pi}{4}$, czyli najmniejszy element B większy lub równy $n+1$. Oczywiście b jest ograniczeniem górnym P. A jeśli $e \in B$ i $e < b$ to $e < n+1$, więc albo $e \leq n$, albo w przedziale $[n, e]$ jest tylko skończenie wiele elementów B (a więc również skończenie wiele elementów P). Takie e nie może być ograniczeniem górnym P, a więc $\sup P = b$.

495d: Nie, bo porządek $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$ nie ma elementu najmniejszego, a $\mathcal{B}$ ma: $1 - \pi$.

501: Niech L będzie łańcuchem zbiorów rzadkich. Aby pokazać, że suma $\bigcup L$ jest rzadka, przypuśćmy, że $x, y \in \bigcup L$. Wtedy $x \in A \in L$ oraz $y \in B \in L$, dla pewnych A i B, a ponieważ L jest łańcuchem, to albo $A \subseteq B$ albo $B \subseteq A$. Wtedy albo $x, y \in A$ albo $x, y \in B$ i w obu przypadkach mamy $\rho(x,y) \geq 1$. Rozpatrzmy rodzinę Z wszystkich rzadkich podzbiorów $\mathbb{R}^n$ uporządkowaną przez inkluzję. Skoro suma dowolnego łańcucha L w $\langle Z, \subseteq \rangle$ należy do Z, oraz każdy zbiór $A \in L$ jest zawarty w $\bigcup L$, więc $\bigcup L$ jest ograniczeniem górnym L w zbiorze Z. Pokazaliśmy w ten sposób, że zbiór uporządkowany $\langle Z, \subseteq \rangle$ spełnia założenia lematu Kuratowskiego-Zorna, ma więc element maksymalny. Jest to zbiór rzadki a jednocześnie wszędobylski.

[24] W każdym przedziale $[n, n+1)$ są tylko trzy elementy zbioru B nie będące postaci $n + 1 - \frac{\pi}{k}$. Są to liczby $n + 2 - \frac{\pi}{2}$, $n + 2 - \frac{\pi}{3}$, i $n + 4 - \pi$. Wynika stąd, że w każdym przedziale $[n, e]$, gdzie $n \in \mathbb{N}$, $e \in \mathbb{R}$, oraz $n \leq e < n+1$, jest tylko skończenie wiele elementów B.

Powyższe rozwiązanie działa dla dowolnego n. Uwaga: dla $n > 3$ zbiór punktów o współrzędnych całkowitych nie jest wszędobylski.

502: Rozpatrzmy rodzinę $\mathcal{S}$ wszystkich skierowanych podzbiorów zbioru częściowo uporządkowanego $\langle A, \leq \rangle$. Mamy udowodnić, że zbiór $\mathcal{S}$ (uporządkowany przez inkluzję) ma element maksymalny. Należy w tym celu pokazać, że suma każdego łańcucha L zbiorów skierowanych jest zbiorem skierowanym. Wówczas bowiem suma łańcucha L jest jego ograniczeniem górnym w $\mathcal{S}$ i można zastosować lemat Kuratowskiego-Zorna.

Przypuśćmy więc, że $a, b \in \bigcup L$. Wtedy $a \in A$, $b \in B$, dla pewnych $A, B \in L$. Jeden z tych zbiorów jest zawarty w drugim, bo L jest łańcuchem. Jeśli na przykład $A \subseteq B$ to $a, b \in B$ i musi istnieć takie $c \in B$, że $a, b \leq c$. Oczywiście $c \in \bigcup L$, więc pokazaliśmy, że a i b mają wspólne ograniczenie w $\bigcup L$. A więc $\bigcup L$ faktycznie jest zbiorem skierowanym.

509: Tak. Niech $\mathcal{Z} = \{A \subseteq \mathbb{R} \mid \overline{\overline{A}} = \aleph_0\}$. Gdyby suma każdego łańcucha zbiorów przeliczalnych byłaby przeliczalna, to każdy łańcuch w Z miałby ograniczenie górne, więc z Lematu Kuratowskiego-Zorna w Z istniałby element maksymalny. Inaczej: istniałby maksymalny przeliczalny podzbiór A zbioru $\mathbb{R}$. A to jest niemożliwe: jeśli $\overline{\overline{A}} = \aleph_0$, to $\mathbb{R} - A \neq \varnothing$ i dla dowolnej liczby $x \notin A$ mamy $A \subseteq A \cup \{x\}$ i $\overline{\overline{A \cup \{x\}}} = \aleph_0$. Zatem istnieje taki łańcuch zbiorów przeliczalnych, którego suma nie jest przeliczalna.

517: Jest to np. zbiór wszystkich prostych równoległych do osi pionowej.

519: Takim podzbiorem jest selektor rodziny przeciwobrazów $\{f^{-1}(\{x\}) \mid x \in B\}$. Tu też lemat Kuratowskiego-Zorna jest niepotrzebny.

521: Należy udowodnić, że rodzina $Z = \{B \subseteq A \mid \text{żadne trzy punkty w B nie są współliniowe}\}$ ma element maksymalny. W tym celu rozpatrzmy dowolny łańcuch $Ł$ w Z. Suma tego łańcucha należy do Z. Jeśli bowiem $a, b, c \in \bigcup Ł$ to każdy z tych punktów należy do pewnego zbioru z łańcucha $Ł$. Jeden z tych trzech zbiorów zawiera pozostałe (bo przecież $Ł$ jest łańcuchem) więc punkty a, b, c nie mogą być współliniowe.

Skoro $\bigcup Ł \in Z$ to $\bigcup Ł$ jest ograniczeniem górnym łańcucha $Ł$. A więc pokazaliśmy, że dowolny łańcuch w Z ma ograniczenie górne. Z lematu Kuratowskiego-Zorna wynika istnienie elementu maksymalnego. Jest to zbiór spełniający warunki zadania.

522: Zbiór jest jednocześnie D-łatwy i D-trudny, wtedy i tylko wtedy, gdy jest maksymalnym zbiorem D-łatwym (tj. elementem maksymalnym rodziny wszystkich zbiorów D-łatwych, uporządkowanej przez inkluzję). Rodzina ta spełnia założenia lematu Kuratowskiego-Zorna, jeśli bowiem L jest łańcuchem zbiorów D-łatwych, to $\bigcup L$ też jest zbiorem D-łatwym, (a jako taki, stanowi ograniczenie górne łańcucha). Istotnie, jeśli $x, y \in \bigcup L$, to istnieją takie $V_1, V_2 \in L$, że $x \in V_1$ i $y \in V_2$. Ponieważ L jest łańcuchem, więc $V_{2-i} \subseteq V_i$ dla $i = 1$ lub $i = 2$. Wtedy $x, y \in V_i$, skąd wynika pożądana własność $(x+y)^3 - 2xy \in D$.

Z powyższego wynika, że dla każdego D, do rodziny wszystkich zbiorów D-łatwych stosuje się lemat Kuratowskiego-Zorna, a więc maksymalny zbiór D-łatwy istnieje zawsze.

523: Tak. Są to selektory zbioru klas abstrakcji relacji współmierności.

524: Rozpatrzmy rodzinę $\mathcal{T}$ złożoną ze wszystkich takich podzbiorów T zbioru B, że
$$|x - y| \geq \tfrac{1}{2}(|x - A| + |y - A|),$$
dla dowolnych różnych $x, y \in T$. Rodzina $\mathcal{T}$, uporządkowana przez inkluzję, jest niepusta (bo każdy jednoelementowy podzbiór B należy do $\mathcal{T}$) i spełnia założenia lematu Kuratowskiego-Zorna. Niech bowiem L będzie łańcuchem w $\mathcal{T}$ i niech $U = \bigcup L$. Jeśli $x, y \in U$, to istnieją takie $T, T' \in \mathcal{T}$, że $x \in T$ i $y \in T'$. Skoro L jest łańcuchem, to albo $T \subseteq T'$ albo $T' \subseteq T$. W obu przypadkach liczby x, y należą do tego samego zbioru z rodziny $\mathcal{T}$, więc ich różnica spełnia warunek powyżej.

Pokazaliśmy więc, że suma dowolnego łańcucha w $\mathcal{T}$ należy do $\mathcal{T}$. A zatem każdy łańcuch w $\mathcal{T}$ jest ograniczony z góry. Z lematu Kuratowskiego-Zorna wnioskujemy, że istnieje maksymalny element T rodziny $\mathcal{T}$. Zbiór T spełnia pierwszy warunek wymieniony w zadaniu, bo należy do $\mathcal{T}$. Spełnia też drugi warunek, bo jest maksymalny: jeśli $x \in B - T$, to zbiór $T \cup \{x\}$ nie należy już do $\mathcal{T}$.

525: Udowodnimy, że szukana rodzina R jest elementem maksymalnym w pewnym częściowym porządku. Rozważmy rodzinę $\mathcal{A} = \{S \subseteq \mathsf{P}(\mathcal{N}) \mid (K \subseteq S) \wedge \forall A, B \in S\,(A \cap B \neq \varnothing)\}$. Pokażemy, że $\langle \mathcal{A}, \subseteq\rangle$ spełnia założenie lematu Kuratowskiego-Zorna:

Każdy łańcuch w $\langle \mathcal{A}, \subseteq\rangle$ ma ograniczenie górne.

Weźmy dowolny łańcuch $\pounds$ w $\langle \mathcal{A}, \subseteq\rangle$. Jeśli $\pounds$ jest pusty, to jego ograniczeniem jest dowolny element rodziny $\mathcal{A}$. Wystarczy więc zauważyć, że $\mathcal{A}$ jest niepusty, bo rodzina wszystkich zbiorów koskończonych jest elementem $\mathcal{A}$. Jeżeli $\pounds$ jest niepusty, to jego ograniczeniem górnym w $\langle \mathcal{A}, \subseteq\rangle$ jest $\bigcup \pounds$:

- Jeśli $S \in \pounds$, to oczywiście $S \subseteq \bigcup \pounds$.
- Pokażemy, że $\bigcup \pounds \in \mathcal{A}$. Łańcuch $\pounds$ jest niepusty, więc istnieje $S \in \pounds$. Do zbioru S należą wszystkie zbiory koskończone, zatem należą także do zbioru $\bigcup \pounds$. Aby pokazać drugi warunek, weźmy dowolne zbiory $A, B \in \bigcup \pounds$. Wówczas istnieją takie $S_1, S_2 \in \pounds$, że $A \in S_1$ i $B \in S_2$. Jednak $\pounds$ jest łańcuchem, więc $S_1 \subseteq S_2$ lub $S_2 \subseteq S_1$. Załóżmy, że $S_1 \subseteq S_2$ (w drugim przypadku dowód jest analogiczny). Wtedy $A, B \in S_2$. Jednak $S_2 \in \mathcal{A}$, zatem A i B są styczne. Zbiór $\bigcup \pounds$ spełnia oba warunki wymienione w definicji $\mathcal{A}$, czyli $\bigcup \pounds \in \mathcal{A}$.

Na mocy lematu Kuratowskiego-Zorna w $\langle \mathcal{A}, \subseteq\rangle$ istnieje element maksymalny R. Pokażemy, że R spełnia warunki zadania. Wiemy, że $R \in \mathcal{A}$, zatem do R należą wszystkie zbiory koskończone oraz każde dwa zbiory należące do R są styczne. Pokażemy nie wprost, że R spełnia także trzeci warunek. Jeśli tak nie jest, to znaczy, że istnieje zbiór $A \notin R$ taki, że dla każdego $B \in R$ zbiory A i B są styczne. Wówczas jednak $R \cup \{A\} \in \mathcal{A}$ oraz $R \subseteq R \cup \{A\}$, czyli R nie jest elementem maksymalnym. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że każdy element maksymalny w $\langle \mathcal{A}, \subseteq\rangle$ spełnia warunki zadania.

526: Weźmy dowolny łańcuch (ze względu na inkluzję) zbiorów parami spełnialnych zawierających A. Pokażemy, że suma tego łańcucha jest zbiorem parami spełnialnym. W tym celu rozpatrzmy dwie formuły α i β należące do tej sumy. Wówczas muszą istnieć takie zbiory X i Y, należące do łańcucha, że $\alpha \in X$ i $\beta \in Y$. Ale ponieważ to jest łańcuch, to mamy $X \subseteq Y$ lub $Y \subseteq X$, zatem $\alpha, \beta \in X$ lub $\alpha, \beta \in Y$. Ponieważ zarówno X jak Y są parami spełnialne, więc α i β muszą być współspełnialne.

Pokazaliśmy, że suma każdego łańcucha zbiorów parami spełnialnych jest parami spełnialna. Suma zawiera wszystkie elementy łańcucha, jest więc jego ograniczeniem górnym w rodzinie wszystkich zbiorów parami spełnialnych. A więc każdy łańcuch w tej rodzinie ma ograniczenie górne. Z lematu Kuratowskiego-Zorna, zbiór wszystkich zbiorów parami spełnialnych zawierających A ma zatem element maksymalny Z. Niech teraz $\alpha \notin Z$. Jeśli każda koniunkcja $\alpha \wedge \beta$, dla $\beta \in Z$ jest spełnialna, to zbiór $Z \cup \{\alpha\}$ jest parami spełnialny. Jest to sprzeczne z maksymalnością zbioru Z.

527a: Ponieważ $\sup X$ jest ograniczeniem górnym zbioru X, więc $X \subseteq C(X)$.

527b: Zauważmy, że $\sup X$ jest ograniczeniem górnym zbioru $C(X)$, a więcjest większe lub równe od jego kresu. Zatem dla dowolnego $a \in C(C(X))$ mamy $a \leq \sup C(X) \leq \sup X$, czyli $a \in C(X)$. Tak wykazaliśmy, że $C(C(X)) \subseteq C(X)$, skąd na mocy zad. 527a wynika, że $C(C(X)) = C(X)$.

527c: Załóżmy, że $X \subseteq Y$. Niech $a \in C(X)$, zatem $a \leq \sup X$. Skoro $X \subseteq Y$, to $\sup Y$ jest ograniczeniem górnym zbioru X i tym samym $\sup X \leq \sup Y$, a więc $a \leq \sup Y$, skąd $a \in C(Y)$. Wobec tego $C(X) \subseteq C(Y)$.

528a: To jest nieco mniej rutynowy przykład zastosowania lematu Kuratowskiego-Zorna. Weźmy łańcuch dwułańcuchów $\mathcal{L}$ i niech $X = \bigcup\{B \mid \exists C.\, \langle B, C\rangle \in \mathcal{L}\}$ oraz $Y = \bigcup\{C \mid \exists B.\, \langle B, C\rangle \in \mathcal{L}\}$. Sprawdzimy, że para $\langle X, Y\rangle$ jest dwułańcuchem w A.

Nieporównywalność: Jeśli $x \in X$ oraz $y \in Y$, to są takie $\langle B_1, C_1\rangle, \langle B_2, C_2\rangle \in \mathcal{L}$, że $x \in B_1$ i $y \in C_2$. Ponieważ $\mathcal{L}$ jest łańcuchem, więc pary $\langle B_1, C_1\rangle, \langle B_2, C_2\rangle$ są porównywalne i mamy np. $B_1 \subseteq B_2$. Wtedy $x \in B_2$ skąd wynika, że x i y są nieporównywalne.

Porównywalność: Jeśli $x, y \in X$, to są takie $\langle B_1, C_1\rangle, \langle B_2, C_2\rangle \in \mathcal{L}$, że $x \in B_1$ i $y \in B_2$. Wtedy albo $x, y \in B_1$ albo $x, y \in B_2$, więc x i y są porównywalne. Zatem X jest łańcuchem i podobnie dla Y.

Para $\langle X, Y\rangle$ jest więc dwułańcuchem, który ogranicza z góry łańcuch dwułańcuchów $\mathcal{L}$. Czyli założenie lematu Kuratowskiego-Zorna jest spełnione.

528b: Rozważamy rodzinę wszystkich dwułańcuchów $\langle B, C\rangle$ spełniających warunki $b \in B$ i $c \in C$ i tam szukamy maksymalnego elementu tak samo jak w zadaniu 528a.

529: Niech $\overline{\overline{A}} = \mathfrak{m}$ i niech $\mathcal{F}$ będzie zbiorem wszystkich bijekcji $f : B \xrightarrow[\text{na}]{1-1} B \oplus B$, gdzie $B \subseteq A$. Ponieważ elementy zbioru $\mathcal{F}$ są funkcjami częściowymi z A do $A \oplus A$, więc $\mathcal{F}$ jest zbiorem częściowo uporządkowanym przez zawieranie funkcji. Pokażemy, że zbiór ten spełnia założenia lematu Kuratowskiego-Zorna. Rozpatrzmy łańcuch $\mathcal{L}$ w zbiorze $\mathcal{F}$. Taki łańcuch jest zgodną rodziną funkcji, więc jego suma jest funkcją częściową z A do $A \oplus A$. Dziedziną tej funkcji jest zbiór $D = \bigcup\{\mathrm{Dom}(f) \mid f \in \mathcal{L}\}$, podobnie $\mathrm{Rg}(\bigcup)\mathcal{L} = \bigcup\{\mathrm{Rg}(f) \mid f \in \mathcal{L}\} = \bigcup\{\mathrm{Dom}(f) \oplus \mathrm{Dom}(f) \mid f \in \mathcal{L}\} = D \oplus D$. A więc $\bigcup \mathcal{L} : D \xrightarrow{\text{na}} D \oplus D$. Należy jeszcze udowodnić, że $\bigcup \mathcal{L}$ jest funkcją różnowartościową. Niech $b, d \in D$ i niech $(\bigcup \mathcal{L})(b) = (\bigcup \mathcal{L})(d)$. Istnieją takie funkcje $f, g \in \mathcal{L}$, że $b \in \mathrm{Dom}(f)$ i $d \in \mathrm{Dom}(g)$. Ponieważ $\mathcal{L}$ jest łańcuchem, więc np. $f \subseteq g$. Wtedy $g(b) = (\bigcup \mathcal{L})(b) = (\bigcup \mathcal{L})(d) = g(d)$, skąd $b = d$, bo g jest funkcją różnowartościową.

W ten sposób udowodniliśmy, że $\bigcup \mathcal{L}$ jest bijekcją z D do $D \oplus D$, zatem należy do rodziny $\mathcal{F}$. Oczywiście $\bigcup \mathcal{L}$ ogranicza z góry łańcuch $\mathcal{L}$. Możemy więc użyć lematu Kuratowskiego-Zorna i wywnioskować, że w $\mathcal{F}$ istnieje maksymalna funkcja $F : E \xrightarrow[\text{na}]{1-1} E \oplus E$. Zbiór E nie musi być całym zbiorem A, wystarczy jednak jeśli będzie z nim równoliczny. Wtedy bowiem $\mathfrak{m} = \overline{\overline{E}} = \overline{\overline{E \oplus E}} = \mathfrak{m} + \mathfrak{m}$.

Przypuśćmy, że $E \not\sim A$. Wtedy różnica $A - E$ jest zbiorem nieskończonym, zawiera więc podzbiór N, który jest mocy $\aleph_0$. Ponieważ $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$, więc istnieje bijekcja $f : N \xrightarrow[\text{na}]{1-1} N \oplus N$. Funkcja $G = F \cup f$ jest wówczas bijekcją ze zbioru $E \cup N$ do sumy prostej $(E \cup N) \oplus (E \cup N)$, a więcelementem rodziny $\mathcal{F}$, który jest większy od F, co przeczy maksymalności funkcji F.

531: Niech $\overline{\overline{A}} = \mathfrak{m}$. Podobnie jak w zadaniu 529 dowodzimy, że istnieje maksymalna bijekcja postaci $F : E \xrightarrow[\text{na}]{1-1} E \times E$, gdzie $E \subseteq A$ jest zbiorem nieskończonym. (Dlaczego?) Niech $\overline{\overline{E}} = \mathfrak{n}$. Mamy więc $\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{n} = \mathfrak{n}$. Jeśli $\mathfrak{n} = \mathfrak{m}$, to już dobrze, w przeciwnym razie z zadania 530 wynika, że moc zbioru $A - E$ jest większa od $\mathfrak{n}$. Niech $D \subseteq A - E$ będzie zbiorem mocy $\mathfrak{n}$. Skoro $\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{n} = \mathfrak{n}$ oraz $\mathfrak{n} + \mathfrak{n} + \mathfrak{n} = \mathfrak{n}$, to D jest równoliczne z sumą $S = (D \times E) \cup (E \times D) \cup (D \times D)$. Poieważ $(E \cup D) \times (E \cup D) = (E \times E) \cup S$, więc jeśli $G : D \xrightarrow[\text{na}]{1-1} S$, to $F \cup G : E \cup D \xrightarrow[\text{na}]{1-1} (E \cup D) \times (E \cup D)$ i mamy sprzeczność z maksymalnością F.

535: Gdy wszystkie elementy A są nieporównywalne.

536: Przypuśćmy, że zbiory $X_n \subseteq A$ tworzą nieskończony ciąg malejący. Ponieważ $X_n \sqsupseteq X_{n+1}$ oraz $X_n \neq X_{n+1}$, więc wszystkie zbiory X_n są niepuste. Niech x_n będzie dowolnym elementem minimalnym zbioru X_n. Oczywiście $x_n \geq x_{n+1}$, a ponieważ A jest dobrze ufundowany, więc ciąg $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ musi być od pewnego miejsca stały: dla pewnego k mamy $x_k = x_{k+1} = x_{k+2} = \cdots$

Ponieważ x_k należy do X_k, więc $X_{k+1} \leq x_k$. Ale $x_k = x_{k+1}$ jest elementem minimalnym w X_{k+1}, więc $X_{k+1} = \{x_k\}$. To samo rozumowanie stosuje się do X_{k+2}, skąd $X_{k+2} = \{x_k\} = X_{k+1}$, sprzeczność.

537: Niech Z oznacza zbiór wszystkich dobrze ufundowanych częściowych porządkow w $\mathbb{N}$. Oczywiście $\overline{\overline{Z}} \leq \mathfrak{C}$, bo $Z \subseteq \mathsf{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$. Aby udowodnić nierówność $\mathfrak{C} \leq \overline{\overline{Z}}$ określimy funkcję $F : \mathsf{P}(\mathbb{N} - \{0\}) \xrightarrow{1-1} Z$. Dla dowolnego $A \subseteq \mathbb{N} - \{0\}$ przyjmiemy $F(A) = \{\langle a, 0\rangle \mid a \in A\} \cup \{\langle n, n\rangle \mid n \in \mathbb{N}\}$. Relacja $F(A)$ jest dobrym ufundowaniem zbioru $\mathbb{N}$ (łańcuchy są co najwyżej dwuelementowe). Ponadto jeśli $A \neq B$, np. jeśli $a \in A - B$, to $\langle a, 0\rangle \in F(A) - F(B)$, więc funkcja faktycznie jest różnowartościowa. Z nierówności $\overline{\overline{Z}} \leq \mathfrak{C}$ i $\mathfrak{C} \leq \overline{\overline{Z}}$ i z twierdzenia Cantora-Bernsteina wynika równość.

544a: Tak. Jest to zbiór elementów minimalnych w A, który oczywiście jest antyłańcuchem. Pozostaje pokazać, że jest on też podstawą. Element $x \in A$ nazwiemy *brzydkim*, gdy nie istnieje element minimalny mniejszy lub równy x. Element brzydki x sam nie może być minimalny, więc istnieje mniejszy od niego $x' \in A$; co więcej każde $x' < x$ musi być brzydkie. A zatem jeśli istnieje jeden brzydki element, to istnieje nieskończony ciąg malejący brzydkich elementów, skąd A nie może być dobrze ufundowane.

544b: Nie, na przykład przedział domknięty $[0, 1]$ ma minimalną bazę $\{0\}$.

545: Przypuśćmy przeciwnie i niech $\langle B, C\rangle$ będzie maksymalnym dwułańcuchem, jak w zadaniu 528. Można zakładać, że zbiory B, C są niepuste, bo istnieją elementy nieporównywalne. Wtedy zbiory $B{\downarrow} = \{a \in A \mid \exists b \in B.\, a \leq b\}$ i $C{\downarrow} = \{a \in A \mid \exists c \in C.\, a \leq c\}$ są oczywiście odcinkami początkowymi w zbiorze A. Pokażemy, że są to odcinki właściwe, ściślej, że $B{\downarrow} \cap C = \varnothing = C{\downarrow} \cap B$, a zbiory B i C są niepuste. Gdybyśmy bowiem mieli element $c \in B{\downarrow} \cap C$, to wtedy $c \leq b$, dla pewnego $b \in B$, a przecież elementy zbiorów B i C muszą być nieporównywalne.

Z założenia o zbiorze A wynika, że $B{\downarrow} = \mathcal{O}(x)$ oraz $C{\downarrow} = \mathcal{O}(y)$, dla pewnych $x, y \in A$. Niech $B_1 = B \cup \{x\}$; zmierzamy do sprzeczności poprzez wykazanie, że $\langle B_1, C\rangle$ jest dwułańcuchem.

Nieporównywalność: jeśli $x \leq c \in C$, to c byłoby porównywalne z elementami łańcucha B. A jeśli $x > c \in C$, to $x \in \mathcal{O}(x) = B$. Porównywalność: skoro $B = \mathcal{O}(x)$, to oczywiście x jest porównywalne z elementami B, czyli B_1 jest łańcuchem. No to mamy dwa rozłączne łańcuchy, których elementy są nieporównywalne, czyli dwułańcuch. A ten dwułańcuch jest istotnym rozszerzeniem dwułańcucha maksymalnego.

548: Wskazówka: rozwiązać zadanie 543.

553: Załóżmy, że dla dowolnych $i < j$ zachodzi $a_i \not\leq a_j$. Oznacza to, że albo $a_i > a_j$ albo a_i, a_j są nieporównywalne. Wtedy istnieje taki wyraz ciągu a_{n_0}, który jest nieporównywalny ze wszystkimi a_m dla $m > n$. Istotnie, w przeciwnym razie mielibyśmy ciąg malejący $a_{k_0} > a_{k_1} > a_{k_2} \ldots$. Stosując to samo rozumowanie do ciągu $(a_m)_{m>n_0}$ otrzymamy wyraz a_m, nieporównywalny z a_n i ze wszystkimi dalszymi wyrazami. W ten sposób skonstruujemy nieskończony antyłańcuch.

554: Powiemy, że element a_i w ciągu jest *końcowy*, gdy $\forall j(j > i \Rightarrow a_j \not\geq a_i)$. Jeśli takich elementów jest nieskończenie wiele, to one tworzą nieskończony ciąg b_i, w którym $i < j$ implikuje $b_i \not\leq b_j$, a więc nie spełniający warunku bardzo dobrego ufundowania. Jest więc ostatni element końcowy a_n. Poczynając od a_{n+1} można teraz zbudować nieskończony ciąg wstępujący.

556: Częściowy porządek $\preceq_k$ jest dobrze ufundowany dla wszystkich $k \in \mathbb{N}$. Przypuśćmy przeciwnie, że dla pewnego k istnieje nieskończony łańcuch malejący

$$f_0 \succ_k f_1 \succ_k f_2 \succ_k \ldots$$

Wówczas $f_0(k) > f_1(k) > f_2(k) > \ldots$ jest nieskończonym łańcuchem malejącym w $\mathbb{N}$. Sprzeczność.

557: Nie. Wystarczy zdefiniować następujący ciąg funkcji

$$f_k(n) = \max(0, n - k).$$

Łatwo widzieć, że dla każdego k zachodzi $f_k \succ_{k+1} f_{k+1}$, gdyż dla $i = 0 \ldots k$ zachodzą równości $f_k(i) = 0 = f_{k+1}(i)$, a dla $i \geq k+1$ mamy $f_k(i) = i - k > i - (k+1) = f_{k+1}(i)$. A zatem funkcje te tworzą nieskończony ciąg malejący $f_0 \succ f_1 \succ f_2 \succ \ldots$

559: Przypuśćmy, że ciąg $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest malejący ze względu na porządek $\leq = (\leq_1 \cup \leq_2)$. Rozpatrzmy zbiór $F = \{n \mid \forall m(m > n \to a_m \not<_1 a_n)\}$, tj. zbiór wszystkich elementów „końcowych ze względu na relację $\leq_1$” Jeśli F jest nieskończony, to jego elementy tworzą ciąg malejący ze względu na $\leq_2$. (Dlaczego?) W przeciwnym razie skonstruujemy przez indukcję ciąg malejący a_{n_j} ze względu na $\leq_1$. Na początek niech n_0 będzie dowolną liczbą większą od wszystkich elementów zbioru F. Przypuśćmy, że mamy już takie $n_0 < n_1 < \ldots < n_j$, że $a_{n_j} <_1 \ldots <_1 a_{n_1} <_1 a_{n_0}$. Oczywiście $n_j \notin F$, więc istnieje takie $k > n_j$, że $a_k <_1 a_{n_j}$. Można więc przyjąć $n_{j+1} = k$.

560a: Relacja $\leq_1$ jest częściowym porządkiem, ponieważ jest zwrotna, antysymetryczna i przechodnia. Te trzy własności udowodnimy korzystając wyłącznie z tego, że relacja $\leq$ jest liniowym porządkiem w zbiorze liczb naturalnych (*). Zwrotność wynika wprost z definicji.

Antysymetria: niech $X \leq_1 Y$ i $Y \leq_1 X$. Jeśli $X \neq Y$, to wtedy $\max(X \dot{-} Y) \in X$ i jednocześnie $\max(X \dot{-} Y) \in Y$, a te dwa warunki się wykluczają.

Przechodniość:[25] niech $X \leq_1 Y$ i $Y \leq_1 Z$. Jeśli $X = Y$ lub $Y = Z$, to oczywiście $X \leq_1 Z$. Niech więc $a = \max(X \dot{-} Y) \in Y$ i $b = \max(Y \dot{-} Z) \in Z$. Pokażemy, że $\max\{a, b\} \in Z - X$. Stąd od razu wyniknie, że $\max(X \dot{-} Z) = \max\{a, b\} \in Z$, a więc $X <_1 Z$, bo zbiory X, Y i Z mają takie same elementy „powyżej” a i b, (tj. jeśli $n > a, b$, to n należy do obu tych zbiorów lub nie należy do żadnego).

Przypuśćmy najpierw, że $a \geq b$. Wtedy $a \in Z$, bo inaczej $a \in Y \dot{-} Z$, skąd $a \leq b$. Wtedy jednak $a = b \in Z$. Wiemy też, że $a \notin X$. Niech teraz $a < b$. Wtedy $b \notin X$, inaczej bowiem $b \in X \dot{-} Y$ i $b > \max(X \dot{-} Y)$. Wiadomo, że $b \in Z$, więc $b \in Z - X$.

Teraz pokażemy, że relacja $\leq_1$ jest też dobrze ufundowana. Zauważmy najpierw, że jeśli $X <_1 Y$, to albo $X = \varnothing$, albo $\max X \leq \max Y$. Istotnie, mamy albo $\max Y \in Y - X$ albo $\max Y \in X \cap Y$. W pierwszym przypadku $\max X < \max(X \dot{-} Y) = \max Y$, w drugim $\max(X \dot{-} Y) < \max X = \max Y$. Zatem dla dowolnego skończonego $Y \subseteq \mathbb{N}$ każdy zbiór $X <_1 Y$ to podzbiór zbioru $\{0, \ldots, \max Y\}$.

[25] **Uwaga:** Nie zawsze $\max(X \dot{-} Z) = \max\{\max(X \dot{-} Y), \max(Y \dot{-} Z)\}$. Dlaczego?

Ponieważ istnieje tylko skończenie wiele takich podzbiorów, nie może istnieć nieskończony łańcuch malejący zaczynający się w Y. Ponieważ zbiór Y jest dowolny, relacja $\leq_1$ jest dobrze ufundowana.

560b: Relacja $\geq$ jest liniowym uporządkowaniem zbioru $\mathbb{N}$, a relacja $\geq_2$ jest otrzymana z porządku $\geq$ tak samo, jak $\leq_1$ otrzymano z porządku $\leq$. Zatem $\geq_2$ też jest częściowym porządkiem, (zob. (*) wyżej) i to samo dotyczy relacji odwrotnej $\leq_2$.

Relacja $\leq_2$ nie jest dobrze ufundowana. Niech X_i oznacza zbiór $\{0,\dots,i\}$. Wówczas dla każdego i mamy $X_{i+1} <_2 X_i$, ponieważ $X_{i+1} \dot{-} X_i = \{i+1\}$, a więc $\min(X_{i+1} \dot{-} X_i) \in X_{i+1}$. Zatem zbiory $X_0,\dots,X_i,\dots$ tworzą nieskończony ciąg malejący ze względu na relację $\leq_2$.

561a: Inkluzja $\uparrow\mathrm{Min}(A) \subseteq A$ wynika wprost z definicji. Pozostaje udowodnić, że $A \subseteq \uparrow\mathrm{Min}(A)$. Niech $x \in A$; udowodnimy, że $x \in \uparrow\mathrm{Min}(A)$, tj. że istnieje taki element $y \in \mathrm{Min}(A)$, że $x \geq y$. Niech $B_x = \{z \in A \mid x \geq z\}$. Zbiór B jest niepusty, bo $x \in B$ i ma element minimalny y, bo $\leq$ jest dobrym ufundowaniem. Oczywiście $x \geq y$, pozostaje więc stwierdzić, że y jest minimalny w zbiorze A. Przypuśćmy więc, że $a \in A$ i $a \leq y$. Wtedy także $a \leq x$, więc $a \in B_x$. Ponieważ y jest minimalny w B_x oraz $a \leq y$, więc $a = y$. Zatem znaleźliśmy taki $y \in \mathrm{Min}(A)$, że $x \geq y$, a więc $x \in \uparrow\mathrm{Min}(A)$.

561b: Nie. Przyjmijmy $X = \mathbb{N}$ i niech $\leq$ będzie zwykłym porządkiem. Zbiory $A_n = \{m \in \mathbb{N} \mid m \geq n\}$ należą do $\mathsf{P}^{\uparrow}(\mathbb{N})$ i tworzą ciąg malejący.

561c: Też nie, np. dla $X = \mathbb{N}$ i trywialnego porządku $\leq = \mathbf{1}_{\mathbb{N}}$.

562a, 562b: Nie. Na przykład w dobrze ufundowanym zbiorze $\{a,b,c,d\}$, uporządkowanym jak na rysunku, podzbiór $\{c,d\}$ ma dwa ograniczenia górne, ale nie ma kresu górnego. Natomiast podzbiór $\{a,b\}$ ma dwa ograniczenia dolne, ale nie ma kresu dolnego.

$$\begin{array}{ccc} a & & b \\ \uparrow & \nwarrow \; \nearrow & \uparrow \\ c & & d \end{array}$$

562c: W przypadku dobrych porządków odpowiedzi na oba pytania są pozytywne. Każdy niepusty podzbiór dobrego porządku ma element najmniejszy, który oczywiście jest jego kresem dolnym.

Jeśli zaś podzbiór B dobrego porządku A jest ograniczony z góry, to zbiór jego ograniczeń górnych jest niepusty i ma element najmniejszy, czyli kres górny zbioru B.

563a: Pokażemy, że dla zbiorów zamkniętych w górę warunek $B \preceq C$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $C \subseteq B$. Istotnie, załóżmy, że $B \preceq C$ i niech $c \in C$. Jest takie $b \in B$, że $b \leq c$, a ponieważ B jest zamknięty w górę, więc $c \in B$. Na odwrót, jeśli $C \subseteq B$ oraz $c \in C$ to także $c \in B$ i mamy $c \leq c$. Stąd $B \preceq C$. A więc relacja $\preceq$ to nic innego niż odwrócona inkluzja, tyle że ograniczona do zbiorów zamkniętych w górę. A skoro inkluzja jest częściowym porządkiem, to i $\preceq$ jest.

563b: Nie. Na przykład zbiór $A = \mathbb{N}$ jest dobrze ufundowany przez relację identycznościową, ale ciąg zbiorów $\overline{n} = \{m \in \mathbb{N} \mid m < n\}$, dla $n \neq 0$, tworzy malejący łańcuch: $\overline{1} \succ \overline{2} \succ \overline{3} \succ \cdots$

563c: Tak. Zauważmy, że jeśli zbiór A jest liniowo uporządkowany, oraz $B \preceq C$, to każdy element różnicy $B - C$ jest ostro mniejszy od wszystkich elementów zbioru C. Istotnie, niech $x \in B - C$ oraz $y \in C$. Gdyby $y \leq x$, to $x \in C$, sprzeczność. Jeśli więc istnieje ostro malejący łańcuch $B_0 \succ B_1 \succ B_2 \succ \cdots$ ze względu na $\preceq$, to istnieje malejący łańcuch $b_0 > b_1 > b_2 > \cdots$ w zbiorze A. Definiujemy go tak: bierzemy jakikolwiek element zbioru B_0 jako b_0, a dalej wybieramy jakieś $b_{n+1} \in B_{n+1} - B_n$.

564a: Nie, na przykład $F(\mathbf{1}_{\mathbb{N}}) = F(\leq) = \leq$.

564b: Nie, na przykład jednoelementowa relacja $\{\langle 0,1\rangle\}$ nie jest postaci $F(r)$. Jeśli bowiem $\langle 0,1\rangle \in F(r)$, to $0 \, r \, x \leq 1$ dla pewnego $x \in \mathbb{N}$. Ale skoro $x \leq 1$, to także $x \leq 2$, więc do relacji $F(r)$ musi należeć para $\langle 0,2\rangle$.

564c: Zbiór $F^{-1}(\{\leq\}) = \{r \mid r \cdot \leq \, = \, \leq\}$ jest mocy $\mathfrak{C}$. Jest podzbiorem $\mathsf{P}(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$, więc ma moc co najwyżej $\mathfrak{C}$. Dla oszacowania z dołu rozpatrzmy zbiór $D = \{r \mid \mathbf{1}_{\mathbb{N}} \subseteq r \subseteq \leq\}$. Zbiór D jest zawarty w $F^{-1}(\{\leq\})$, bo jeśli $r \in D$, to $\leq\ = \underline{(\mathbf{1}_{\mathbb{N}} \cdot \leq)} \subseteq (r \cdot \leq) \subseteq (\leq \cdot \leq) = \leq$, więc $F(r) = (r \cdot \leq) = \leq$. Ponieważ $D = \{\mathbf{1}_{\mathbb{N}} \cup s \mid s \subseteq <\}$, więc $\overline{\overline{D}} \geq \overline{\overline{\mathsf{P}(<)}} = \mathfrak{C}$, a zatem $F^{-1}(\{\leq\})$ też jest mocy co najmniej $\mathfrak{C}$.

564d: ($\Rightarrow$) Załóżmy, że $F(r) = r$ i rozpatrzmy dowolny zbiór $A \subseteq \mathbb{N}$. Aby pokazać, że $r(A)$ jest zamknięty w górę, przypuśćmy, że $x \in r(A)$ oraz $x \leq y$. Wtedy $u\,r\,x$ dla pewnego $u \in A$, skąd $\langle u, y\rangle \in r \cdot \leq\ = F(r) = r$. A zatem $y \in r(A)$.
($\Leftarrow$) Zakładamy, że wszystkie zbiory postaci $r(A)$ są zamknięte w górę, dowodzimy, że $r = F(r)$ czyli $r = r \cdot \leq$. Oczywiście $r \subseteq r \cdot \mathbf{1}_{\mathbb{N}} \subseteq r \cdot \leq$. Niech więc $\langle x, y\rangle \in r \cdot \leq$. Jest takie u, że $x\,r\,u \leq y$. Wtedy $u \in r(\{x\})$ a skoro zbiór $r(\{x\})$ jest zamknięty w górę, to także $y \in r(\{x\})$, skąd $x\,r\,y$ i dobrze.

565a: Nie, na przykład $F(\leq) = \leq\ = F(r)$, gdzie $r = \leq - \{\langle 1, 3\rangle\}$. Istotnie, $r^+ \subseteq \leq$, bo $r \subseteq \leq$. Z drugiej strony $\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle \in r$ więc $\langle 1, 3\rangle \in r^+$, a to wystarczy, żeby $\leq\ \subseteq r^+$.

565b: Tak, bo jeśli relacja s jest przechodnia, to $F(s) = s^+ = s$.

565c: Ponieważ wszystkie relacje równoważności są przechodnie, to $F(s) = s^+ = s$ dla $s \in \mathcal{R}$. A zatem $F(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$ i zbiór ten ma moc continuum.

565d: Zbiór X jest mocy continuum. Oszacowanie z góry wynika stąd, że jest on zawarty w zbiorze $\mathsf{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$, który ma moc continuum. Pozostaje wykazać, że $\overline{\overline{X}} \geq \mathfrak{C}$. W tym celu rozpatrzmy relację $r_0 = (\mathbb{N} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathbb{N})$ i zauważmy, że $r_0^+ = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Jeśli bowiem $m, n \in \mathbb{N}$, to $\langle m, 0\rangle, \langle 0, n\rangle \in r_0$, skąd $\langle m, n\rangle \in r_0^+$. To znaczy, że $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \subseteq r_0^+$, a inkluzja w przeciwną stronę jest oczywista.

Dalej zauważmy, że jeśli $r_0 \subseteq s \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, to także $s^+ = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ (czyli $s \in X$). W rzeczy samej, relacja s^+ zawiera r_0 i jest przechodnia, mamy więc $r_0^+ \subseteq s^+$. Teraz możemy zdefiniować np. funkcję $H : \mathsf{P}(\mathbb{N} - \{0\}) \xrightarrow{1-1} X$, przyjmując $H(A) = r_0 \cup (A \times A)$. Ta funkcja jest dobrze określona, bo $r_0 \subseteq H(A)$, więc $H(A)^+ \in X$, dla każdego A. Ponadto H jest różnowartościowa: jeśli $A, B \subseteq \mathbb{N} - \{0\}$ i np. $a \in A - B$, to $\langle a, a\rangle \in H(A) - H(B)$, bo $a \neq 0$.

566a: Funkcja Φ nie jest różnowartościowa, np. $\Phi(\lambda n.n) = \mathbb{N} = \Phi(\lambda n.0)$.

566b: Funkcja Φ jest surjekcją. Dla $A \in \mathsf{P}(\mathbb{N})$ zdefiniujemy $f_A(n) = \text{if } n \in A \text{ then } n \text{ else } n + 1$. Zauważmy, że dla każdego $n > 0$ zachodzi $f_A(\{0 \ldots n-1\}) \subseteq \{0 \ldots n\}$. Jeśli $n \in A$, to ponadto $f_A(n) = n \in \{0 \ldots n\}$, a zatem $f_A(\{0 \ldots n\}) \subseteq \{0 \ldots n\}$. W przeciwnym przypadku mamy $f_A(n) = n + 1 \notin \{0 \ldots n\}$, a zatem $f_A(\{0 \ldots n\}) \not\subseteq \{0 \ldots n\}$. Czyli $\Phi(f_A) = A$.

566c: Zbiór $\Phi^{-1}(\{\mathbb{N}\})$ ma moc $\mathfrak{C}$. Ograniczenie z góry wynika z faktu, że zbiór wszystkich funkcji z $\mathbb{N}$ w $\mathbb{N}$ ma moc $\mathfrak{C}$. Aby pokazać, że $\mathfrak{C}$ ogranicza moc zbioru $\Phi^{-1}(\{\mathbb{N}\})$ również z dołu, zdefiniujmy injekcję $F : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \xrightarrow{1-1} \Phi^{-1}(\{\mathbb{N}\})$ daną wzorem $F(b) = \lambda n.\text{if } n = 0 \text{ then } 0 \text{ else } b(n - 1)$. Funkcja F jest dobrze określona, tj. dla każdego ciągu b mamy $\Phi(F(b)) = \mathbb{N}$. Istotnie, $F(b)(0) = 0$, dla dowolnego ciągu b, a dla $n > 0$ zachodzi $F(b)(n) \leq 1$, a więc zawsze $F(b)(\{0 \ldots n\}) \subseteq \{0 \ldots n\}$. Funkcja jest różnowartościowa, bo jeśli $b(i) \neq b'(i)$ dla pewnego $i \in \mathbb{N}$, to $F(b)(i + 1) \neq F(b')(i + 1)$. A zatem, z twierdzenia Cantora-Bernsteina, zbiór $\Phi^{-1}(\{\mathbb{N}\})$ ma moc $\mathfrak{C}$.

566d: Niech $c_k = \lambda n.k$, dla $k \in \mathbb{N}$. Zatem $\Phi(\mathsf{St}) = \{\Phi(c_k) \mid k \in \mathbb{N}\}$, gdzie:
$$\Phi(c_k) = \{n \in \mathbb{N} \mid c_k(\{0 \ldots n\}) \subseteq \{0 \ldots n\}\} = \{n \in \mathbb{N} \mid k \in \{0 \ldots n\}\} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq k\}.$$
Wszystkie zbiory $\Phi(c_k)$ są różne, a więc $\Phi(\mathsf{St})$ ma moc $\aleph_0$.

567a: Funkcja F nie jest różnowartościowa. Na przykład $F(\mathrm{id}_{\mathbb{N}}) = 0 = F(\lambda n\, 0)$. Ale jest na $\mathbb{N}$, bo jeśli $k \in \mathbb{N}$, to na przykład $F(\lambda n\, k) = k$.

567b: Obraz zbioru Sur to
$$F(\mathsf{Sur}) = \{F(f) \mid f \in \mathsf{Sur}\} = \{\min(\mathrm{Rg}(f)) \mid f \in \mathsf{Sur}\} = \{\min \mathbb{N} \mid f \in \mathsf{Sur}\} = \{\min \mathbb{N}\} = \{0\}.$$
Natomiast $F(\mathsf{Okr}) = \mathbb{N}$, bo dla każdego $k \in \mathbb{N}$ istnieje taka funkcja okresowa f, że $\min(\mathrm{Rg}(f)) = k$, na przykład $f = \lambda n.\, k + (n \bmod 3)$.

567c: Przeciwobraz zbioru liczb pierwszych, to zbiór wszystkich tych funkcji, których najmniejszą wartością jest liczba pierwsza: $F^{-1}(\text{Pierwsze}) = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid \min(\mathrm{Rg}(F)) \in \text{Pierwsze}\}$.
Oczywiście $\overline{\overline{F^{-1}(\text{Pierwsze})}} \leq \mathfrak{C}$, bo cały zbiór $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jest mocy $\mathfrak{C}$. Ale także $\mathfrak{C} \leq \overline{\overline{F^{-1}(\text{Pierwsze})}}$, bo można określić injekcję $\zeta : \mathsf{P}(\mathbb{N}) \xrightarrow{1-1} F^{-1}(\text{Pierwsze})$ na przykład tak:
$$\zeta(A) = \lambda n.\, \text{if } n = 0 \text{ then } 3 \text{ else if } n - 1 \in A \text{ then } 4 \text{ else } 5$$

Oczywiście $\zeta(A) \in F^{-1}(\text{Pierwsze})$, bo $\min(\mathrm{Rg}(\zeta(A))) = 3$, więc funkcja ζ jest dobrze określona. No i jest też różnowartościowa, bo dla $n \in A \dot{-} B$ zachodzi $\zeta(A)(n+1) \neq \zeta(B)(n+1)$.

568a: Obraz zbioru wszystkich funkcji różnowartościowych $F(\mathsf{Inj})$ to $\mathbb{N}$. Inkluzja $F(\mathsf{Inj}) \subseteq \mathbb{N}$ wynika wprost z definicji, a inkluzja odwrotna $\mathbb{N} \subseteq F(\mathsf{Inj})$ wynika z tego, że dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$ mamy $k = F(\lambda n.\, n + k)$. Każda funkcja postaci $\lambda n.\, n + k$ jest bowiem oczywiście różnowartościowa.

568b: Jeśli $Y = \varnothing$, to $F^{-1}(Y) = \varnothing$. Pokażemy, że w przeciwnym przypadku $\overline{\overline{F^{-1}(Y)}} = \mathfrak{C}$. Oczywiście $\overline{\overline{F^{-1}(Y)}} \leq \mathfrak{C}$, bo cały zbiór $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jest mocy $\mathfrak{C}$. Aby udowodnić nierówność $\overline{\overline{F^{-1}(Y)}} \geq \mathfrak{C}$, ustalmy $m \in Y$ i skonstruujmy injekcję $\zeta : \mathsf{P}(\mathbb{N}) \xrightarrow{1-1} F^{-1}(Y)$, na przykład tak:

$$\zeta(A) = \lambda n.\, \mathsf{if}\ n = 0\ \mathsf{then}\ m\ \mathsf{else\ if}\ n - 1 \in A\ \mathsf{then}\ m + 1\ \mathsf{else}\ m + 2$$

Oczywiście $\zeta(A) \in F^{-1}(Y)$, bo $\min(\mathrm{Rg}(\zeta(b))) = m$, więc funkcja ζ jest dobrze określona. No i jest też różnowartościowa, bo jeśli $n \in A \dot{-} B$, to $\zeta(A)(n+1) \neq \zeta(B)(n+1)$. A zatem możliwe moce przeciwobrazów podzbiorów $\mathbb{N}$, to 0 i $\mathfrak{C}$.

569a: Bo to jądro operacji $\lambda f\!:\!\mathbb{N}\!\to\!\mathbb{N}.\, f^{-1}(\text{Pierwsze})$.

569b: Zbiór ilorazowy jest mocy $\mathfrak{C}$, bo jest równoliczny ze zbiorem $\mathsf{P}(\mathbb{N})$ (czyli zbiorem wartości operacji z części 569a). Istotnie, $\lambda A\, [\lambda n.\, 4 + \chi_A(n)]_\approx : \mathsf{P}(\mathbb{N}) \xrightarrow[\text{na}]{1-1} (\mathbb{N} \to \mathbb{N})/_\approx$, gdzie χ_A oznacza funkcję charakterystyczną zbioru A.

569c: Wszystkie klasy abstrakcji są mocy $\mathfrak{C}$. Rozpatrzmy bowiem dowolną taką klasę $[f]_\approx$ i niech $A = f^{-1}(\text{Pierwsze})$ i $B = \mathbb{N} - A$. Jeden ze zbiorów A i B musi być nieskończony, mocy $\aleph_0$, a zatem jeden ze zbiorów $A \to \text{Pierwsze}$ i $B \to \text{Niepierwsze}$ jest tej samej mocy co zbiór $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, czyli mocy $\mathfrak{C}$. Do tego mamy surjekcje $\alpha : [f]_\approx \xrightarrow{\text{na}} (A \to \text{Pierwsze})$ i $\beta : [f]_\approx \xrightarrow{\text{na}} (B \to \text{Niepierwsze})$, gdzie $\alpha(h) = h{\restriction}_A$ i $\beta(h) = h{\restriction}_B$, dla $h \in [f]_\approx$. Stąd wynika, że w każdym przypadku klasa $[f]_\approx$ jest co najmniej mocy continuum. Nierówność w przeciwną stronę jest oczywista, bo klasa $[f]_\approx$ jest zawarta w zbiorze $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

570a: Tak, bo to jądro przekształcenia $\Psi : (\mathbb{N} \to \mathbb{N}) \to (\text{Pierwsze} \to \mathsf{P}(\mathbb{N}))$, określonego tak:

$$\Psi(f) = \lambda p\!:\!\text{Pierwsze}.\, f^{-1}(\{p\}).$$

570b: Zbiór ten jest mocy $\mathfrak{C}$. Po pierwsze, przekształcenie kanoniczne $\kappa : (\mathbb{N} \to \mathbb{N}) \xrightarrow{\text{na}} (\mathbb{N} \to \mathbb{N})/_\approx$ jest surjekcją, więc moc ilorazu jest ograniczona z góry przez $\overline{\overline{\mathbb{N} \to \mathbb{N}}} = \mathfrak{C}$. Po drugie, istnieje injekcja $\Phi : \mathsf{P}(\mathbb{N}) \xrightarrow{1-1} (\mathbb{N} \to \mathbb{N})/_\approx$. Dla $A \subseteq \mathbb{N}$ niech $\Phi(A) = [\varphi_A]_\approx$, gdzie funkcja φ_A jest określona tak: $\varphi_A = \lambda n.\, \mathsf{if}\ n \in A\ \mathsf{then}\ 2\ \mathsf{else}\ 6$. Wtedy $A \neq B$ implikuje $\varphi_A \not\approx \varphi_B$, bo $\varphi_A^{-1}(\{2\}) \neq \varphi_B^{-1}(\{2\})$. A zatem funkcja Φ jest różnowartościowa, skąd moc ilorazu jest co najmniej $\mathfrak{C}$ i z twierdzenia Cantora-Bernsteina wynika, że jest równa $\mathfrak{C}$.

570c: Zauważmy, że jeśli $f(n)$ jest liczbą pierwszą p, oraz $g \approx f$, to $n \in f^{-1}(\{p\}) = g^{-1}(\{p\})$, skąd $f(n) = g(n)$. A zatem moc zbioru $[f]_\approx$ zależy od mocy zbioru $Z = f^{-1}(\text{Niepierwsze})$. Jeśli bowiem zdefiniujemy $\Xi(g) = g{\restriction}_Z$, dla $g \in [f]_\approx$, to $\Xi : [f]_\approx \xrightarrow[\text{na}]{1-1} (Z \to \text{Niepierwsze})$. Funkcja Ξ jest różnowartościowa, bo jeśli $g, h \in [f]_\approx$ są różne, to muszą się różnić na jakimś argumencie należącym do zbioru Z. A jest to także funkcja „na", bo każde $\alpha \in Z \to \text{Niepierwsze}$ jest postaci $\Xi(g_\alpha)$, gdzie $g_\alpha = \lambda n\, \mathsf{if}\ n \in Z\ \mathsf{then}\ \alpha(n)\ \mathsf{else}\ f(n)$.

Zbiór $Z \to \text{Niepierwsze}$ ma jeden element gdy $Z = \varnothing$, jest mocy $\aleph_0$, gdy Z jest skończony, i mocy $\mathfrak{C}$, gdy Z jest nieskończony. A więc poszukiwane liczby to 1, $\aleph_0$ i $\mathfrak{C}$.

571a: Zbiór ilorazowy $\mathsf{P}(\mathsf{P}(\mathbb{N}))/_\approx$ jest mocy $\mathfrak{C}$, bo funkcja $F = \lambda X.\, [\{X\}]_\approx : \mathsf{P}(\mathbb{N}) \xrightarrow[\text{na}]{1-1} \mathsf{P}(\mathsf{P}(\mathbb{N}))/_\approx$ jest bijekcją. Po pierwsze, jeśli $\bigcup \mathcal{R} = X$, to $\mathcal{R} \approx \{X\}$, więc każda klasa $[\mathcal{R}]_\approx$ jest postaci $F(\bigcup \mathcal{R})$. Po drugie, jeśli $X \neq Y$, to $\bigcup\{X\} = X \neq Y = \bigcup\{Y\}$, skąd $F(X) = [\{X\}]_\approx \neq [\{Y\}]_\approx = F(Y)$.

571b: Do tej klasy należą wszystkie rodziny o sumie $\{0\}$. Ma ona 2 elementy: $\{\{0\}\}$ i $\{\{0\}, \varnothing\}$.

571c: Nie. Jeśli $\bigcup \mathcal{R} = \varnothing$, to $[\mathcal{R}]_\approx = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$. Jeśli $\bigcup \mathcal{R} = X \neq \varnothing$, to klasa $[\mathcal{R}]_\approx$ ma co najmniej dwa elementy: $\{X\}$ i $\{\varnothing, X\}$.

571d: Nie. Niech $\mathcal{R} \subseteq \mathsf{P}(\mathbb{N})$ będzie rodziną zbiorów, której suma $\bigcup \mathcal{R} = X$ jest zbiorem nieskończonym. Pokażemy, że wtedy klasa abstrakcji $[\mathcal{R}]_\approx$ jest nieprzeliczalna. W tym celu zdefiniujemy injekcję $F : \mathsf{P}(X) \xrightarrow{1-1} [\mathcal{R}]_\approx$, przyjmując $F(Y) = \{X, Y\}$ dla dowolnego $Y \subseteq X$.[26] Aby sprawdzić, że to faktycznie funkcja różnowartościowa, przypuśćmy, że $Y_1 \neq Y_2$, na przykład $Y_1 - Y_2 \neq \varnothing$. Wtedy także $Y_2 \neq X$, więc $Y_2 \notin F(Y_1) = \{X, Y_1\}$. Stąd $F(Y_1) \neq F(Y_2)$.

Przypuśćmy, że suma $\bigcup \mathcal{R} = X$ jest skończona. Każda rodzina $\mathcal{S}$, taka że $\mathcal{S} \approx \mathcal{R}$, składa się z podzbiorów zbioru X. Jest tylko skończenie wiele takich rodzin, więc klasa $[\mathcal{R}]_\approx$ jest skończona.

572a: Elementem największym (a więc jedynym elementem maksymalnym) jest zero, bo dzielnikiem zera przy naszej definicji jest każda liczba pierwsza (a liczby różne od zera mają tylko skończenie wiele dzielników). Elementem najmniejszym (a więc jedynym elementem minimalnym) jest jeden, bo to jedyna liczba, która nie ma żadnych dzielników pierwszych.

572b: Zbiór D ma dwa elementy: $D = \{0, 1\}$. Zero jest elementem zbioru D, bo jest kresem dolnym zbioru pustego. Jedynka jest kresem dolnym zbioru wszystkich liczb pierwszych, bo jest jedynym jego ograniczeniem dolnym. Jeśli bowiem $\Pi(r) \subsetneq \Pi(p)$ dla wszystkich $p \in \text{Pierwsze}$, to $\Pi(r) = \varnothing$, a tylko liczba 1 ma tę własność. Sprawdźmy, czy istnieją inne elementy zbioru D. Niech $k = \inf A$, ale $k \notin A$. (To oznacza, że A nie ma najmniejszego elementu.) Ponieważ $\Pi(k^2) = \Pi(k)$, więc liczba k^2 też jest ograniczeniem dolnym zbioru A. Stąd $k^2 \preceq k$, co jest prawdą tylko dla $k = 1$ (w przeciwnym razie liczby k^2 i k są nieporównywalne w porządku $\preceq$).

572c: Tak. Jeśli $a_0 \succ a_1 \succ a_2 \succ \cdots$ jest ciągiem malejącym, to $\Pi(a_0) \supsetneq \Pi(a_1) \supsetneq \Pi(a_2) \supsetneq \cdots$ jest malejącym ciągiem zbiorów, w którym prawie wszystkie wyrazy (z co najwyżej jednym wyjątkiem) są zbiorami skończonymi.

572d: Zbiór $\mathcal{A}$ wszystkich nieskończonych antyłańcuchów jest oczywiście co najwyżej mocy continuum, bo to przecież podzbiór $\mathsf{P}(\mathbb{N})$. Aby pokazać, że $\mathcal{A}$ jest mocy co najmniej continuum, wystarczy wskazać... jeden antyłańcuch nieskończony, bo każdy jego nieskończony podzbiór też należy do $\mathcal{A}$, a takich podzbiorów jest continuum (tyle samo, co nieskończonych podzbiorów $\mathbb{N}$). Jako przykład wybierzmy zbiór $\{2^k \mid k \in \mathbb{N} - \{0\}\}$. Ponieważ $\Pi(2^k) = \{2\}$, dla wszystkich $k \neq 0$, więc liczby 2^k są nieporównywalne ze względu na porządek $\preceq$.

573a: Dwa, bo $M = \{\aleph_0, \mathfrak{C}\}$. Jeśli A jest zbiorem skończonym, to $\mathsf{P}_\sim(A) = \mathsf{P}_{\mathsf{fin}}(\mathbb{N})$ jest zbiorem wszystkich skończonych podzbiorów $\mathbb{N}$, który ma moc $\aleph_0$. Istotnie, jeśli $X \Subset A$, to $X \subseteq (X - A) \cup A$ jest zbiorem skończonym. I na odwrót, jeśli X jest skończony, to $X - A$ też jest skończony. A jeśli zbiór A jest nieskończony, to $\mathsf{P}_\sim(A)$ jest mocy continuum, bo oczywiście $\mathsf{P}(A) \subseteq \mathsf{P}_\sim(A) \subseteq \mathsf{P}(\mathbb{N})$.

573(b)i: Tak. Niech $X \in \mathsf{P}_\sim(\bigcap \mathcal{F})$. To znaczy, że zbiór $X - \bigcap \mathcal{F} = \bigcup\{X - A \mid A \in \mathcal{F}\}$ jest skończony. Ale każdy składnik skończonej sumy musi być skończony, więc $X \in \mathsf{P}_\sim(A)$, dla każdego $A \in \mathcal{F}$.

573(b)ii: Nie. Niech $\mathcal{F}_1 = \{\mathbb{N} - \{n\} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Wtedy $\mathbb{N} \Subset \mathbb{N} - \{n\}$, dla każdego n, ale $\mathbb{N} \not\Subset \bigcap \mathcal{F}_1 = \varnothing$.

574a: Bo jest to jądro operacji jądra, tj. $r = \ker(\lambda f.\, \ker f)$. Aby to udowodnić, pokażemy najpierw, że jeśli $f\, r\, g$, to $\ker f = \ker g$. Niech więc $\langle x, y\rangle \in \ker f$, tj. $f(x) = f(y)$. Wtedy:

$$g^{-1}(\{g(x)\}) = f^{-1}(\{f(x)\}) = f^{-1}(\{f(y)\}) = g^{-1}(\{g(y)\}).$$

Ponieważ $g(x) = g(x)$, więc $x \in g^{-1}(\{g(x)\}) = g^{-1}(\{g(y)\})$, ale to znaczy, że $g(x) \in \{g(y)\}$, czyli $g(x) = g(y)$. Zatem $\langle x, y\rangle \in \ker g$. Inkluzję $\ker g \subseteq \ker f$ otrzymamy podobnie.

Teraz załóżmy, że $\ker f = \ker g$ i sprawdźmy, że $f^{-1}(\{f(x)\}) = g^{-1}(\{g(x)\})$. Jeśli $a \in f^{-1}(\{f(x)\})$, to $f(a) \in \{f(x)\}$, czyli $f(a) = f(x)$, inaczej $\langle a, x\rangle \in \ker f = \ker g$. Stąd $g(a) = g(x)$ i wreszcie $a \in g^{-1}(\{g(x)\})$. Analogicznie sprawdzimy, że $g^{-1}(\{g(x)\}) \subseteq f^{-1}(\{f(x)\})$.

574b: Tak. Klasa $[\mathrm{id}_\mathbb{N}]_r$ składa się z tych funkcji g, których jądrem jest relacja identycznościowa. Są to dokładnie funkcje różnowartościowe.

574c: Są to liczby $\aleph_0$ i $\mathfrak{C}$. Pierwszy przypadek zachodzi wtedy, gdy relacja $\ker f$ ma skończenie wiele klas abstrakcji, powiedzmy $K_1, \ldots, K_m$. Wtedy elementami klasy $[f]_r$ są funkcje postaci

$$\lambda n.\, \mathsf{if}\ n \in K_1\ \mathsf{then}\ a_1\ \mathsf{else\ if}\ n \in K_2\ \mathsf{then}\ a_2\ \mathsf{else}\ \ldots \mathsf{if}\ n \in K_{m-1}\ \mathsf{then}\ a_{m-1}\ \mathsf{else}\ a_m$$

gdzie $a_1, \ldots, a_m$ są parami różne. Takich funkcji jest nieskończenie wiele, ale nie więcej niż wszystkich krotek ze zbioru $\mathbb{N}^m$, czyli jest ich $\aleph_0$.

Drugi przypadek zachodzi wtedy, gdy zbiór wartości funkcji f jest nieskończony. Relacja $\ker f$ dzieli wtedy zbiór $\mathbb{N}$ na nieskończenie wiele składowych K_i, gdzie $i \in \mathbb{N}$. Niech $\Phi : \mathsf{Inj} \xrightarrow{1-1} [f]_r$ będzie taka,

[26] Dla $Y = X$, rodzina $F(Y)$ będzie jednoelementowa, ale to nic nie szkodzi.

że $\Phi(\alpha)(n) = \alpha(i)$ dla $n \in K_i$. Jasne, że $\Phi(\alpha) \in [f]_r$ dla dowolnej injekcji α. Przy tym jeśli $\alpha \neq \beta$, na przykład $\alpha(j) \neq \beta(j)$, to $\Phi(\alpha)(n) \neq \Phi(\beta)(n)$ dla wszystkich elementów niepustego zbioru K_j, a więc Φ jest faktycznie operacją różnowartościową. Stąd klasa $[f]_r$ jest co najmniej mocy continuum, a że nierówność odwrotna jest oczywista, to mamy równość.

574d: Zbiór klas abstrakcji jądra operacji jest równoliczny ze zbiorem wartości tej operacji, w naszym przypadku ze zbiorem wszystkich możliwych jąder funkcji typu $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Wystarczy więc udowodnić, że każda relacja równoważności w $\mathbb{N}$ jest jądrem jakiejś funkcji typu $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ aby wywnioskować, że nasz zbiór ilorazowy jest mocy continuum. Niech więc s będzie relacją równoważności w $\mathbb{N}$ i niech $g = \lambda x.\, \min[x]_s$. Wtedy $s = \ker g$ i już.

575a: Nie. Jeśli $f_1 = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$, $f_2 = \lambda x.\, 0$, oraz $g = \lambda x.\, 1$, to $g \circ f_1 = g \circ f_2$, zatem $F(f_1, g) = F(f_2, g)$, chociaż $\langle f_1, g\rangle \neq \langle f_2, g\rangle$.

575b: Tak. Dla każdej funkcji $h \in \mathsf{Fun}$ zachodzi $F(\mathrm{id}_{\mathbb{N}}, h) = h$.

575c: Nie, ponieważ $\mathrm{id}_{\mathbb{N}} = g \circ f$, gdzie $f = \lambda x.\, 2x$ oraz $g = \lambda x.\, \mathsf{if}\ x$ parzyste $\mathsf{then}\ x/2\ \mathsf{else}\ 0$.

575d: Tak. Przypuśćmy, że $h : \mathbb{N} \xrightarrow[\text{na}]{1-1} \mathbb{N}$ oraz $h = g \circ f$, gdzie $g, f \in \mathsf{Fun}$. Jeśli g nie jest „na", to także h nie jest „na", a jeśli f nie jest różnowartościowa, to także h nie jest różnowartościowa.

575e: Nie, na przykład złożenie $g \circ f$ funkcji $f = \lambda x.\, 2x$ i $g = \lambda x.\, x \bmod 2$ jest stale równe zeru.

575f: Ponieważ zbiór Fun jest mocy $\mathfrak{C}$, więc zbiór $\mathsf{Retr} \subseteq \mathsf{Fun}$ jest co najwyżej tej mocy. Aby pokazać, że Retr jest co najmniej mocy $\mathfrak{C}$, określimy funkcję $\varphi : \mathsf{P}(\mathbb{N}) - \{\varnothing\} \xrightarrow{1-1} \mathsf{Retr}$. Dla $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{N}$ niech $\varphi(A) = \lambda x.\, \mathsf{if}\ x \in A\ \mathsf{then}\ x\ \mathsf{else}\ \min A$. Funkcja φ jest dobrze określona, ponieważ dla każdego $A \neq \varnothing$ i każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy $\varphi(A)(n) \in A$ więc $\varphi(A)(n)(\varphi(A)(n)) = \varphi(A)(n)$. Jeśli teraz $A \neq B$, na przykład mamy $a \in A - B$, to $\varphi(A)(a) = a \notin B$ oraz $\varphi(B)(a) \in B$, a więc $\varphi(A)(a) \neq \varphi(B)(a)$, skąd $\varphi(A) \neq \varphi(B)$. Funkcja φ istotnie jest więc różnowartościowa.

576a: Nie. Dla $g(x) = \mathsf{if}\ x = 0\ \mathsf{then}\ 1\ \mathsf{else}\ 2$, mamy $G(g) = \lambda x.2 = F(\lambda x.2)$.

576b: Tak. Zawieranie ($\supseteq$) wynika z tego, że złożenie bijekcji jest bijekcją. Z kolei zawieranie ($\subseteq$) wynika stąd, że aby $g \circ h$ było bijekcją, g musi być surjekcją, a h injekcją (zadanie 575d). Jeśli więc $f \circ f \in \mathsf{Bij}$, to f jest zarówno injekcją, jak i surjekcją, a zatem $f \in \mathsf{Bij}$.

576c: Nie. Funkcja g z rozwiązania 576a nie jest stała, a jednak $g \in G^{-1}(\mathsf{St})$.

576d: Zbiór Inw jest oczywiście mocy co najwyżej $\mathfrak{C}$, bo jest zawarty w zbiorze Fun. Aby udowodnić, że $\overline{\overline{\mathsf{Inw}}} \geq \mathfrak{C}$, określimy funkcję $g : \mathsf{P}(\mathbb{N}) \xrightarrow{1-1} \mathsf{Inw}$ w następujący sposób. Dla $A \subseteq \mathbb{N}$ oraz $k \in A$ niech $g(A)(2k) = 2k+1$ i $g(A)(2k+1) = 2k$. A jeśli $k \notin A$, to $g(A)(2k) = 2k$ i $g(A)(2k+1) = 2k+1$. Funkcja $g(A)$ jest dla każdego A inwolucją, tj. $g(A) \circ g(A) = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$. Przy tym operacja g jest injekcją, bo jeśli np. $k \in A - B$, to $g(A)(2k) \neq g(B)(2k)$. Z twierdzenia Cantora-Bernsteina można teraz wywnioskować, że $\overline{\overline{\mathsf{Inw}}} = \mathfrak{C}$.

576e: Nie (zadanie 147).

577a: Zbiór $\mathsf{P}(\mathbb{I})/_\sim$ jest mocy $\mathfrak{C}$, bo jest równoliczny z $\mathbb{I}$. Niech $f = \lambda r.\, [\{r\}]_\sim : \mathbb{I} \to \mathsf{P}(\mathbb{I})/_\sim$. Funkcja f jest różnowartościowa, bo jeśli $r \neq s$, to $\sup\{r\} = r \neq s = \sup\{s\}$, więc $\{r\} \not\sim \{s\}$. Ponadto f jest surjekcją, bo $[X]_\sim = [\{\sup X\}]_\sim = f(\sup X)$, dla każdej klasy $[X]_\sim$.

577b: Niech $X \subseteq \mathbb{I}$. Jeśli $\sup X = 0$, to klasa abstrakcji $[X]_\sim$ ma dwa elementy: $\varnothing$ i $\{0\}$. W przeciwnym razie (gdy $\sup X = r > 0$), klasa abstrakcji $[X]_\sim$ ma moc $2^{\mathfrak{C}}$. Zauważmy, że $r = \sup(Y \cup \{r\})$ dla każdego $Y \subseteq [0, r)$. Wynika stąd, że funkcja $\lambda Y.(Y \cup \{r\})$ jest injekcją z $\mathsf{P}([0, r))$ do $[X]_\sim$, a więc $2^{\mathfrak{C}} \leq \overline{\overline{[X]_\sim}}$. Ponieważ $[X]_\sim \subseteq \mathsf{P}(\mathbb{I})$ oraz $\overline{\overline{\mathsf{P}(\mathbb{I})}} = 2^{\mathfrak{C}}$, więc zachodzi też nierówność w drugą stronę. Z twierdzenia Cantora-Bernsteina wnioskujemy, że $\overline{\overline{[X]_\sim}} = 2^{\mathfrak{C}}$. A zatem mocami klas abstrakcji są tylko liczby kardynalne 2 i $2^{\mathfrak{C}}$.

578a: Jedynym elementem minimalnym jest $\varnothing$. Istotnie, jeśli $A \preceq \varnothing$, to $A \subseteq \varnothing$, więc $A = \varnothing$. A jeśli $X \neq \varnothing$, to jest jakieś $x \in X$ i wtedy $X - \{x\} \prec X$. Analogicznie, jedynym elementem maksymalnym jest $\mathbb{N}$. Ale zbiór pusty nie jest elementem najmniejszym, ani $\mathbb{N}$ największym, bo $\varnothing \not\preceq \mathbb{N}$.

578b: Nie, na przykład rodzina $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, gdzie $A_n = \{k \in \mathbb{N} \mid n \leq k\}$, nie ma elementu najmniejszego, bo zawsze $A_{n+1} \prec A_n$.

578c: Zacznijmy od tego, że każda rodzina $\mathcal{R} \subseteq \mathsf{P}(\mathbb{N})$, ograniczona z góry ze względu na porządek $\preceq$ (w szczególności każda rodzina mająca kres górny) musi być przeliczalna. Istotnie, jeśli $\mathcal{R} \preceq B$, dla pewnego $B \subseteq \mathbb{N}$, oraz $A \in \mathcal{R}$, to $f : \mathcal{R} \xrightarrow{1-1} \mathsf{P}_{\mathsf{fin}}(\mathbb{N})$, gdzie $f(A) = B - A$. Ponieważ zbiór $\mathsf{P}_{\mathsf{fin}}(\mathbb{N})$ wszystkich skończonych podzbiorów $\mathbb{N}$ jest przeliczalny, więc także rodzina $\mathcal{R}$ jest przeliczalna.
Ponieważ zbiór $\mathsf{P}(\mathbb{N})$ jest mocy continuum, więc rodzina Π wszystkich jego przeliczalnych podzbiorów jest mocy continuum (zob. zadanie 205). A skoro $\Sigma \subseteq \Pi$, to moc zbioru Σ jest co najwyżej $\mathfrak{C}$.

Aby pokazać, że moc zbioru Σ jest co najmniej $\mathfrak{C}$, określimy funkcję $g : \mathsf{P}(\mathbb{N}) \xrightarrow{1-1} \Sigma$, przyjmując $g(A) = \{A\}$. Oczywiście każda rodzina jednoelementowa ma kres górny równy temu elementowi, a zatem funkcja g jest dobrze określona. Jej różnowartościowość jest oczywista.

578d: Każdy antyłańcuch w $\langle \mathsf{P}(\mathbb{N}), \subseteq\rangle$ jest też antyłańcuchem w $\langle \mathsf{P}(\mathbb{N}), \preceq\rangle$, więc istnieją nieprzeliczalne antyłańcuchy ze względu na $\preceq$. Ale każdy łańcuch w $\langle \mathsf{P}(\mathbb{N}), \preceq\rangle$ musi być przeliczalny. Przypuśćmy, że $\mathcal{L}$ jest takim łańcuchem, zakładając bez straty ogólności, że $\mathcal{L} \neq \varnothing$. Ustalając $A \in \mathcal{L}$ określimy funkcję $h : \mathcal{L} \xrightarrow{1-1} \mathbb{Z}$, przyjmując $h(B) = \mathsf{if}\ A \subseteq B\ \mathsf{then}\ \overline{\overline{B - A}}\ \mathsf{else}\ -(\overline{\overline{A - B}})$, dla dowolnego $B \in \mathcal{L}$. Zauważmy, że jeśli $B_1, B_2 \in \mathcal{L}$ oraz $B_1 \subsetneq B_2$, to $h(B_1) < h(B_2)$, funkcja h jest więc faktycznie różnowartościowa.

580a: Funkcja F jest różnowartościowa. Załóżmy bowiem, że $A \neq B$ i $F(A) = F(B)$. Bez straty ogólności możemy założyć, że istnieje liczba $n \in A - B$. Wtedy $\langle n, 3\rangle \in A \times \mathbb{N} \subseteq F(A) = F(B)$, czyli $\langle n, 3\rangle \in (B \times \mathbb{N}) \cup (\mathbb{N} \times B)$. Ale skoro $n \notin B$, to $\langle n, 3\rangle \in \mathbb{N} \times B$, czyli $n \in \mathbb{N}$. Wtedy jednak $\langle n, n\rangle \in F(A) = F(B)$, skąd $n \in B$ – sprzeczność.

580b: Funkcja F nie jest „na”. Na przykład nie istnieje takie X, że $F(X) = \{\langle -1, -1\rangle\}$. W przeciwnym razie $\langle -1, -1\rangle \in (X \times \mathbb{N}) \cup (\mathbb{N} \times X)$, skąd $-1 \in \mathbb{N}$, sprzeczność.

580c: Jeśli $X \in F^{-1}(\{\mathcal{B} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid \mathbf{1}_{\mathbb{Z}} \subseteq \mathcal{B}\})$, to $\mathbf{1}_{\mathbb{Z}} \subseteq F(X)$, w szczególności $\langle -1, -1\rangle \in F(X)$, skąd wynika sprzeczność jak w części 580b. Zatem szukany przeciwobraz to $\varnothing$.

580d: Mamy $F^{-1}(\{\mathcal{B} \mid \mathbf{1}_{\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{B}\}) = \{X \subseteq \mathbb{Z} \mid \mathbf{1}_{\mathbb{N}} \subseteq F(X)\} = \{X \subseteq \mathbb{Z} \mid \forall n \in \mathbb{N}.\, \langle n, n\rangle \in F(X)\}$. Ponieważ dla każdego n zachodzi równoważność $\langle n, n\rangle \in F(X) \ \leftrightarrow\ n \in X$, więc otrzymujemy w końcu, że $F^{-1}(\{\mathcal{B} \mid \mathbf{1}_{\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{B}\}) = \{X \subseteq \mathbb{Z} \mid \forall n \in \mathbb{N}.\, n \in X\} = \{X \subseteq \mathbb{Z} \mid \mathbb{N} \subseteq X\}$.

581a: Funkcja F jest różnowartościowa. Załóżmy bowiem, że $F(A) = F(B)$ dla pewnych $A, B \subseteq \mathbb{N}$. Pokażemy, że wtedy $A \subseteq B$. Niech $n \in A$. Wtedy $\langle n, n\rangle \in A \times \mathbb{N} \subseteq F(A)$, a skoro zachodzą równości $F(A) = F(B) = (B \times \mathbb{N}) \cup (\mathbb{N} \times B)$, to albo $\langle n, n\rangle \in B \times \mathbb{N}$ albo $\langle n, n\rangle \in \mathbb{N} \times B$. W każdym przypadku mamy $n \in B$. Analogicznie dowodzimy, że $B \subseteq A$, skąd $A = B$.

581b: Zauważmy, że każdy zbiór postaci $(A \times \mathbb{N}) \cup (\mathbb{N} \times A)$ jest relacją symetryczną. Jeśli bowiem $\langle m, n\rangle \in (X \times \mathbb{N}) \cup (\mathbb{N} \times X)$, to albo $m \in X$ albo $n \in X$. W każdym z tych przypadków para $\langle n, m\rangle$ należy do $F(X)$. Zatem funkcja F nie jest „na”, na przykład nie istnieje takie X, że $F(X) = \{\langle 1, 2\rangle\}$.

581c: Po pierwsze, $F^{-1}(Z) = \{\mathbb{N}\}$. Najpierw zauważmy, że $F(\mathbb{N}) = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ jest relacją zwrotną, zatem zachodzi zawieranie z prawej do lewej. Na odwrót, jeśli $X \in F^{-1}(Z)$, to $F(X) = (X \times \mathbb{N}) \cup (\mathbb{N} \times X)$ jest relacją zwrotną, czyli każda para postaci $\langle n, n\rangle$ do niej należy. Mamy więc dla każdego $n \in \mathbb{N}$ albo $\langle n, n\rangle \in X \times \mathbb{N}$ albo $\langle n, n\rangle \in \mathbb{N} \times X$ i w obu przypadkach $n \in X$. A zatem $X = \mathbb{N}$.

Po drugie, $F^{-1}(S) = \mathsf{P}(\mathbb{N})$, bo każdy zbiór postaci $(A \times \mathbb{N}) \cup (\mathbb{N} \times A)$ jest relacją symetryczną. Po trzecie, $F^{-1}(P) = \{\mathbb{N}, \varnothing\}$. Istotnie, przypuśćmy, że $A \in F^{-1}(P)$, czyli że $(A \times \mathbb{N}) \cup (\mathbb{N} \times A)$ jest relacją przechodnią. Jeśli $A \neq \varnothing$, to jest jakiś element $a \in A$. Wtedy dla każdej liczby naturalnej n mamy $\langle a, n\rangle \in F(A)$ oraz $\langle n, a\rangle \in F(A)$. Z przechodniości $\langle n, n\rangle \in F(A)$. Udowodniliśmy w ten sposób, że relacja $F(A)$ jest zwrotna, skąd $A = \mathbb{N}$. A zatem $F^{-1}(P) \subseteq \{\mathbb{N}, \varnothing\}$. Inkluzja w przeciwną stronę też zachodzi, bo relacje $F(\mathbb{N}) = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ i $F(\varnothing) = \varnothing$ są oczywiście przechodnie.

Po czwarte, $F^{-1}(T) = \{\mathbb{N}\}$, ponieważ relacja pełna $F(\mathbb{N})$ jest spójna, a na dodatek $T \subseteq Z$, skąd mamy zawierania $\{\mathbb{N}\} \subseteq F^{-1}(T) \subseteq F^{-1}(Z) = \{N\}$.

582a: Tak. Przypuśćmy, że $A \neq B$, na przykład niech $\langle n, i\rangle \in A - B$. Wtedy $i \in g(A)(n) - g(B)(n)$, skąd $g(A)(n) \neq g(B)(n)$ i w konsekwencji $g(A) \neq g(B)$.

582b: Tak. Niech $f : \mathbb{N} \to \mathsf{P}(\mathbb{N})$ i niech $A = \{\langle n, i\rangle \mid i \in f(n)\}$. Wtedy $g(A) = f$, bo dla dowolnego n zachodzi $g(A)(n) = \{i \mid \langle n, i\rangle \in A\} = \{i \mid i \in f(n)\} = f(n)$.

582c: Zero. Nie istnieje żadna surjekcja ze zbioru $\mathbb{N}$ na zbiór $\mathsf{P}(\mathbb{N})$, bo zbiór $\mathsf{P}(\mathbb{N})$ jest większej mocy.

582d: Niech $Z \subseteq \mathsf{P}(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$ oznacza zbiór wszystkich relacji zwrotnych w $\mathbb{N}$. Ponieważ z zadań 582a i 582b wynika, że funkcja g jest bijekcją, więc moc obrazu zbioru Z jest taka sama jak moc zbioru Z. Pokażemy, że $\overline{\overline{Z}} = \mathfrak{C}$. Nierówność $\overline{\overline{Z}} \leq \mathfrak{C}$ wynika z inkluzji $Z \subseteq \mathsf{P}(\mathbb{N}\times\mathbb{N}) \sim \mathsf{P}(\mathbb{N})$. Nierówność $\mathfrak{C} \leq \overline{\overline{Z}}$ udowodnimy zaś określając injekcję $\mu : \mathsf{P}(\mathbb{N}-\{0\}) \xrightarrow{1-1} Z$ wzorem $\mu(X) = \mathbf{1}_{\mathbb{N}} \cup (\{0\}\times X)$. Funkcja μ jest dobrze określona, bo zawsze $\mathbf{1}_{\mathbb{N}} \subseteq \mu(X)$ czyli każda relacja postaci $\mu(X)$ jest zwrotna. Jest to też funkcja różnowartościowa, bo jeśli X, Y są różnymi podzbiorami $\mathbb{N}-\{0\}$ i na przykład $n \in X - Y$, to oczywiście $\langle 0, n\rangle \in \mu(X) - \mu(Y)$. Ostatecznie $\overline{\overline{g(Z)}} = \overline{\overline{Z}} = \mathfrak{C}$, na mocy twierdzenia Cantora-Bernsteina.

583a: Niech S oznacza zbiór wszystkich funkcji stałych z $\mathbb{N}$ do $\mathsf{P}(\mathbb{N})$ i niech $W = g^{-1}(S)$. Pokażemy, że zbiór W jest mocy continuum. Ponieważ $W \subseteq \mathsf{P}(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$ więc $\overline{\overline{W}} \leq \mathfrak{C}$, bo cały zbiór $\mathsf{P}(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$ ma moc $\mathfrak{C}$. Z drugiej strony niech $\varphi(A) = \mathbb{N}\times A$, dla $A \subseteq \mathbb{N}$. Pokażemy, że wtedy $\varphi : \mathsf{P}(\mathbb{N}) \xrightarrow{1-1} W$. Istotnie, dla każdego A i każdego n zachodzi $g(\mathbb{N}\times A)(n) = \{i \in \mathbb{N} \mid \langle n, i\rangle \in \mathbb{N}\times A\} = \{i \in \mathbb{N} \mid i \in A\} = A$; funkcja $g(\mathbb{N}\times A)$ jest więc stale równa A. Oznacza to właśnie, że $\varphi(A)$, czyli $\mathbb{N}\times A$ należy do przeciwobrazu W zbioru S. Funkcja φ jest oczywiście różnowartościowa, więc $\mathfrak{C} \leq \overline{\overline{W}}$. Z twierdzenia Cantora-Bernsteina dostajemy $\overline{\overline{W}} = \mathfrak{C}$.

584a: Nie. Na przykład $F(\varnothing) = \mathbb{N}$, bo $\mathrm{Dom}(\varnothing) = \varnothing$, oraz $F(\mathbf{1}_{\mathbb{N}}) = \mathbb{N}$, bo $\langle y, x\rangle \in \mathbf{1}_{\mathbb{N}}$ oznacza to samo, co $y = x$.

584b: Niech $\mathcal{P}$ oznacza zbiór wszystkich częściowych porządków w $\mathbb{N}$. Jeśli $r \in \mathcal{P}$, to $\mathrm{Dom}(r) = \mathbb{N}$, więc $F(r) = \{x \in \mathbb{N} \mid \forall y\,(\langle y, x\rangle \in r \to y = x)\}$ jest ni mniej, ni więcej, tylko zbiorem wszystkich elementów minimalnych zbioru uporządkowanego $\langle \mathbb{N}, r\rangle$. Pokażemy, że obraz zbioru $\mathcal{P}$ przy F, czyli zbiór $F(\mathcal{P}) = \{F(r) \mid r \in \mathcal{P}\}$ to po prostu całe $\mathsf{P}(\mathbb{N})$. Istotnie, dla dowolnego niepustego $A \subseteq \mathbb{N}$ możemy określić relację $r_A = \mathbf{1}_{\mathbb{N}} \cup (A \times -A)$, przy której elementami minimalnymi są dokładnie elementy zbioru A, a wszystkie pozostałe są od nich większe. Jeśli zaś $A = \varnothing$, to jako r_A możemy przyjąć relację $\geq$ (tj. relację odwrotną do zwykłego porządku $\leq$), która nie ma elementów minimalnych. W każdym przypadku $A = F(r_A)$, co dowodzi że $\mathsf{P}(\mathbb{N}) = F(\mathcal{P})$.

584c: Nie. Do przeciwobrazu $F^{-1}(\{\mathbb{N}\})$ należą wszystkie te relacje r, że $F(r) = \mathbb{N}$. Są to na przykład wszystkie relacje postaci $\mathbf{1}_A = \{\langle a, a\rangle \mid a \in A\}$, gdzie $A \subseteq \mathbb{N}$. Aby to sprawdzić, zauważmy, że $\mathrm{Dom}(\mathbf{1}_A) = A$, oraz że warunek $\forall y\,(\langle y, x\rangle \in \mathbf{1}_A \to y = x)$ jest spełniony dla każdego x. Stąd wynika, że $F(\mathbf{1}_A) = \{x \in \mathbb{N} \mid x \in \mathrm{Dom}(\mathbf{1}_A) \to \forall y\,(\langle y, x\rangle \in \mathbf{1}_A \to y = x)\} = -A \cup \mathbb{N} = \mathbb{N}$.

584d: Nie. Do przeciwobrazu $F^{-1}(\{\varnothing\})$ należą wszystkie te relacje r, że $F(r) = \varnothing$. Są to na przykład relacje $r_n = \{\langle n, 0\rangle\} \cup (\{0\}\times\mathbb{N})$ dla $n > 0$. Istotnie, dla każdego $x \in \mathbb{N}$ zachodzi $x \in \mathrm{Dom}(r_n)$, ale jednocześnie, jeśli $x \neq 0$, to $\langle 0, x\rangle \in r_n$, a jeśli $x = 0$, to $\langle n, 0\rangle \in r_n$, więc $F(r_n) = \varnothing$.

585a: Nie. Na przykład $G(\varnothing) = \varnothing$, bo $\mathrm{Dom}(\varnothing) = \varnothing$, oraz $G(\mathbb{N}\times\mathbb{N}) = \varnothing$, bo dla żadnego $x \in \mathbb{N}$ nie zachodzi warunek $\forall y\,(\langle y, x\rangle \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to y = x)$.

585b: Tak, bo dla dowolnego zbioru A zachodzi równość $G(\mathbf{1}_A) = A$. Istotnie, $\mathrm{Dom}(\mathbf{1}_A) = A$, więc $G(\mathbf{1}_A) = \{x \in A \mid \forall y\,(\langle y, x\rangle \in \mathbf{1}_A \to y = x)\} = A$.

585c: Niech $\mathcal{L}$ oznacza zbiór wszystkich liniowych porządków w $\mathbb{N}$. Wtedy $G(\mathcal{L}) = \{\{a\} \mid a \in \mathbb{N}\} \cup \{\varnothing\}$. Zacznijmy od tego, że jeśli $\preceq$ jest porządkiem w $\mathbb{N}$, to $G(\preceq) = \{x \in \mathbb{N} \mid \forall y\,(y \preceq x \to y = x)\}$, bo $\mathrm{Dom}(\preceq) = \mathbb{N}$. Zatem $G(\preceq)$ jest zbiorem wszystkich elementów minimalnych przy uporządkowaniu $\preceq$. Ponieważ porządek liniowy ma co najwyżej jeden element minimalny, więc $G(\preceq)$ jest zbiorem pustym albo jednoelementowym. Pokazaliśmy w ten sposób inkluzję $G(\mathcal{L}) \subseteq \{\{a\} \mid a \in \mathbb{N}\} \cup \{\varnothing\}$. Inkluzja w przeciwną stronę także zachodzi, bo dla dowolnego $a \in \mathbb{N}$ istnieje liniowy porządek r_a, którego jedynym elementem minimalnym jest a. Na przykład $r_a = \{\langle a, n\rangle \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{\langle x, y\rangle \mid x, y \neq a \wedge x \leq y\}$. Zatem $\{a\} \in G(\mathcal{L})$. Istnieją też porządki liniowe bez elementów minimalnych, np. relacja $\geq$ (porządek odwrotny do zwykłego porządku $\leq$), a więc także $\varnothing \in G(\mathcal{L})$.

585d: Nie. Do przeciwobrazu $G^{-1}(\{\varnothing\})$ należą wszystkie te relacje r, że $G(r) = \varnothing$. Są to na przykład wszystkie porządki częściowe bez elementów minimalnych. Albo relacje $r_n = \{\langle n, n+1\rangle, \langle n+1, n\rangle\}$ dla $n \geq 0$. Istotnie, dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy $\mathrm{Dom}(r_n) = \{n, n+1\}$ i żaden z elementów tego zbioru nie spełnia warunku z definicji funkcji G. A zatem $G(r_n) = \varnothing$.

587a: Zbiór $\mathbb{R}^*$ jest mocy $\mathfrak{C}$. Oczywiście $\mathbb{R} \sim \mathbb{R}^1 \subseteq \mathbb{R}^*$, więc $\mathfrak{C} \leq \overline{\overline{\mathbb{R}^*}}$. A jeśli dla $\alpha = \langle r_1, \ldots, r_n\rangle$

określimy funkcję $f_\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ wzorem $f_\alpha(m) = \mathsf{if}\ m = 0\ \mathsf{then}\ n\ \mathsf{else\ if}\ m \leq n\ \mathsf{then}\ r_m\ \mathsf{else}\ 0$, to przyporządkowanie $\lambda\alpha.\, f_\alpha$ będzie różnowartościową funkcją z $\mathbb{R}^*$ do $\mathbb{R}^\mathbb{N}$. Rzeczywiście, jeśli $f_\alpha = f_\beta$, oraz $k = f_\alpha(0)$, to $\alpha = \langle f_\alpha(1), \ldots, f_\alpha(k)\rangle = \beta$.

587b: Nie. Relacja $\preceq$ nie jest antysymetryczna. Na przykład $\langle 3,1\rangle \preceq \langle 1,3\rangle \preceq \langle 3,1\rangle$, ale $\langle 3,1\rangle \neq \langle 1,3\rangle$.

587c: Relacja $\approx$ jest relacją równoważności, bo jest jądrem przekształcenia $Z : \mathbb{R}^* \to \mathsf{P}(\mathbb{R})$, które każdemu ciągowi $\alpha = \langle r_1, \ldots, r_n\rangle$ przypisuje zbiór jego wyrazów $Z_\alpha = \{r_1, \ldots, r_n\}$. Pokażemy, że zbiór $\mathbb{R}^*/_\approx$ jest mocy $\mathfrak{C}$. Ponieważ $\kappa : \mathbb{R}^* \xrightarrow{\text{na}} \mathbb{R}^*/_\approx$, gdzie $\kappa(\alpha) = [\alpha]_\approx$, więc $\overline{\overline{\mathbb{R}^*/_\approx}} \leq \overline{\overline{\mathbb{R}^*}} = \mathfrak{C}$. Ponadto $\mathfrak{C} = \overline{\overline{\mathbb{R}}} \leq \overline{\overline{\mathbb{R}^*/_\approx}}$, bo mamy różnowartościową funkcję $k : \mathbb{R} \xrightarrow{1-1} \mathbb{R}^*/_\approx$, gdzie $k(r) = [\langle r\rangle]_\approx$. Jeśli α jest ciągiem pustym, to $[\alpha]_\approx = \{\alpha\}$ ma jeden element, w przeciwnym razie klasa $[\alpha]_\approx$ jest mocy $\aleph_0$. Rzeczywiście, jeśli $\alpha = \langle r_1, \ldots, r_n\rangle$, to $[\alpha]_\approx = \{\beta \in \mathbb{R}^* \mid Z_\beta = Z_\alpha\} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} S_k$, gdzie $S_k = \{\beta \in \mathbb{R}^k \mid Z_\beta = Z_\alpha\} \subseteq Z_\alpha^k$. Ponieważ zbiór Z_α jest skończony, więc każde S_k też jest skończone, a więc ich suma jest przeliczalna. Pozostaje zauważyć, że $[\alpha]_\approx$ jest zbiorem nieskończonym, bo dla wszystkich $k \geq n$ zbiory S_k są niepuste i rozłączne. A więc $[\alpha]_\approx$ ma moc $\aleph_0$.

586a: Nie. Jeśli $R_1 = \{\langle 1,2\rangle\}$ i $R_2 = \{\langle 2,1\rangle\}$, to $f(R_1) = f(R_2) = \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle\}$, a zatem funkcja f nie jest różnowartościowa.

586b: Nie. Rozważmy relację $T = \{\langle 1,2\rangle\}$. Pokażemy, że relacja T nie należy do zbioru wartości funkcji f. Gdyby T należała do zbioru wartości f, to istniałaby taka relacja R, że $R \cup R^{-1} = T$. Wówczas musiałby zachodzić jeden z warunków: $\langle 1,2\rangle \in R$ lub $\langle 1,2\rangle \in R^{-1}$. Jednak w takiej sytuacji mielibyśmy także $\langle 2,1\rangle \in R \cup R^{-1} = T$, co nie ma miejsca. Relacja T nie należy do zbioru wartości f, a zatem funkcja f nie jest na $\mathsf{P}(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$.

586c: Zbiór $f(\mathsf{P}(\mathbb{N}\times\mathbb{N}))$ to zbiór wszystkich relacji symetrycznych w $\mathbb{N}$. Istotnie, jeśli S jest relacją symetryczną, to $S = S^{-1}$ i $f(S) = S$, a zatem $S \in f(\mathsf{P}(\mathbb{N}\times\mathbb{N}))$. Odwrotnie, jeśli $S \in f(\mathsf{P}(\mathbb{N}\times\mathbb{N}))$, to S jest postaci $R \cup R^{-1}$ dla pewnego R. Jeśli $\langle x,y\rangle \in S$, to $\langle x,y\rangle \in R$ lub $\langle x,y\rangle \in R^{-1}$. Wtedy jednak $\langle y,x\rangle \in R \cup R^{-1} = S$. Zatem relacja S jest symetryczna.

586d: Przeciwobrazem zbioru relacji zwrotnych $\mathcal{Z}$ jest zbiór wszystkich relacji zwrotnych $\mathcal{Z}$. Jeśli Z jest relacją zwrotną, to także $f(Z) = Z \cup Z^{-1}$ jest relacją zwrotną. Zatem $\mathcal{Z} \subseteq f^{-1}(\mathcal{Z})$. Jeśli $Z \in f^{-1}(\mathcal{Z})$, to istnieje taka R, że $f(R) = Z$. Skoro $Z = R \cup R^{-1}$, to $\langle x,x\rangle \in R$ (i mamy co chcemy) lub $\langle x,x\rangle \in R^{-1}$. Ale w tym drugim przypadku także $\langle x,x\rangle \in R$.

588: Dziedzina Φ ma moc $|\mathbb{N}|^{|\mathbb{R}|} = \aleph_0^{\mathfrak{C}} = 2^{\mathfrak{C}}$. Zbiór $\mathsf{P}(\mathsf{P}(\mathbb{R}))$ jest mocy $2^{2^{\mathfrak{C}}} > 2^{\mathfrak{C}}$, więc Φ nie może być „na". Funkcja Φ nie jest też różnowartościowa. Na przykład $\Phi(\lambda f.\, 1) = \Phi(\lambda f.\, 2) = \{\mathbb{R}\}$.

Na koniec pokażemy, że moc zbioru wartości Φ jest równa $2^{\mathfrak{C}}$. Z pewnością zbiór $\mathrm{Rg}(\Phi)$ jest co najwyżej takiej mocy jak dziedzina. Wystarczy pokazać więc $2^{\mathfrak{C}}$ różnych elementów tego zbioru. Dla $A \subseteq \mathbb{R}$ niech χ_A oznacza funkcję charakterystyczną zbioru A, tj. taką funkcję, że $f_A(x) = 1$ dla $x \in A$ oraz $f_A(x) = 0$, gdy $x \notin A$. Oczywiście $\Phi(f_A) = \{A, \mathbb{R} - A\}$. Niech $X = \{A \mid 42 \in A\}$. Jeśli $A, B \in X$ i $A \neq B$ to $\Phi(f_A) \neq \Phi(f_B)$, bo A i B nie są swoimi dopełnieniami. Zatem rodzina $\{\Phi(f_A) \mid A \in X\}$ jest mocy $2^{\mathfrak{C}}$.

589a: Weźmy dwie różne funkcje $f_1, f_2 : \mathbb{N} \to \mathsf{P}(\mathbb{N})$. Wiemy, że istnieje takie $n \in \mathbb{N}$, że $f_1(n) \neq f_2(n)$. Ponieważ $\bigcup f_1(\{n\}) = \bigcup\{f_1(n)\} = f_1(n) \neq f_2(n) = \bigcup f_2(\{n\})$, więc $\varphi(f_1)(\{n\}) \neq \varphi(f_2)(\{n\})$, co dowodzi, że $\varphi(f_1) \neq \varphi(f_2)$. A zatem funkcja φ jest różnowartościowa.

589b: Zauważmy, że $\overline{\overline{\mathsf{P}(\mathbb{N})^\mathbb{N}}} = \mathfrak{C}^{\aleph_0} = \mathfrak{C}$, a $\overline{\overline{\mathsf{P}(\mathbb{N})^{\mathsf{P}(\mathbb{N})}}} = \mathfrak{C}^{\mathfrak{C}} = 2^{\mathfrak{C}}$. A zatem $\overline{\overline{\mathsf{P}(\mathbb{N})^\mathbb{N}}} < \overline{\overline{\mathsf{P}(\mathbb{N})^{\mathsf{P}(\mathbb{N})}}}$, a więc nie istnieje żadna surjekcja z $\mathsf{P}(\mathbb{N})^\mathbb{N}$ na $\mathsf{P}(\mathbb{N})^{\mathsf{P}(\mathbb{N})}$.

589c: Zauważmy, że dla dowolnego $f : \mathbb{N} \to \mathsf{P}(\mathbb{N})$ zachodzi $\varphi(f)(\varnothing) = \bigcup f(\varnothing) = \varnothing$. Jeśli więc $\varphi(f)$ jest funkcją stałą, to $\varphi(f) = \lambda X.\varnothing$. W szczególności $\varphi(f)(\{n\}) = f(n) = \varnothing$, więc f jest stale równe $\varnothing$. A zatem przeciwobrazem zbioru funkcji stałych jest zbiór $\{\lambda n.\varnothing\}$.

589d: Niech $B \subseteq \mathbb{N}$. Jeśli $f : \mathbb{N} \to \mathsf{P}(\mathbb{N})$ jest funkcją stale przyjmującą wartość B, to dla dowolnego niepustego zbioru $S \subseteq \mathbb{N}$ zachodzi $\varphi(f)(S) = \bigcup f(S) = \bigcup\{f(n) \mid n \in S\} = \bigcup\{B\} = B$. Z poprzedniego punktu wiemy też, że $\varphi(f)(\varnothing) = \varnothing$.

A zatem $\varphi(\lambda n.B) = F_B$, gdzie $F_B = \lambda X.\mathsf{if}\ X = \varnothing\ \mathsf{then}\ \varnothing\ \mathsf{else}\ B$. Ponieważ B jest dowolnym podzbiorem $\mathbb{N}$, więc szukanym obrazem jest zbiór $\{F_B \mid B \subseteq \mathbb{N}\}$ wszystkich takich funkcji, czyli zbiór $\{F : \mathsf{P}(\mathbb{N}) \to \mathsf{P}(\mathbb{N}) \mid F(\varnothing) = \varnothing \land \forall A, B(A, B \neq \varnothing \to F(A) = F(B))\}$.

590a: Ponieważ $R \subseteq \mathsf{P}(\mathbb{N})$, oraz $\overline{\overline{\mathsf{P}(\mathbb{N})}} = \mathfrak{C}$, więc $\overline{\overline{R}} \leq \mathfrak{C}$. Aby pokazać, że także $\overline{\overline{R}} \geq \mathfrak{C}$, rozpatrzmy funkcję $F : \mathsf{P}(\mathbb{N}) \to \mathsf{P}(\mathbb{N})$ określoną tak: $F(X) = \{2k \mid k \in X\} \cup \{2k+1 \mid k \notin X\}$. Dla dowolnego $X \subseteq \mathbb{N}$ i dowolnego $k \in \mathbb{N}$, zbiór $F(X)$ spełnia warunki

$$2k \in F(X) \leftrightarrow 2k+1 \notin F(X) \qquad \text{oraz} \qquad 2k+1 \in F(X) \leftrightarrow 2k \notin F(X),$$

a więc dla każdego x mamy $x \in F(X) \leftrightarrow g(x) \notin F(X)$. Zatem $F(X) \in R$. Ponadto funkcja F jest różnowartościowa: jeśli $k \in (X-Y) \cup (Y-X)$, to $2k \in (F(X)-F(Y)) \cup (F(Y)-F(X))$. Oznacza to, że $F : \mathsf{P}(\mathbb{N}) \xrightarrow{1-1} R$, skąd $\overline{\overline{R}} \geq \overline{\overline{\mathsf{P}(\mathbb{N})}} = \mathfrak{C}$. Ostatecznie otrzymujemy $\overline{\overline{R}} = \mathfrak{C}$.

590b: Skoro $\{0,1,2\} \cup g(\{0,1,2\}) = \{0,1,2,3\}$, to $[\{0,1,2\}]_r = \{A \mid A \cup g(A) = \{0,1,2,3\}\}$. Na to, aby $A \cup g(A) = \{0,1,2,3\}$ potrzeba i wystarcza aby $A \subseteq \{0,1,2,3\}$ i aby do zbioru A należała co najmniej jedna z liczb 0 i 1 oraz co najmniej jedna z liczb 2 i 3. Takich zbiorów jest dziewięć: $\{0,2\}$, $\{1,2\}$, $\{0,3\}$, $\{1,3\}$, $\{0,1,2\}$, $\{0,1,3\}$, $\{0,2,3\}$, $\{1,2,3\}$, $\{0,1,2,3\}$.

591a: Tak. Zbiorem wartości funkcji $\Phi(A)$ jest A.[27] Jeśli więc $A \neq B$ to $\mathrm{Rg}(\Phi(A)) \neq \mathrm{Rg}(\Phi(B))$ i w konsekwencji $\Phi(A) \neq \Phi(B)$.

591b: Nie. Funkcje postaci $\Phi(A)$ są rosnące (gdy A jest zbiorem nieskończonym) lub okresowe (gdy A jest zbiorem skończonym). Funkcja g z zadania 590 nie jest ani rosnąca ani okresowa, więc nie jest wartością funkcji Φ.

591c: Ponieważ $\mathrm{Rg}(f(A)) = A$ dla każdego A, więc z tego, że $A \in \Phi^{-1}(\{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid \mathrm{Rg}(f) = \mathbb{N}\})$, czyli $\Phi(A) \in \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid \mathrm{Rg}(f) = \mathbb{N}\}$ wynika, że $A = \mathrm{Rg}(\Phi(A)) = \mathbb{N}$. Zatem przeciwobraz $\Phi^{-1}(\{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid \mathrm{Rg}(f) = \mathbb{N}\})$ jest jednoelementowy.

591d: Tak. Mamy $(\Psi \circ \Phi)(A) = \Psi(\Phi(A)) = \mathrm{Rg}(\Phi(A)) = A$, dla każdego A.

591e: Nie. Jeśli na przykład $f = \lambda n.\, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, to $\Phi(\Psi(f)) = \Phi(\mathbb{N}) = \lambda n.\, n$. Tymczasem $1 \neq \lfloor \frac{1}{2} \rfloor = 0$, więc funkcje f i $\Phi(\Psi(f))$ są różne.

592a: Zauważmy, że $f(r)$ składa się z najmniejszych elementów wszystkich klas abstrakcji relacji r. Oczywiście zero musi być jednym z tych elementów, jeśli więc $0 \notin A$, na przykład $A = \{3\}$, to nie istnieje taka relacja r, że $f(r) = A$. Funkcja nie jest więc „na". Zero jest jedyną przeszkodą: jeśli $0 \in A$, to $A = f(r)$, gdzie r wyznacza podział na zbiory $X_a = \{n \in \mathbb{N} \mid (a \leq n) \wedge \forall b{\in}A(a < b \to n < b)\}$. Zatem $\mathrm{Rg}(f) = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid 0 \in A\}$.

Funkcja f nie jest różnowartościowa. Na przykład niech relacje r_0 i r_1 wyznaczają odpowiednio podziały $\{\{0\}, \mathbb{N}-\{0\}\}$ i $\{\{1\}, \mathbb{N}-\{1\}\}$. Wtedy $f(r_0) = f(r_1) = \{0,1\}$.

592b: Już zauważyliśmy, że $f^{-1}(\{\{3\}\})$ jest zbiorem pustym (ma zero elementów), można więc przyjąć $A_0 = \{3\}$. Dla $n > 0$ niech $A_n = \mathbb{N} - \{n\}$. Jeśli $f(r) = A_n$, to klasy abstrakcji r są jednoelementowe, z wyjątkiem jednej klasy – tej, do której należy liczba n. Jest dokładnie n takich relacji, zatem przeciwobraz $f^{-1}(\{A_n\})$ jest n-elementowy.

592c: Z poprzedniej części zadania wynika już, że moc naszego ilorazu jest co najmniej $\aleph_0$. Oczywiście przeciwobrazy $f^{-1}(\{A\})$ są mocy co najwyżej continuum, nie wiemy jednak ile jest takich mocy, nie zakładamy bowiem hipotezy continuum. Należy więc zbadać, jakiej mocy mogą być nieskończone zbiory postaci $f^{-1}(\{A\}) = \{r \in \mathcal{R} \mid f(r) = A\}$, dla różnych A. Łatwo zauważyć, że jeśli $f^{-1}(\{A\})$ jest nieskończony, to zbiór A musi mieć co najmniej dwa elementy (w tym zero) i nieskończone dopełnienie. Niech a będzie niezerowym elementem zbioru A i niech $D = \{x \in -A \mid x > a\}$. Weźmy dowolny podzbiór Z zbioru D i relację r_Z wyznaczającą podział złożony ze zbiorów $\{a\} \cup Z$, $\{0\} \cup (-A \cap -Z)$ i singletonów $\{x\}$, dla liczb $x \in A - \{0,a\}$. Wtedy $r_Z \in f^{-1}(\{A\})$. Ponieważ takich relacji r_Z jest continuum (tyle ile podzbiorów ma D) więc nieskończony zbiór postaci $f^{-1}(\{A\})$ musi mieć moc continuum. Nasz iloraz jest więc równoliczny ze zbiorem $\mathbb{N} \oplus \{\mathfrak{C}\}$, czyli ma moc $\aleph_0$.

597: Wskazówka: rozwiązać najpierw zadanie 596.

598a: Wiadomo, że $\overline{\overline{\{0,1\}^*}} = \aleph_0$, skąd $\overline{\overline{\mathsf{P}(\{0,1\}^*)}} = \mathfrak{C}$. Skoro $\mathbb{T}(\{0,1\}) \subseteq \mathsf{P}(\{0,1\}^*)$, to $\overline{\overline{\mathbb{T}(\{0,1\})}} \leq \mathfrak{C}$. Definiujemy teraz funkcję $F : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{T}(\{0,1\})$ przez

[27] W przeciwnym razie niech $a \in A$ będzie najmniejszym elementem A, który nie jest wartością funkcji. Wtedy $a \neq \min A$, bo $\min A = \Phi(A)(0)$, więc są w A liczby mniejsze od a. Jest ich skończenie wiele; niech b będzie największą z nich i niech $b = \Phi(A)(n)$. Wówczas $a = \Phi(A)(n+1)$.

$$F(f) = \{0^n1 \mid f(n) = 1\} \cup \{0^n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Pokażemy, że $F(f)$ jest drzewem nad $\{0,1\}$ dla dowolnego $f \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Istotnie, $F(f)$ jest niepusty. Ponadto, jeśli $u \in F(f)$ oraz $u' \subseteq u$, to $u = u'$ lub $u' = 0^n$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$, skąd $u' \in F(f)$. Pokażemy, że F jest injekcją. Niech $f, g \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ i $f \neq g$. Wtedy istnieje takie $n \in \mathbb{N}$, że $f(n) = 1$ oraz $g(n) = 0$ (lub $f(n) = 0$ oraz $g(n) = 1$, ale wtedy dowód jest analogiczny). Zatem $0^n1 \in F(f)$ ale $0^n1 \notin F(g)$, czyli $F(f) \neq F(g)$. Skoro F jest injekcją, to $\overline{\overline{\mathbb{T}(\{0,1\})}} \geq \overline{\overline{\{0,1\}^{\mathbb{N}}}} = \mathfrak{C}$. Z twierdzenia Cantora-Bernsteina otrzymujemy $\overline{\overline{\mathbb{T}(\{0,1\})}} = \mathfrak{C}$. Uwaga: jeśli zamiast $\{0,1\}$ weźmiemy jakikolwiek inny zbiór dwuelementowy $\{a,b\}$, to oczywiście też $\overline{\overline{\mathbb{T}(\{a,b\})}} = \mathfrak{C}$.

598b: Niech X będzie dowolnym zbiorem mocy $\aleph_0$ i niech a, b będą różnymi elementami zbioru X. Wtedy $\mathbb{T}(\{a,b\}) \subseteq \mathbb{T}(X)$, więc z części 598a wynika $\overline{\overline{\mathbb{T}(X)}} \geq \overline{\overline{\mathbb{T}(\{a,b\})}} = \mathfrak{C}$. Z drugiej strony mamy $\mathbb{T}(X) \subseteq \mathsf{P}(X^*)$, więc $\overline{\overline{\mathbb{T}(X)}} \leq \overline{\overline{\mathsf{P}(X^*)}} = \overline{\overline{\mathsf{P}(\mathbb{N}^*)}} = \mathfrak{C}$. Z twierdzenia Cantora-Bernsteina otrzymujemy $\overline{\overline{\mathbb{T}(X)}} = \mathfrak{C}$. W szczególności $\overline{\overline{\mathbb{T}(\mathbb{N})}} = \mathfrak{C}$.

598c: Porządek $\leq$ w zbiorze $\{0\}^*$ jest liniowy, więc każde drzewo nad $\{0\}$ musi być albo postaci $T_k = \{0^n \mid 0 \leq n \leq k\}$ albo $T_\omega = \{0^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Łatwo sprawdzić, że funkcja $\varphi : \mathbb{N} \xrightarrow[\text{na}]{1-1} \mathbb{T}(\{0\})$ zadana przez $\varphi(0) = T_\omega$, $\varphi(n+1) = T_n$ jest bijekcją. Zatem $\overline{\overline{\mathbb{T}(\{0\})}} = \aleph_0$.

598d: Ponieważ $T(\{0\})$ ma moc $\aleph_0$, więc na mocy zadania 598b mamy $\overline{\overline{T(T(\{0\}))}} = \mathfrak{C}$.

601: $(\Rightarrow)$ Dla dowolnego z mamy równoważność $z \in f^{-1}(X) \leftrightarrow \pi(z) \in g^{-1}(X)$. Zatem funkcja π obcięta do zbioru $f^{-1}(X)$ ustala równoliczność $f^{-1}(X) \sim g^{-1}(X)$. $(\Leftarrow)$ Z założenia wynika, że dla dowolnego $y \in \mathbb{N}$ istnieje bijekcja $\pi_y : f^{-1}(\{y\}) \xrightarrow[\text{na}]{1-1} g^{-1}(\{y\})$. Funkcję $\pi : \mathbb{N} \xrightarrow[\text{na}]{1-1} \mathbb{N}$, określamy wzorem $\pi(x) = \pi_{f(x)}(x)$. Definicja jest poprawna, bo $x \in f^{-1}(\{y\}\})$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $y = f(x)$.

602: Zbiór ilorazowy jest mocy co najwyżej $\mathfrak{C}$ bo mamy surjekcję $\kappa : (\mathbb{N}{\to}\mathbb{N}) \xrightarrow{\text{na}} (\mathbb{N}{\to}\mathbb{N})/_r$, określoną przez $\kappa(f) = [f]_r$. Jest on też mocy co najmniej $\mathfrak{C}$, a to dlatego, że każdy niepusty podzbiór A zbioru $\mathbb{N}$, jako zbiór przeliczalny, jest zbiorem wartości pewnej funkcji $f_A : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Jeśli przyjmiemy $F(A) = [f_A]_r$, to funkcja $F : \mathsf{P}(\mathbb{N}) - \{\varnothing\} \to (\mathbb{N}{\to}\mathbb{N})/_r$, jest różnowartościowa, bo funkcje o różnych zbiorach wartości nie mogą pozostawać w relacji r. Rzeczywiście, jeśli np. $x \in \mathrm{Rg}(f) - \mathrm{Rg}(g)$, to $f^{-1}(\{x\}) \neq \varnothing = g^{-1}(\{x\})$.

603: Są tylko trzy możliwości: 1, $\aleph_0$ i $\mathfrak{C}$. Dowolna funkcja stała, np. funkcja $f = \lambda x.1$, jest w relacji r tylko sama ze sobą, bo $f^{-1}(\{n\}) = \varnothing$, dla $n \neq 1$. Nie ma innej takiej funkcji, więc klasa $[f]_r$ ma jeden element. Dalej zakładamy, że funkcja f nie jest stała.

Niech $S = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid \text{zbiory } A \text{ i } -A \text{ są nieskończone}\}$. Wiadomo, że zbiór S jest mocy $\mathfrak{C}$. Przypuśćmy najpierw, że dla pewnego $X \subseteq \mathbb{N}$ zbiór $A = f^{-1}(X)$ należy do S. Jeśli $B \in S$ to istnieje taka bijekcja $\pi_B : \mathbb{N} \xrightarrow[\text{na}]{1-1} \mathbb{N}$, że $\pi_B(B) = A$. Funkcja $f \circ \pi_B$ jest wtedy elementem $[f]_r$, co więcej, przyporządkowanie, które każdemu zbiorowi $B \in S$ przypisuje funkcję $f \circ \pi_B$ jest różnowartościowe. (Istotnie, jeśli np. $x \in B - C$ to $f(\pi_B(x)) \in X$ ale $f(\pi_C(x)) \notin X$.) Zatem klasa $[f]_r$ jest co najmniej mocy continuum. Ponieważ cały zbiór $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jest mocy continuum więc klasa $[f]_r$ też ma moc $\mathfrak{C}$.

Jeśli żaden ze zbiorów $f^{-1}(X)$ nie należy do S to istnieje takie $x \in \mathbb{N}$, że zbiór $A = f^{-1}(x)$ ma skończone dopełnienie, powiedzmy n-elementowe. Jeśli teraz $g \in [f]_r$ to funkcja g jest wyznaczona przez swoje wartości na n-elementowym zbiorze $f^{-1}(\mathbb{N} - \{x\})$. Takich funkcji jest zatem nie więcej niż elementów przeliczalnego zbioru $\{\rho : \mathbb{N} \multimap \mathbb{N} \mid \mathrm{Dom}(\rho) \text{ ma } n \text{ elementów}\}$. W tym przypadku klasa $[f]_r$ ma moc $\aleph_0$.

606a: Funkcja f jest monotoniczna (bo jest ciągła), więc $f(a) \geq f(p) = p$, dla dowolnego $p \in P$. Zatem $f(a)$ jest ograniczeniem górnym zbioru P i mamy $a \leq f(a)$. Dalej przez indukcję wynika, że elementy $f^n(a)$, gdzie $n \in \mathbb{N}$, tworzą ciąg wstępujący. Niech b będzie kresem górnym tego ciągu (w kracie K). Wówczas

$$f(b) = f(\sup\{f^n(a) \mid n \in \mathbb{N}\}) = \sup\{f^{n+1}(a) \mid n \in \mathbb{N}\} = \sup\{f^n(a) \mid n \in \mathbb{N}\} = b,$$

a więc b jest punktem stałym. Przy tym b jest najmniejszym punktem stałym większym lub równym a.

Jeśli bowiem $c \geq a$ jest punktem stałym, to łatwo pokazać przez indukcję, że $c \geq f^n(a)$ dla dowolnego n, i w konsekwencji $c \geq b$.

606b: Nie. Na przykład weźmy taką funkcję $f : \mathsf{P}(\mathbb{N}) \to \mathsf{P}(\mathbb{N})$:

$$f(X) = \begin{cases} X, & \text{jeśli } \overline{\overline{X}} \leq 1; \\ X \cup \{7\}, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Wtedy każdy zbiór jednoelementowy jest punktem stałym funkcji f. Jeśli teraz $P = \{\{2\},\{3\}\}$, to kresem zbioru P w kracie $\mathsf{P}(\mathbb{N})$ jest zbiór $\{2,3\}$, który nie jest punktem stałym.

606c: Tak. W zadaniu 606a mowa o tym, że każdy podzbiór P zbioru S ma kres górny w S.

607a: Nieprawda. Trzeba wstawić „*różnowartościowym*".

607b: Nieprawda. Trzeba wstawić „*i nie są w relacji* $\not\sqsubseteq$".

607c: Nieprawda. Trzeba wstawić „*o skończonym rozgałęzieniu*".

607d: Prawda. Jeśli wszystkie zbiory są niepuste, i nieskończenie wiele z nich ma przynajmniej dwa elementy to produkt musi być nieprzeliczalny.

607e: Prawda. W kracie zupełnej wystarczy aby przekształcenie było monotoniczne.

607f: Nieprawda. Trzeba wstawić „*niepustym*".

607g: Nieprawda. Trzeba wstawić „*nieskończonym*".

607h: Prawda. Nie tylko przedział w $\mathbb{R}$, ale w ogóle każdy zbiór można dobrze uporządkować.

608a: Nie. Na przykład funkcje g_0 i g_1 (zob. część 608e) nie są porównywalne.

608b: Nie. Na przykład takie funkcje f_n tworzą ciąg malejący:

$$f_n(m) = \begin{cases} 0, & \text{jeśli } m \leq n; \\ 1, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

608c: Tak. Jest izomorficzny z $\langle \mathsf{P}(\mathbb{N}), \subseteq \rangle$.

608d: Tak. Ciąg malejący (część 608b) jest oczywiście nieskończonym łańcuchem.

608e: Tak, na przykład zbiór $\{g_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, gdzie

$$g_n(m) = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } m = n; \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

608f: Tak. Wystarczy oczywiście wskazać nieprzeliczalny antyłańcuch w $\langle \mathsf{P}(\mathbb{N}), \subseteq \rangle$ (por. część 608c). Dla dowolnego ciągu $\alpha : \mathbb{N} \to \{0,1\}$ skonstruujemy przez indukcję ściśle rosnącą funkcję $f_\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Przyjmujemy $f_\alpha(0) = 1$, oraz

$$f_\alpha(n+1) = \begin{cases} 2f_\alpha(n), & \text{jeśli } \alpha(n) = 0; \\ 2f_\alpha(n)+1, & \text{jeśli } \alpha(n) = 1. \end{cases}$$

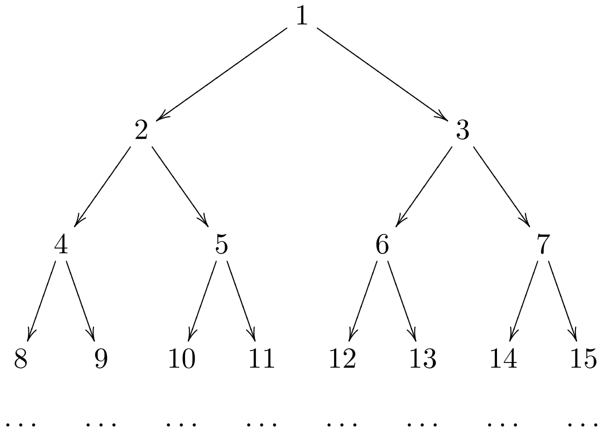
Jeśli teraz $A_\alpha = \mathrm{Rg}(f_\alpha)$, to zbiory A_α tworzą antyłańcuch. Istotnie, przypuśćmy, że $\alpha \neq \beta$ i niech $m = \min\{k \in \mathbb{N} \mid \alpha(k) \neq \beta(k)\}$. Wtedy mamy $f_\alpha(m+1) \in A_\alpha - A_\beta$ oraz $f_\beta(m+1) \in A_\beta - A_\alpha$. Zbiory A_α odpowiadają nieskończonym krawędziom drzewa na rysunku 7.

608g: Funkcje f_α z części 608f tworzą nieprzeliczalny łańcuch w $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

609a: Ta relacja jest jądrem przekształcenia $\lambda A.\, \langle \inf A, \sup A \rangle : \mathsf{P}([0,1]) \to [0,1] \times [0,1]$.

609b: Są to liczby 1 i $2^{\mathfrak{c}}$. Pierwszy przypadek zachodzi dla zbioru pustego oraz zbiorów jednoelementowych. Zbiór pusty jest jedynym zbiorem, którego kres górny 0 jest mniejszy niż kres dolny 1, ponieważ $x \in A$ implikuje $\inf A \leq x \leq \sup A$. Zbiór jednoelementowy $\{x\}$ (dla dowolnego $x \in [0,1]$) jest z kolei jedynym zbiorem, którego kresem dolnym i górnym jest ta sama liczba x. Jeśli zaś zbiór A ma co najmniej dwa elementy x, y, to jeden z nich jest większy, np. $x < y$. Wtedy A ma dwa różne kresy: jeśli $a = \inf A$ oraz $b = \sup A$, to $a \leq x < y \leq b$, więc $a < b$. Niech $\xi : \mathsf{P}((a,b)) \to [A]_r$ będzie funkcją określoną tak: $\xi(D) = \{a,b\} \cup D$. Wtedy $\inf \xi(D) = a$ i $\sup \xi(D) = b$, więc funkcja ξ jest dobrze określona. Jest też oczywiście różnowartościowa, więc moc zbioru $[A]_r$ jest co najmniej taka, jak moc zbioru $\mathsf{P}((a,b))$, czyli $2^{\mathfrak{c}}$, bo przedział (a,b) jest mocy continuum. Pozostaje zauważyć, że $[A]_r \subseteq \mathsf{P}([0,1])$, a cały zbiór $\mathsf{P}([0,1])$ ma moc $2^{\mathfrak{c}}$. Z twierdzenia Cantora-Bernsteina wynika, że moc klasy $[A]_r$ to dokładnie $2^{\mathfrak{c}}$.

609c: Zbiór klas abstrakcji jest mocy co najmniej continuum, bo mamy funkcję $h : [0,1] \xrightarrow{1-1} \mathsf{P}([0,1])/_r$ określoną wzorem $h(x) = \{\{x\}\}$. Zbiór ten jest też mocy co najwyżej continuum, bo mamy funkcję



Rysunek 7: Zadania 608f i 618b.

$g : \mathsf{P}([0,1])/_r \xrightarrow{1-1} [0,1] \times [0,1]$ daną przez $g([A]_r) = \langle \inf A, \sup A \rangle$. Z twierdzenia Cantora-Bernsteina wynika, że moc zbioru ilorazowego relacji r to dokładnie liczba $\mathfrak{C}$.

610a: Niech dla $n \in \mathbb{N}$ funkcja $f_n : \mathbb{N} \to 2$ będzie funkcją charakterystyczną zbioru $\{n\}$, tzn. niech $f_n(k) = 1$, gdy $k = n$, a $f_n(k) = 0$, gdy $k \neq n$. Niech $F = \{f_n \mid n \in \mathbb{N}, n > 0\}$. Wtedy F rozróżnia elementy zbioru $\mathbb{N}$. Weźmy bowiem dowolne dwie różne liczby naturalne i oznaczmy większą przez x, a mniejszą przez y (zatem $x > 0$). Wtedy $f_x(x) = 1$, zaś $f_x(y) = 0$, a zarazem $f_x \in F$. Zbiór F jest także minimalnym zbiorem rozróżniającym $\mathbb{N}$. Weźmy bowiem dowolny jego podzbiór F_0 rozróżniający $\mathbb{N}$ oraz dowolne naturalne $n > 0$. Wiemy, że istnieje takie naturalne $x > 0$, że $f_x \in F_0$ oraz $f_x(0) \neq f_x(n)$. Ponieważ $f_x(0) = 0$, więc $f_x(n) = 1$, a zatem $x = n$. Dowodzi to, że dla każdego naturalnego $n > 0$ mamy $f_n \in F_0$. A zatem $F_0 = F$.

610b: Niech $F = \{f : \mathbb{N} \to 2 \mid f(0) = f(1)\}$. Zbiór F nie rozróżnia zbioru $\mathbb{N}$, ponieważ dla każdego $f \in F$ zachodzi $f(0) = f(1)$. Niech F' będzie dowolnym nadzbiorem F nie rozróżniającym $\mathbb{N}$ i niech g będzie dowolnym jego elementem. Istnieją różne liczby naturalne x, y takie, że dla każdego $f \in F'$ zachodzi $f(x) = f(y)$, gdyż w przeciwnym razie F' rozróżniałby $\mathbb{N}$. Jeżeli $x > 1$, to $f_x \in F$ oraz $f_x(x) = 1$ jest różne od $f_x(y) = 0$. Podobnie jeśli $y > 1$. A zatem $x = 1$ i $y = 0$ lub $x = 0$ i $y = 1$. Skoro $g \in F'$, to $g(x) = g(y)$, a więc $g(0) = g(1)$. Zatem $g \in F$. Dowodzi to, że $F' = F$.

610c: Zbiór F z części 610a rozróżnia elementy zbioru $\mathbb{N}$ i jest mocy $\aleph_0$. Ponieważ dla dowolnej mocy nieskończonej $\mathfrak{m}$ zachodzi $\mathfrak{m} + \aleph_0 = \mathfrak{m}$, więc moc zbioru $2^{\mathbb{N}} - F$ jest równa continuum. Ponieważ każdy zbiór postaci $F \cup G$, gdzie $G \subseteq 2^{\mathbb{N}} - F$, rozróżnia elementy zbioru $\mathbb{N}$, więc rodzina tych podzbiorów zbioru $2^{\mathbb{N}}$, które rozróżniają całe $\mathbb{N}$ jest mocy co najmniej $2^{\mathfrak{C}}$. Ta rodzina jest więc dokładnie mocy $2^{\mathfrak{C}}$, bo jest zawarta w zbiorze $\mathsf{P}(2^{\mathbb{N}})$, który też jest mocy $2^{\mathfrak{C}}$.

610d: Rozważamy uporządkowany przez inkluzję zbiór Z wszystkich tych $A \subseteq X$, których elementy rozróżnia zbiór F. Zauważmy, że nasz zbiór spełnia założenia lematu Kuratowskiego-Zorna, tj. suma dowolnego łańcucha zbiorów należących do Z sama należy też do Z. (Istotnie, jeśli x, y są elementami sumy łańcucha L to $x \in A$, $y \in B$, dla pewnych $A, B \in L$. Jeden ze zbiorów A, B zawiera drugi, a zatem oba elementy x, y do niego należą, istnieje więc pożądana funkcja.) Istnienie elementu maksymalnego rodziny Z wynika więc z lematu Kuratowskiego-Zorna.

611: Niech $F : A \xrightarrow{\text{na}} 2^A$, i niech
$$f(a) = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } F(a)(a) = 0; \\ 0, & \text{jeśli } F(a)(a) = 1. \end{cases}$$
Skoro F jest surjekcją więc $f = F(b)$ dla pewnego b i mamy sprzeczność: $f(b) = 1 \leftrightarrow f(b) = 0$.

612: Zbiór G jest mocy $\aleph_0$. Oczywiście $\overline{\overline{B}} = \aleph_0$, więc $\overline{\overline{G}} \geq \aleph_0$, bo $B \subseteq G$. Pokażemy, że $\overline{\overline{G}} \leq \aleph_0$. Niech H będzie zbiorem tych ciągów z $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, w których występuje tylko skończenie wiele jedynek. Jako przeliczalna suma przeliczalnych zbiorów

$$H_k = \{a \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \geq k.\, a(n) = 0\},$$

zbiór H sam jest zbiorem przeliczalnym. Ponadto $G \subseteq H$. Istotnie, każda wesoła transformacja zmienia ciąg w co najwyżej dwóch miejscach, aby więc w skończonej liczbie kroków otrzymać element zbioru B, trzeba zacząć od ciągu, który od pewnego miejsca ma same zera.

613a: Niech $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Jeśli zbiór $\mathrm{Rg}(f)$ ma największy element, to oznaczymy go przez $\max(f)$. W przeciwnym razie przyjmijmy, że $\max(f) = \infty$, gdzie $\infty \notin \mathbb{N}$. Zdefiniowaliśmy więc funkcję $\max : (\mathbb{N} \to \mathbb{N}) \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Oczywiście $f \sim g$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $\max(f) = \max(g)$. A zatem relacja $\sim$ jest jądrem przekształcenia max, i jako taka jest relacją równoważności.

613b: Funkcja $\mathrm{Max} : (\mathbb{N} \to \mathbb{N})/_\sim \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ określona wzorem $\mathrm{Max}([f]_\sim) = \max(f)$ jest bijekcją. Istotnie, dla $f \not\sim g$ mamy $\max(f) \neq \max(g)$, więc Max jest różnowartościowa. Ponadto, dla każdego $x \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ istnieje taka funkcja f_x, że $\max(f_x) = x$. Wystarczy przyjąć $f_\infty = \lambda n.\, n$ oraz $f_x = \lambda n.\, x$ dla $x \in \mathbb{N}$. Zatem Max jest także „na". A więc moc $(\mathbb{N} \to \mathbb{N})/_\sim$ jest taka jak moc $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$, czyli $\aleph_0$.

613c: Są to liczby 1 i $\mathfrak{C}$. Klasa $[\lambda n.\, 0]_\sim$ jest jednoelementowa, przypuśćmy więc, że funkcja f nie jest stale równa zeru. Dla $\alpha \in \mathbb{N} \to \{0,1\}$, rozpatrzmy taką funkcję $F(\alpha) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, że

$$F(\alpha)(x) = \begin{cases} \alpha(x/2), & \text{jeśli } x \text{ parzyste;} \\ f((x-1)/2), & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

dla dowolnego $x \in \mathbb{N}$. Nieformalnie, w ciągu $F(\alpha)$ na przemian występują wyrazy ciągu α (na miejscach parzystych) i ciągu f (na miejscach nieparzystych). Ponieważ do $\mathrm{Rg}(f)$ należy choć jedna liczba różna od zera, więc mamy $\max F(\alpha) = \max f$, czyli $F(\alpha) \in [f]_\sim$. Operacja $F : (\mathbb{N} \to \{0,1\}) \to [f]_\sim$ jest różnowartościowa, bo dla $\alpha(k) \neq \beta(k)$ mamy $F(\alpha)(2k) \neq F(\beta)(2k)$. Stąd moc zbioru $[f]_\sim$ jest co najmniej $\mathfrak{C}$. Ale $[f]_\sim \subseteq \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, a mocą zbioru $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ też jest $\mathfrak{C}$, więc z twierdzenia Cantora-Bernsteina ostatecznie wnioskujemy, że $\overline{\overline{[f]_\sim}} = \mathfrak{C}$.

613d: Tak, selektor ilorazu :)

614a: Elementem największym jest klasa wszystkich funkcji nieograniczonych, najmniejszym jest klasa funkcji stale równej zeru.

614b,614c,614d: Funkcja Max z rozwiązania 613b jest izomorfizmem porządków $\langle \mathbb{N} \to \mathbb{N}/_\sim, \preceq \rangle$ i $\langle \mathbb{N} \cup \{\infty\}, \leq \rangle$, gdzie $n \leq \infty$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$, a dla liczb naturalnych relacja $\leq$ jest określona jak zwykle. Zatem wszystkie własności porządku $\langle \mathbb{N} \to \mathbb{N}/_\sim, \preceq \rangle$ są takie same jak własności porządku $\langle \mathbb{N} \cup \{\infty\}, \leq \rangle$. W szczególności nasz porządek jest dobry (jest liniowy i jest dobrym ufundowaniem). Skoro każdy niepusty podzbiór ma element najmniejszy, to ten element jest jego kresem dolnym. Zbiór pusty też ma kres dolny. Jest nim ∞. Mamy więc kratę zupełną, w której są też wszystkie kresy górne.

615b: Iloraz $(\mathbb{N} \to \mathbb{N})/_\sim$ jest mocy $\aleph_0$, a to z następujących powodów: Po pierwsze, wzystkie funkcje nieograniczone są w tej samej klasie. Po drugie, niech f będzie ograniczona i niech M_f będzie największe w $\mathrm{Rg}(f)$. Natomiast m_f niech będzie największą wartością w $\mathrm{Rg}(f)$, przyjmowaną dla nieskończenie wielu argumentów. Jeśli $M_f \neq m_f$, to niech $f'(M_f)$ będzie największą taką liczbą x, że $f(x) = M_f$ (ostatni argument, dla którego f przyjmuje swoją największą wartość). Dalej, dla $y \in \{m_f + 1, \ldots, M_f - 1\}$ niech $f'(y)$ będzie największą taką liczbą, że $f(f'(y)) \geq y$ oraz $f'(y) \geq f'(y+1)$. *Indeksem* funkcji f nazwiemy skończony ciąg $\langle m_f, f'(m_f+1), \ldots, f'(M_f) \rangle$. Dwie funkcje o takim samym indeksie muszą być w relacji.

615c: Wszystkie skończone (oprócz zera) i $\mathfrak{C}$. Jeśli funkcja f nie jest prawie wszędzie równa zeru, to niech k będzie największą wartością przyjmowaną nieskończenie wiele razy. Wtedy wszystkie funkcje $\lambda x.\, \mathsf{if}\ x$ nieparzyste $\mathsf{then}\ k\ \mathsf{else}\ \alpha(x/2)$, gdzie $\alpha \in 2^{\mathbb{N}}$, należą do klasy wyznaczonej przez f. Jeśli $f(n) = 0$ prawie wszędzie, to z poprzedniej części zadania wynika, że klasa jest skończona. Klasę o dokładnie $n+1$ elementach wyznacza funkcja $f(0) = 0$, $f(1) = n$, $f(x) = 0$ dla $x > 1$.

617: Relacja r_1 nie jest przechodnia, a więc nie jest relacją równoważności. Istotnie, niech $f(n) = n$, $g(n) = n+1$ oraz $h(n) = \lceil \frac{n+1}{2} \rceil$, dla $n \in \mathbb{N}$. Wtedy $\langle f, g \rangle \in r_1$ (bo $f^{-1}(\{1\})$ i $g^{-1}(\{1\})$ są jednoelementowe) oraz $\langle g, h \rangle \in r_1$ (bo $g^{-1}(\{0\}) = h^{-1}(\{0\}) = \varnothing$). Ale $\langle f, h \rangle \notin r_1$, bo przeciwobrazy jednoelementowych zbiorów przy funkcji f są zawsze jednoelementowe, a przy funkcji h są (z wyjątkiem $h^{-1}(\{0\})$) dwuelementowe.

Relacje r_2 i r_3 są przechodnie, a więc są relacjami równoważności, bo wiadomo, że są zwrotne i symetryczne. Aby sprawdzić przechodniość relacji r_2, załóżmy, że $\langle f, g \rangle, \langle g, h \rangle \in r_2$. Istnieją wtedy takie $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, że $f^{-1}(\{n\}) \sim g^{-1}(\{n\})$ dla wszystkich $n > n_1$ oraz $g^{-1}(\{n\}) \sim h^{-1}(\{n\})$ dla wszystkich $n > n_2$. Dla $n > \max\{n_1, n_2\}$ mamy więc też $f^{-1}(\{n\}) \sim h^{-1}(\{n\})$, czyli $\langle f, g\rangle \in r_2$. Podobnie (ale łatwiej) otrzymamy przechodniość dla r_3.

Funkcje stałe wyznaczają jednoelementowe klasy abstrakcji relacji r_3 i są to jedyne skończone klasy. Przypuśćmy bowiem, że funkcja f nie jest stała. Istnieją wtedy takie $n, a \in \mathbb{N}$, że $f(n) = a$ oraz zbiór $B = \{m \mid f(m) \neq a\}$ jest nieskończony. Dla dowolnego $m \in B$ weźmy taką funkcję g_m, że $g_m(m) = a$, $g_m(n) = f(m)$ oraz $g_m(x) = f(x)$ dla $x \neq m, n$. Wszystkie funkcje g_m dla $m \in B$ są w klasie $[f]_{r_3}$.

Relacja r_2 nie ma skończonych klas abstrakcji. Jeśli f nie jest stała, to $[f]_{r_3} \subseteq [f]_{r_2}$, bo $r_3 \subseteq r_2$. Skoro klasa $[f]_{r_3}$ jest nieskończona, to tym bardziej klasa $[f]_{r_2}$ jest nieskończona. Zostają więc funkcje stałe. Ale wszystkie funkcje stałe należą do tej samej klasy $[\lambda x.0]_{r_2}$.

618a: Stosujemy lemat Kuratowskiego-Zorna do (uporządkowanej przez inkluzję) rodziny P wszystkich parterowych podzbiorów częściowo uporządkowanego zbioru A. Rozpatrzmy dowolny łańcuch G w $\langle P, \subseteq\rangle$. Jego suma $\bigcup G$ jest parterowym podzbiorem zbioru A. Istotnie, jeśli $L \subseteq \bigcup G$ jest łańcuchem w A i ma trzy różne elementy x, y, z, to każdy z tych elementów należy do pewnego zbioru z łańcucha G, na przykład $x \in X$, $y \in Y$, $z \in Z$, gdzie $X, Y, Z \in G$. Jeden ze zbiorów X, Y, Z zawiera pozostałe, niech to będzie na przykład X. Wtedy $x, y, z \in X \in P$ i mamy sprzeczność, bo X jest parterowy.

A zatem $\bigcup G \in P$. Skoro każdy $X \in G$ jest zawarty w $\bigcup G$, więc $\bigcup G$ jest ograniczeniem górnym łańcucha G w $\langle P, \subseteq\rangle$.

Z powyższego wynika, że rodzina $\langle P, \subseteq\rangle$ spełnia założenie lematu Kuratowskiego-Zorna (każdy łańcuch ma ograniczenie górne), a więc istnieje element maksymalny, tj. maksymalny zbiór parterowy.

618b: Każdy antyłańcuch jest parterowy i każdy podzbiór zbioru parterowego jest parterowy. Wystarczy więc wskazać w $\mathsf{P}(\mathbb{N})$ antyłańcuch mocy $\mathfrak{C}$ aby wywnioskować, że rodzina parterowych podzbiorów $\mathsf{P}(\mathbb{N})$ jest mocy $2^{\mathfrak{C}}$. Taki antyłańcuch wyznaczają nieskończone gałęzie drzewa na rysunku 7.

619a: Funkcja nie jest różnowartościowa, bo podziały $P_1 = \{\{0, 2\}, \mathbb{N} - \{0, 2\}\}$ i $P_1 = \{\{0\}, \mathbb{N} - \{0\}\}$ wyznaczają tę samą wartość funkcji: $f(P_1) = f(P_2) = \{0, 1\}$. Nie jest też „na" bo zero jest najmniejszym elementem swojej klasy podziału, a więc zawsze $0 \in f(P)$. Niemożliwe jest więc np. $f(P) = \{1\}$.

619b: Zauważmy najpierw, że $\mathrm{Rg}(f) = \{X \mid 0 \in X\}$. Istotnie, jeśli $0 \in X$, to można określić podział $P = \{p_i \mid i \in X\}$, gdzie $p_i = \{a \in \mathbb{N} \mid (i \leq a) \wedge (\forall j \in X(i < j \to a < j))\}$. Wtedy $f(P) = X$. Moc zbioru $\mathrm{Rg}(f)$ jest więc równa mocy zbioru $\mathsf{P}(\mathbb{N} - \{0\})$, czyli continuum. Oczywiście zbiory $\mathcal{P}/_{\ker(f)}$ i $\mathrm{Rg}(f)$ są równoliczne – klasy abstrakcji odpowiadają możliwym wartościom funkcji.

619c: Są to wszystkie liczby naturalne większe od zera i continuum. Klasa skończona o n elementach to przeciwobraz $f^{-1}(\{m \mid m \neq n\})$. Istotnie, jeśli P należy do tego przeciwobrazu, to P składa się prawie wyłącznie z singletonów, a jedynym wyjątkiem jest para $\{i, n\}$ dla pewnego $i < n$. Takie i można wybrać na n sposobów, mamy więc klasę n-elementową.

Zauważmy od razu, że jeśli dopełnienie zbioru X jest skończone, to przeciwobraz $f^{-1}(X)$ jest klasą skończoną. Jeśli bowiem $-X \subseteq \{0, \ldots, k\}$, to do podziału należą singletony liczb większych od k, a skończony zbiór $-X$ można podzielić tylko na skończenie wiele sposobów.

Jeśli $f(P) = \{0\}$ to $P = \{\mathbb{N}\}$, rozpatrzmy więc przypadek, gdy X ma co najmniej jeden niezerowy element a, oraz $-X$ jest zbiorem nieskończonym. Wtedy klasa $f^{-1}(X)$ ma moc continuum, bo dla każdego podzbioru $Y \subseteq -X \cap (\mathbb{N} - \{0, \ldots, a\})$ możemy wyznaczyć podział P_Y, którego składowymi są zbiory $\{a\} \cup Y$ oraz $\{0\} \cup (-X \cap -Y)$ a także singletony $\{i\}$, dla wszystkich $i \in X$ oprócz 0 i a. Podziały P_Y są różne dla różnych Y, ale zawsze $f(P_Y) = X$. A więc moc naszej klasy jest co najmniej taka jak moc zbioru $\mathsf{P}(-X \cap (\mathbb{N} - \{0, \ldots, a\}))$. Z drugiej strony, moc ta jest co najwyżej taka, jak moc zbioru wszystkich relacji równoważności w $\mathbb{N}$.

620a: Funkcja Φ nie jest różnowartościowa, np. $\Phi(\{\varepsilon\}) = \varepsilon = \Phi(\varnothing)$. Ale Φ jest „na", bo dla dowolnego $w \in \{0, 1\}^*$ mamy $\Phi(\{w\}) = w$.

620b: Z powyższego wynika, że zbiór klas abstrakcji relacji $\ker(\Phi)$ ma moc $\aleph_0$. Mocą każdej klasy jest $\mathfrak{C}$. Istotnie, niech $[B]_{\ker(\Phi)}$ będzie dowolną klasą abstrakcji i niech $w = \Phi(B)$. Określimy funkcję różnowartościową $W_w : \mathsf{P}(\{0, 1\}^*) \to \mathsf{P}(\{0, 1\}^*)$ w taki sposób, by $\Phi(W_w(A)) = w$, dla każdego A.

$$W_w(A) = \{w\} \cup \{w0v \mid v \in A\}.$$

Zatem każdy ze zbiorów $W_w(A)$ jest w relacji z B, więc $\overline{\overline{[B]_{\ker(\Phi)}}} \geq \mathfrak{C}$. Ograniczenie górne wynika z tego, że $\overline{\overline{\mathsf{P}(\{0,1\}^*)}} = \mathfrak{C}$.

620c: Nie. Zauważmy najpierw, że jeśli A ma element najmniejszy, to jest on jego kresem dolnym. Zatem A nie ma elementu najmniejszego. Niech $w = \inf(A)$. Ponieważ $w \notin A$, więc $w0$ będzie większym od w ograniczeniem dolnym A, co jest w sprzeczności z definicją kresu dolnego. Istotnie, dla dowolnego $v \in A$, skoro $w \preceq v$, to albo v różni się od w na pozycji mniejszej bądź równej $|w|$ albo w jest właściwym prefiksem v. W obu przypadkach $w0 \preceq v$.

620d: Mocą tego zbioru jest $\aleph_0$. Wystarczy pokazać, że jest on nieskończony, bo wszystkich słów jest przeliczalnie wiele. Ponieważ $0^n \preceq 11111011010$, dla każdego n, więc każdy ze zbiorów postaci $Z_n = \{0^n, 11111011010\}$ jest ograniczony przez 11111011010 i ponadto $\Phi(Z_n) = 0^n$, zatem obraz ten istotnie jest nieskończony.

621a: Zwrotność relacji $F(A)$ jest oczywista. Aby udowodnić przechodniość, weźmy dowolne funkcje $f, g, h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, takie że $\langle f, g\rangle \in F(A)$ oraz $\langle g, h\rangle \in F(A)$. Wtedy dla $a \in \mathcal{A}$ mamy $f(a) \leq g(a) \leq h(a)$, natomiast dla $a \notin A$ mamy $h(a) \leq g(a) \leq f(a)$, czyli $\langle f, h\rangle \in F(A)$. Antysymetria wynika z tego, że $\langle f, g\rangle \in F(A)$ oraz $\langle g, f\rangle \in F(A)$ implikuje $f(a) = g(a)$ zarówno dla $a \in A$, jak $a \notin A$. A więc $f = g$.

621b: Szukamy zbioru $F^{-1}(L) = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid F(A) \in L\}$, czyli pytamy dla jakich $A \subseteq \mathbb{N}$ relacja $F(A)$ jest liniowym porządkiem. Otóż nigdy tak nie jest, bo jeden ze zbiorów A i $-A$ ma co najmniej dwa różne elementy a, b. Wtedy funkcje $f = \lambda x.\, \mathsf{if}\ x = a\ \mathsf{then}\ 0\ \mathsf{else}\ 1$ oraz $g = \lambda x.\, \mathsf{if}\ x = b\ \mathsf{then}\ 0\ \mathsf{else}\ 1$ są nieporównywalne. A więc $F^{-1}(L) = \varnothing$.

621c: Tym razem pytamy które $F(A)$ mają element minimalny. Jeśli $A = \mathbb{N}$ to elementem minimalnym ze względu na relację $F(A)$ jest funkcja $\lambda x.\, 0$. W przeciwnym razie element minimalny nie istnieje. Istotnie, jeśli $a \notin A$, to dla dowolnej funkcji f zachodzi $\langle f', f\rangle \in F(A)$, gdzie f' jest określona tak: $f' = \lambda x.\, \mathsf{if}\ x = a\ \mathsf{then}\ f(a) + 1\ \mathsf{else}\ f(a)$. A zatem $F^{-1}(M) = \{\mathbb{N}\}$.

621d: Pokażemy, że $F(A)$ nigdy nie jest dobrym ufundowaniem (skąd $F^{-1}(D) = \varnothing$) bo zawsze istnieje ciąg malejący ze względu na $F(A)$. Istotnie, jeśli $a \notin A$, to ciąg malejący tworzą funkcje $f_n = \lambda x.\, \mathsf{if}\ x = a\ \mathsf{then}\ n\ \mathsf{else}\ 0$. Pozostaje przypadek $A = \mathbb{N}$. Wtedy ciąg malejący tworzą funkcje $g_n = \lambda x.\, \mathsf{if}\ x \leq n\ \mathsf{then}\ 0\ \mathsf{else}\ 1$.

622a: Nie. Na przykład $\varnothing \neq G(f)$ dla każdej funkcji f. Gdyby bowiem $G(f) = \varnothing$, to dla wszystkich liczb $n \in \mathbb{N}$ mielibyśmy $f(n) > f(n + 1)$, czyli istniałby nieskończony ciąg malejący w $\mathbb{N}$.

622b: Nie. Na przykład jeśli $f = \lambda x.\, x$ i $g = \lambda x.\, x + 1$, to $G(f) = G(g) = \mathbb{N}$.

622c: Zbiór ilorazowy jądra jest zawsze równoliczny ze zbiorem wartości funkcji, wystarczy więc zbadać moc $\mathrm{Rg}(G)$. Ponieważ $\mathrm{Rg}(G) \subseteq \mathsf{P}(\mathbb{N})$, więc $\overline{\overline{\mathrm{Rg}(G)}} \leq \mathfrak{C}$. Z drugiej strony, jeśli A jest dowolnym podzbiorem zbioru liczb parzystych $\mathcal{P}\mathrm{r}$, to dla funkcji $f = \ \lambda x.\, \mathsf{if}\ (x > 0 \wedge x - 1 \in A)\ \mathsf{then}\ 0\ \mathsf{else}\ 1$ zachodzi $\mathbb{N} - A = G(f)$. Zatem $\overline{\overline{\mathrm{Rg}(G)}} \geq \overline{\overline{\mathsf{P}(\mathcal{P}\mathrm{r})}} = \mathfrak{C}$ i w końcu $\overline{\overline{\mathrm{Rg}(G)}} = \mathfrak{C}$.

622d: Niech $G(f) = A$. Dla dowolnego $\alpha : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ niech $\overline{\alpha}(n)$ oznacza sumę $\alpha(0) + \cdots + \alpha(n)$. Ciąg $\overline{\alpha} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jest niemalejący i dla $\alpha \neq \beta$ mamy $\overline{\alpha} \neq \overline{\beta}$. Teraz niech $f_\alpha(n) = 2f(n) + \overline{\alpha}(n)$. Zauważmy, że $G(f_\alpha) = A$, czyli $\langle f_\alpha, f\rangle \in \ker(G)$. Istotnie, jeśli $f(n) \leq f(n + 1)$, to

$$f_\alpha(n) = 2f(n) + \overline{\alpha}(n) \leq 2f(n + 1) + \overline{\alpha}(n + 1) = f_\alpha(n + 1).$$

Natomiast jeśli $f(n) > f(n+1)$, to $f(n) - f(n+1) \geq 1$ i $\overline{\alpha}(n) - \overline{\alpha}(n+1) \geq -1$, więc $f_\alpha(n) - f_\alpha(n+1) \geq 1$, czyli $f_\alpha(n) > f_\alpha(n+1)$. Udowodniliśmy, że $f_\alpha \in [f]_{\ker(G)}$. Ale jeśli $\alpha \neq \beta$ to także $f_\alpha \neq f_\beta$, co oznacza, że moc klasy $[f]_{\ker(G)}$ jest co najmniej równa mocy zbioru $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, czyli $\mathfrak{C}$. Ponieważ $[f]_{\ker(G)} \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, więc moc naszej klasy jest równa $\mathfrak{C}$.

623a: Niech $\mathcal{G}$ oznacza zbiór wszystkich funkcji o własności (a). Zauważmy, że jeśli $f \in \mathcal{G}$ to dla dowolnego A zachodzi równość $f(A) = \bigcup\{f(\{x\}) \mid x \in A\}$. Zatem każda funkcja z $\mathcal{G}$ jest jednoznacznie wyznaczona przez swoje obcięcie do argumentów jednoelementowych. Jeśli więc $\mathsf{P}_1(\mathbb{N}) = \{\{x\} \mid x \in \mathbb{N}\}$, to mamy injekcję $\vartheta : \mathcal{G} \xrightarrow{1-1} (\mathsf{P}_1(\mathbb{N}) \to \mathsf{P}(\mathbb{N}))$ daną przez $\vartheta(f) = f|_{\mathsf{P}_1(\mathbb{N})}$. Zbiór $\mathsf{P}_1(\mathbb{N}) \to \mathsf{P}(\mathbb{N})$ jest oczywiście tej samej mocy co zbiór $\mathbb{N} \to \mathsf{P}(\mathbb{N})$, czyli mocy $\mathfrak{C}^{\aleph_0} = \mathfrak{C}$. Zatem $\overline{\overline{\mathcal{G}}} \leq \mathfrak{C}$. Z drugiej strony mamy też injekcję $\varpi : (\mathbb{N} \to \mathbb{N}) \xrightarrow{1-1} \mathcal{G}$ daną wzorem $\varpi(\alpha) = \lambda X.\, \bigcup\{\{\alpha(n)\} \mid n \in X\}$, a więc $\overline{\overline{\mathcal{G}}} \geq \overline{\overline{\mathbb{N} \to \mathbb{N}}} = \mathfrak{C}$. W konsekwencji, $\overline{\overline{\mathcal{G}}} = \mathfrak{C}$.

623b: Niech R będzie taką rodziną nieskończonych podzbiorów $\mathbb{N}$, w której każde dwa różne zbiory mają skończone przecięcie i która jest mocy $\mathfrak{C}$. (To, że taka rodzina istnieje, wynika z rozwiązania zadania 608f.) Dla dowolnego $Z \subseteq R$ określimy funkcję

$$f_Z = \lambda A.\,\mathsf{if}\ (\exists D \in Z.\,\overline{\overline{D \cap A}} = \aleph_0)\ \mathsf{then}\ \{0\}\ \mathsf{else}\ \varnothing.$$

Zauważmy, że jeśli $f_Z(A \cup B) = \{0\}$ to zbiór $D \cap (A \cup B) = (D \cap A) \cup (D \cap B)$ jest nieskończony. Ale wtedy jeden ze składników $D \cap A$ i $D \cap B$ musi być nieskończony, więc $f_Z(A) = \{0\}$ lub $f_Z(B) = \{0\}$. Stąd łatwo wynika, że funkcje postaci f_Z spełniają warunek (b). Dalej, jeśli $Z \neq Y$, np. $D \in Z - Y$, to $f_Z(D) = \{0\}$ ale $f_Y(D) = \varnothing$, skąd $f_Z \neq f_Y$. Zatem funkcji o własności (b) jest co najmniej tyle ile podzbiorów R, czyli $2^{\mathfrak{C}}$. Ponieważ wszystkich funkcji z $\mathsf{P}(\mathbb{N})$ do $\mathsf{P}(\mathbb{N})$ też jest $2^{\mathfrak{C}}$, więc taka jest szukana moc.

624a: Nie, bo dla dla $r_1 = \{\langle 1,1\rangle\}$ i $r_2 = \{\langle 2,2\rangle\}$ mamy $\varphi(r_1) = \varphi(r_2) = \mathbf{1}_{\mathbb{N}}$.

624b: Nie, bo nie każda relacja w $\mathbb{N}$ jest relacją równoważności. W szczególności dla $q = \{\langle 1,2\rangle\}$ nie istnieje takie r, że $\varphi(r) = q$.

624c: Rozważmy dowolne $a, b > 1$. Wtedy $a \cdot b$ dzieli się przez a i przez b a więc liczby a, b i $a \cdot b$ będą w tej samej klasie abstrakcji relacji $\varphi(d)$. To oznacza, że wszystkie liczby większe od 1 są we wspólnej klasie abstrakcji. Do tej klasy należy też zero, bo $0 = a * 0$ dla każdego $a \in \mathbb{N}$. W drugiej, osobnej, klasie abstrakcji znajduje się tylko 1.

624d: Pokażemy, że moc $\varphi^{-1}(\{p\})$ jest większa lub równa continuum. Ponieważ $\varphi^{-1}(p) \subseteq \mathsf{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ oraz moc $\mathsf{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ jest równa $\mathfrak{C}$, będzie to oznaczało, że moc $\varphi^{-1}(\{p\})$ jest równa $\mathfrak{C}$.

Po pierwsze zauważmy, że dla dowolnej relacji $q \in \varphi^{-1}(\{p\})$ zachodzi $q \subseteq p$. To oznacza, że do q mogą należeć tylko pary postaci $\langle 2k, 2k+1\rangle$, $\langle 2k+1, 2k\rangle$, $\langle 2k, 2k\rangle$ i $\langle 2k+1, 2k+1\rangle$. Co więcej, jeśli ani $\langle 2k, 2k+1\rangle$ ani $\langle 2k+1, 2k\rangle$ nie należy do q, to liczby $2k$ i $2k+1$ są w różnych klasach abstrakcji relacji $\varphi(q)$. A więc do każdej relacji w $\varphi^{-1}(\{p\})$ należy co najmniej jedna para postaci $\langle 2k, 2k+1\rangle$ lub $\langle 2k+1, 2k\rangle$ dla każdego k. Rozpatrzmy następującą funkcję $f : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \varphi^{-1}(\{p\})$:

$$f(c) = \{\langle 2k, 2k+1\rangle \mid c(k) = 0\} \cup \{\langle 2k+1, 2k\rangle \mid c(k) = 1\}.$$

Oczywiście $\varphi(f(c)) = p$ dla każdego $c \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, czyli f jest dobrze określona. Funkcja f jest różnowartościowa, bo jeśli dwa ciągi c_1 i c_2 różnią się dla $n \in \mathbb{N}$, to jedna z relacji $f(c_1)$ i $f(c_2)$ będzie zawierać parę $\langle 2n, 2n+1\rangle$, a druga $\langle 2n+1, 2n\rangle$. A więc moc $\varphi^{-1}(\{p\})$ jest co najmniej taka jak moc $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, czyli $\mathfrak{C}$.

625: Aby dowieść, że s jest relacją równoważności, pokazujemy, że s jest:

- zwrotna, bo dla każdego koła $K(p,r)$ zachodzi $r - r = 0 \in \mathbb{Z}$;
- symetryczna, bo jeśli $K(p_1,r_1)\ s\ K(p_2,r_2)$, skąd wynika, że $r_1 - r_2 \in \mathbb{Z}$, to również $r_2 - r_1 \in \mathbb{Z}$, a zatem $K(p_2,r_2)\ s\ K(p_1,r_1)$;
- przechodnia, bo jeśli $K(p_1,r_1)\ s\ K(p_2,r_2)$ i $K(p_2,r_2)\ s\ K(p_3,r_3)$, skąd wynika, że $r_1 - r_2 \in \mathbb{Z}$ i $r_2 - r_3 \in \mathbb{Z}$, to również $r_1 - r_3 = (r_1 - r_2) + (r_2 - r_3) \in \mathbb{Z}$, a zatem $K(p_1,r_1)\ s\ K(p_3,r_3)$.

Moc zbioru ilorazowego relacji s jest oczywiście co najwyżej taka, jak moc zbioru $\mathcal{K}$ wszystkich kół, czyli $\mathfrak{C}$. Moc ta jest też co najmniej $\mathfrak{C}$, bo funkcja $G : (0,1) \to \mathcal{K}/_s$, dana wzorem $G(r) = [K(\langle 0,0\rangle, r)]_s$, jest różnowartościowa.[28] Istotnie, różnica dwóch różnych liczb $r, r' \in (0,1)$ nie jest całkowita, więc $G(r) \neq G(r')$. Stąd $\mathfrak{C} = \overline{\overline{(0,1)}} \leq \overline{\overline{\mathcal{K}/_s}}$. Z twierdzenia Cantora-Bernsteina wnioskujemy, że $\overline{\overline{\mathcal{K}/_s}} = \mathfrak{C}$.

Klasa abstrakcji koła $K(\langle 0,0\rangle, 1)$ ma również moc $\mathfrak{C}$. Oczywiście $\overline{\overline{[K(\langle 0,0\rangle,1)]_s}} \leq \overline{\overline{\mathcal{K}}} = \mathfrak{C}$. Z drugiej strony, mamy funkcję różnowartościową $F : \mathbb{R} \xrightarrow{1-1} [K(\langle 0,0\rangle,1)]_s$ określoną wzorem $F(x) = K(\langle 0,x\rangle, 1)$, co oznacza, że $\mathfrak{C} = \overline{\overline{\mathbb{R}}} \leq \overline{\overline{[K(\langle 0,0\rangle,1)]_s}}$.

626a: Nie, bo np. $r_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} = \mathbf{1}_{\mathbb{N}\to\mathbb{N}} = r_Z$, gdzie $Z = \mathbb{N} \times \mathbb{N} - \{\langle 0,0\rangle\}$. Istotnie, jeśli $\langle f,g\rangle \in r_Z$, oraz $x \neq 0$ lub $f(x) \neq 0$, to na pewno $f(x) = g(x)$. Jeśli zaś $x = 0$ i $f(0) = 0$, to także $g(0) = 0$, bo inaczej punkt $\langle 0, g(0)\rangle$ należy do Z, więc $f(0) = g(0)$ i mamy sprzeczność.

626b: Nie. Jako kontrprzykład rozpatrzmy taką relację r, że frg zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy obie funkcje f i g są stałe lub żadna nie jest stała. Jeśli $r = r_Z$, to zbiór Z musi być pusty, bo dla

[28] Inaczej mówiąc, rodzina kół $\{K(\langle 0,0\rangle, r) \mid r \in (0,1)\}$ jest mocy continuum, a każdy jej element wyznacza inną klasę abstrakcji.

$\langle a, b\rangle \in Z$ zachodzi $\langle \lambda n.\, b, \lambda n.\, b+1\rangle \in r - r_Z$. Ale relacja $r_\varnothing$ ma tylko jedną klasę abstrakcji — sprzeczność.

626c: Jeśli $Z = \{\langle 0,0\rangle, \langle 0,1\rangle, \langle 0,2\rangle, \langle 0,3\rangle\}$, to relacja r_Z ma 5 klas abstrakcji: są one wyznaczone przez funkcje stale równe 0, 1, 2, 3 i 4. Mamy bowiem $[\lambda n.\, i] = \{f \mid f(0) = i\}$, dla $i \leq 3$, oraz $[\lambda n.\, 4] = \{f \mid f(0) \geq 4\}$.

626d: Rozwiązanie części 626c łatwo jest uogólnić tak: jeśli $Z^k_n = \{\langle k, i\rangle \mid i < n\}$, to $Z^k_n \in \mathcal{K}$. A więc $\bigcap \mathcal{K} \subseteq \bigcap\{Z^k_n \mid k, n \in \mathbb{N}\} = \varnothing$ oraz $\bigcup \mathcal{K} \supseteq \bigcup\{Z^k_n \mid k, n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

627: Zbiór $f(\{1,2\}) = \{f(1), f(2)\}$ ma zawsze co najmniej jeden i co najwyżej dwa elementy. Dlatego odpowiedź w punktach 627a i 627b jest zero. Zbiór w punkcie 627d to zbiór tych funkcji, których obcięcie do $\mathbb{N} - \{1,2\}$ jest stale równe zero. Jest to zbiór mocy $\aleph_0$, bo prosta bijekcja $\lambda f.\langle f(1), f(2)\rangle$ ustala jego równoliczność z $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Zbiory w 627c i 627e są równoliczne z $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, a zatem mają moc continuum. Aby to udowodnić, przypomnijmy najpierw, że jeśli $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}} = \aleph_0$, to mocą zbioru $A \to B$ jest $\aleph_0^{\aleph_0}$ czyli continuum. W szczególności zbiory $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ i $\mathbb{N} \to \mathbb{N} - \{1,2\}$ są mocy continuum, a ten drugi to zbiór, o którym mowa w 627e. Ponieważ zbiór w 627c jest oczywiście podzbiorem $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, więc pozostaje wykazać, że jego moc jest *co najmniej* continuum, np. przez wskazanie podzbioru mocy continuum. Takim podzbiorem jest zbiór $\{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid f(1) = 1 \wedge f(2) = 4 \wedge \forall x\, (x \notin \{1,2\} \to f(x) \notin \{1,4\})\}$, równoliczny ze zbiorem wszystkich funkcji z $\mathbb{N} - \{1,2\}$ do $\mathbb{N} - \{1,4\}$.

628a: Relacja $\sim$ jest relacją równoważności, bo jest jądrem przekształcenia $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{N}$, danego wzorem $f(x,y) = \left\lfloor \frac{x}{y} \right\rfloor$. (Notacja $\lfloor a \rfloor$ oznacza tu część całkowitą liczby a.) Istotnie, $\langle x_1, y_1\rangle \sim \langle x_2, y_2\rangle$ równoważne jest równości zbiorów $\{n : \mathbb{N} \mid \frac{x_1}{y_1} < n\} = \{n : \mathbb{N} \mid \frac{x_2}{y_2} < n\}$, która zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $\left\lfloor \frac{x_1}{y_1} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x_2}{y_2} \right\rfloor$.

628b: Zbiór klas abstrakcji jądra funkcji jest równoliczny ze zbiorem wartości tej funkcji. Zdefiniowana wyżej funkcja f jest „na $\mathbb{N}$", ponieważ $f(n + \frac{1}{2}, 1) = n$, dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$. A zatem zbiór klas abstrakcji relacji $\sim$ jest równoliczny z $\mathbb{N}$, czyli mocy $\aleph_0$.

628c: Klasy abstrakcji są podzbiorami $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$, a zatem ich moc jest co najwyżej równa $\mathfrak{C}$. Aby wykazać, że każda klasa abstrakcji ma moc $\mathfrak{C}$, wystarczy dla każdego $n \in \mathbb{N}$ wskazać funkcję różnowartościową $g_n : \mathbb{R}_+ \to [\langle n + \frac{1}{2}, 1\rangle]_\sim$, określoną np. tak: $g_n(x) = \langle (n + \frac{1}{2})x, x\rangle$. Funkcja g_n jest dobrze określona, ponieważ $f((n + \frac{1}{2})x, x) = n$. Różnowartościowość g_n jest oczywista.

629a: Nie. Na przykład $\Phi(\lambda n.3, \lambda n.2) = \varnothing = \Phi(\lambda n.4, \lambda n.1)$.

629b: Nie. Rozpatrzmy relację $r = \{\langle 0,3\rangle, \langle 0,4\rangle, \langle 1,4\rangle\}$. Jeśli $\Phi(f,g) = r$, dla pewnych funkcji f i g, to $f(0) = g(3) = g(4) = f(1)$. Ale stąd również $\langle 1,3\rangle \in \Phi(f,g)$, czyli $\Phi(f,g) \neq r$. Zatem $r \notin \mathrm{Rg}(\Phi)$.

629c: Dla dowodu $\Phi(\mathbf{1}_{\mathbb{N}^\mathbb{N}}) \subseteq RR$ wystarczy pokazać, że dla każdego $f \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$ relacja $\Phi(f,f)$ jest relacją równoważności. Istotnie, $\Phi(f,f) = \{\langle m,n\rangle \mid f(m) = f(n)\} = \ker(f)$, a zatem jest to relacja równoważności.

Aby udowodnić, że $\Phi(\mathbf{1}_{\mathbb{N}^\mathbb{N}}) \supseteq RR$, weźmy dowolną relację równoważności $r \in RR$. Niech $f_r : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ będzie zdefiniowana jako $f_r(n) = \min\, [n]_r$. Wówczas $\Phi(f_r, f_r) = r$, bo wiemy już, że $\Phi(f_r, f_r) = \ker(f_r)$ i udowodnimy, że $r = \ker(f_r)$:
($\subseteq$) Jeśli $\langle m,n\rangle \in r$, to $[m]_r = [n]_r$, a więc $f_r(m) = \min\, [m]_r = \min\, [n]_r = f_r(n)$.
($\supseteq$) Jeśli $\langle m,n\rangle \in \ker(f_r)$, to $\min\, [m]_r = \min\, [n]_r$. Zatem $\min\, [m]_r \in [m]_r \cap [n]_r$, skąd $\langle m,n\rangle \in r$.

629d: Zauważmy, że jeśli $\Phi(f,g) = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, to $f = g = \lambda n.c$, dla pewnego $c \in \mathbb{N}$. Istotnie, dla dowolnego n, para $\langle n, 0\rangle$ należy do $\Phi(f,g)$, więc $f(n) = g(0)$. A zatem f jest funkcją stałą. Podobnie pokazujemy, że g jest funkcją stałą, co więcej $f = g$. Stąd $R_{f,g} = \{c\}$, czyli jedyną taką liczbą kardynalną jest 1.

630a: Nie. Wystarczy zauważyć, że jeśli $f : \mathbb{N} \xrightarrow{1-1} \mathbb{N}$, to $\Phi(f) = \varnothing$. Istotnie, jeśli $\langle x,y\rangle \in \Phi(f)$ to istnieje takie x' różne od x, że $f(x) = f(x')$, czyli f nie może być różnowartościowe. Zatem na przykład $\Phi(\lambda x.\, x) = \Phi(\lambda x.\, x+1)$.

630b: Nie. Na przykład nie istnieje takie f, że $\Phi(f) = \{\langle 0,1\rangle, \langle 0,2\rangle\}$. Bo wtedy mielibyśmy jednocześnie $f(0) = 1$ i $f(0) = 2$.

630e: Jeden, bo $\Phi^{-1}(\{\mathbb{N}\times\{0\}\} = \{\lambda x.\,0\}$. Istotnie,

$$\Phi(\lambda x.\,0) = \{\langle x,y\rangle \mid 0 = y \wedge \exists x'(x' \neq x \wedge 0 = y)\} = \{\langle x,y\rangle \mid y = 0\}.$$

Na odwrót, jeśli $f \in \Phi^{-1}(\{\mathbb{N}\times\{0\}\})$, to $\Phi(f) = \{\mathbb{N}\times\{0\}\}$, czyli każda para postaci $\langle x,0\rangle$ należy do $\Phi(f)$. Wtedy jednak $f(x) = 0$ dla każdego x.

630f: Zero, bo $\Phi^{-1}(\{\{0\}\times\mathbb{N}\}) = \varnothing$. Gdyby bowiem $f \in \Phi^{-1}(\{\{0\}\times\mathbb{N}\})$, to $\Phi(f) = \{0\}\times\mathbb{N}$, czyli każda para postaci $\langle 0,x\rangle$ należy do $\Phi(f)$, na przykład $\langle 0,1\rangle, \langle 0,2\rangle \in \Phi(f)$. Ale to znaczy, że $f(0) = 1$ i jednocześnie $f(0) = 2$.

631a: Z definicji, $f\,R_k\,g$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $i = 0,\ldots,k-1$ wartości $f(i)$ i $g(i)$ mają te same reszty z dzielenia przez 7. Każda klasa abstrakcji tej relacji jest więc jednoznacznie wyznaczona przez ciąg reszt o długości k. Inaczej, zbiór ilorazowy relacji R_k jest równoliczny ze zbiorem $\{0,1,2,3,4,5,6\}^k$ wszystkich k-krotek o wyrazach w $\{0,1,2,3,4,5,6\}$. Takich krotek jest dokładnie 7^k.

631b: Tym razem $f\,R\,g$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $f(k)$ i $g(k)$ mają te same reszty z dzielenia przez 7 dla wszystkich $k \in \mathbb{N}$. Zbiór ilorazowy relacji R jest więc równoliczny ze zbiorem $\{0,1,2,3,4,5,6\}^{\mathbb{N}}$ wszystkich ciągów nieskończonych o wartościach w $\{0,1,2,3,4,5,6\}$. Ten zbiór ciągów jest mocy continuum, bo zawiera w sobie zbiór ciągów zerojedynkowych $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ i sam jest zawarty w $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, a oba te zbiory są mocy continuum.

634a: Każda relacja równoważności jest zwrotna, więc jest zgodna z funkcją identycznościową. A relacja pełna $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ jest zgodna z każdą funkcją.

634b: Jeśli $r \in \varphi(\lambda n.\,17)$, to $\langle n,17\rangle \in r$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$; zatem $r = \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ z symetrii i przechodniości. A więc zbiór $\varphi(\lambda n.\,17)$ jest mocy jeden.

Zbiór $X = \varphi(\lambda n.\,2\cdot\lfloor n/2\rfloor)$ jest co najwyżej mocy continuum, bo $X \subseteq \mathcal{R} \subseteq \mathsf{P}(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$, a zbiór $\mathsf{P}(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$ jest mocy continuum. Dla dowodu, że X jest co najmniej mocy continuum, zdefiniujemy funkcję różnowartościową $F : (\mathbb{N}\to\{0,1\}) \xrightarrow{1-1} X$. Dla dowolnego $\alpha : \mathbb{N}\to\{0,1\}$ przyjmiemy, że $F(\alpha)$ to relacja równoważności wyznaczająca podział

$$P_\alpha = \{\{4i,4i+1,4i+2,4i+3\} \mid \alpha(i) = 1\} \cup \{\{4i,4i+1\} \mid \alpha(i) = 0\} \cup \{\{4i+2,4i+3\} \mid \alpha(i) = 0\}.$$

Oczywiście $F(\alpha) \in \varphi(\lambda n.\,2\cdot\lfloor n/2\rfloor)$. Zauważmy, że dla $\alpha \neq \beta$, np. dla $\alpha(i) = 1$ i $\beta(i) = 0$, mamy $\langle 4i+1, 4i+2\rangle \in F(\alpha) - F(\beta)$, więc F istotnie jest różnowartościowa. Zbiór $\mathbb{N}\to\{0,1\}$ jest mocy continuum, więc $\overline{\overline{X}} \geq \mathfrak{C}$. Z twierdzenia Cantora-Bernsteina wnioskujemy, że $\overline{\overline{X}} = \mathfrak{C}$.

634c: Operacja φ nie jest różnowartościowa. Pokazaliśmy w rozwiązaniu 634b, że $\varphi(\lambda n.17) = \{\mathbb{N}\times\mathbb{N}\}$, analogicznie można pokazać, że $\varphi(\lambda n.16) = \{\mathbb{N}\times\mathbb{N}\}$.

Funkcja φ nie jest też na $\mathsf{P}(\mathcal{R})$. Pokazaliśmy, że $\mathbb{N}\times\mathbb{N} \in \varphi(f)$ dla dowolnego f. Z tego wynika, że nie istnieje takie f, że $\varphi(f) = \varnothing$.

635a: Wprowadźmy skrót $B^\circ = \{\langle x,y\rangle \mid x \neq y \wedge y \in B\}$ i zauważmy, że $B^\circ \cup C^\circ = (B\cup C)^\circ$. Ponieważ $r = r - \varnothing^\circ$, więc relacja $\sqsubseteq$ jest zwrotna. Ponieważ $r \sqsubseteq s$ implikuje $r \subseteq s$, więc relacja $\sqsubseteq$ jest antysymetryczna. Pokażemy przechodniość. Niech $r \sqsubseteq s \sqsubseteq t$, wtedy $r = s - B^\circ$ i $s = t - C^\circ$ dla pewnych B, C. Zatem $r = (t - C^\circ) - B^\circ = t - (B^\circ \cup C^\circ) = t - (B\cup C)^\circ$, skąd $r \sqsubseteq t$.

635b: Nie. Niech $r_i = \{\langle x,y\rangle \mid x \leq y \wedge i < y\} \cup \mathbf{1}_{\mathbb{N}}$. Relacje r_i są dobrymi ufundowaniami (bo są zawarte w zwykłym porządku w $\mathbb{N}$) i tworzą ciąg malejący, bo $r_{i+1} = r_i - \{i+1\}^\circ$, dla $i \in \mathbb{N}$.

635c: Każdy dobry porządek w $\mathbb{N}$ jest elementem maksymalnym w $\mathcal{U}$. Istotnie, jeśli r jest dobrym porządkiem oraz $r \sqsubseteq s$ i $r \neq s$, to istnieje para $\langle x,y\rangle$, która należy do $s - r$. Wtedy $x \neq y$, bo r jest zwrotna. Skoro r jest liniowy, to x i y są porównywalne w r, skąd $\langle y,x\rangle \in r \subseteq s$. Z antysymetrii relacji s wynika $x = y$, sprzeczność.

Dobrych porządków w $\mathbb{N}$ jest wiele, nie ma więcelementu największego. Elementem najmniejszym jest relacja identycznościowa (bo $\mathbf{1}_{\mathbb{N}} = r - \mathbb{N}^\circ$, dla $r \in \mathcal{U}$) i jest to jedyny element minimalny.

635d: Ponieważ $\mathcal{U} \subseteq \mathsf{P}(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$, więc moc zbioru $\mathcal{U}$ (a zatem i moc rodziny elementów maksymalnych w $\mathcal{U}$) jest co najwyżej continuum. Aby wykazać, że ta moc jest równa $\mathfrak{C}$, wystarczy wskazać zbiór dobrych porządków mocy $\mathfrak{C}$ (bo porządki dobre są maksymalne w $\mathcal{U}$) i skorzystać z twierdzenia

Cantora-Bernsteina. W tym celu dowolnemu podzbiorowi D zbioru liczb nieparzystych przypiszemy relację r_D dobrze porządkującą $\mathbb{N}$:

$$r_D = \{\langle x,y\rangle \mid x,y \in D \wedge x \leq y\} \cup \{\langle x,y\rangle \mid x,y \notin D \wedge x \leq y\} \cup \{\langle x,y\rangle \mid x \in D \wedge y \notin D\}.$$

Teraz dla $D \neq E$ mamy $r_D \neq r_E$: jeśli na przykład $m \in D - E$, to $\langle m,0\rangle \in r_D - r_E$.

636a: Niech s będzie relacją równoważności podobną do $\mathbf{1}_\mathbb{N}$ i niech f będzie funkcją ustalającą to podobieństwo. Zauważmy, że jeśli $a\ s\ b$, to $f(a)\ \mathbf{1}_\mathbb{N}\ f(b)$, a więc $f(a) = f(b)$. Z tego wynika, że $a = b$, bo f jest różnowartościowa. Zatem s jest równe $\mathbf{1}_\mathbb{N}$. Ponieważ sama relacja $\mathbf{1}_\mathbb{N}$ jest podobna do siebie (należy wziąć funkcję identycznościową), więc zbiór relacji równoważności podobnych do $\mathbf{1}_\mathbb{N}$ ma moc 1.

636b: Niech $r = \{\langle 0,1\rangle, \langle 1,0\rangle\} \cup \mathbf{1}_\mathbb{N}$. Relacje równoważności podobne do r to dokładnie te, które (tak jak r) mają jedną klasę abstrakcji mocy 2, a pozostałe klasy abstrakcji mocy 1.
Istotnie, niech s będzie taką relacją i niech jej klasą abstrakcji mocy 2 będzie $\{m,n\}$. Niech teraz $g : \mathbb{N} - \{0,1\} \xrightarrow[\text{na}]{1-1} \mathbb{N} - \{m,n\}$ będzie dowolną bijekcją. Podobieństwo r i s ustala np. taka funkcja f, że $f(0) = m$, $f(1) = n$, oraz $f(k) = g(k)$ dla $k \neq 0,1$.

Na odwrót, niech s będzie relacją podobną do r i niech funkcja f ustala to podobieństwo. Weźmy dowolne $a \in \mathbb{N}$. Wtedy dla każdego $x \in [a]_s$ mamy $f(x)\ r\ f(a)$. W przypadku, gdy $f(a) \neq 0,1$, oznacza to $f(x) = f(a)$, a ponieważ f jest różnowartościowa, więc $x = a$, a zatem moc $[a]_s$ to 1. A jeżeli $f(a) = 0$ lub $f(a) = 1$, to z $f(x)\ r\ f(a)$ wynika, że $f(x) = 0$ lub $f(x) = 1$, więc $[a]_s = f^{-1}(\{0,1\})$. Ponieważ f jest bijekcją, moc $[a]_s$ wynosi 2.

Niech A oznacza zbiór wszystkich relacji równoważności podobnych do r. Pokażemy, że moc A jest równa $\aleph_0$. Po pierwsze $\aleph_0 \leq \overline{\overline{A}}$, gdyż $h : \mathbb{N} \xrightarrow{1-1} A$, dla $h(n) = \mathbf{1}_\mathbb{N} \cup \{\langle n,n+1\rangle, \langle n+1,n\rangle\}$. Nierówność odwrotna $\overline{\overline{A}} \leq \aleph_0$ wynika z różnowartościowości funkcji $g : A \to \mathbb{N}\times\mathbb{N}$, zdefiniowanej następująco:

$$g(s) = \langle m,n\rangle, \text{ gdzie } \langle m,n\rangle \text{ to jedyna para liczb takich, że } m\ s\ n \text{ i } m < n.$$

636c: Taka relacja istnieje. Oznaczmy przez T_i zbiór wszystkich liczb naturalnych, które dają resztę i z dzielenia przez 3. Zbiory T_0, T_1 i T_2 tworzą podział $\mathbb{N}$ na trzy nieskończone składowe. A jeśli przyjmiemy np. $L = T_0 \cup T_1$ i $P = T_2$, to dostaniemy podział $\{L,P\}$ na dwie nieskończone składowe. Niech B oznacza zbiór wszystkich relacji równoważności podobnych do relacji r wyznaczonej przez podział $\{L,P\}$. Pokażemy, że $\overline{\overline{B}} = \mathfrak{C}$. Oczywiście $\overline{\overline{B}} \leq \mathfrak{C}$, ponieważ zbiór wszystkich relacji w $\mathbb{N}$ jest mocy continuum.

Aby pokazać nierówność przeciwną, weźmy funkcję $g : \mathsf{P}(T_1) \to B$, która każdemu $X \subseteq T_1$ przyporządkowuje relację równoważności, wyznaczoną przez podział $\{T_0 \cup X, (T_1 - X) \cup T_2\}$. Zauważmy, że dla każdego $X \subseteq T_1$, relacja $g(X)$ jest podobna do r. Istotnie, oba zbiory $T_0 \cup X$ i $(T_1 - X) \cup T_2$ są nieskończone, a zatem istnieją bijekcje $f_1 : L \to (T_0 \cup X)$ oraz $f_2 : P \to ((T_1 - X) \cup T_2)$. Ponieważ zarówno dziedziny jak i zbiory wartości obu bijekcji są rozłączne, więc suma $f = f_1 \cup f_2$ (tj. funkcja $f = \lambda x.\, \mathsf{if}\ x \in L\ \mathsf{then}\ f_1(x)\ \mathsf{else}\ f_2(x)$) również będzie bijekcją. Będzie ona oczywiście wyznaczać podobieństwo relacji r i $g(X)$. Różnowartościowość g wynika z tego, że zbiory $\{T_0, T_1, T_2\}$ są niepuste i parami rozłączne, a zatem dla różnych podzbiorów T_1 otrzymamy różne podziały.
Ponieważ $\overline{\overline{\mathsf{P}(T_1)}} = \mathfrak{C}$, więc $\mathfrak{C} \leq \overline{\overline{B}}$, a zatem z twierdzenia Cantora-Bernsteina moc B to continuum.

637a: Udowodnimy najpierw, że dwie różne niepuste uogólnione składowe muszą być rozłączne. Niech więc $A = \bigcap_{i\in I} C_i^{s(i)}$ i $B = \bigcap_{i\in I} C_i^{r(i)}$ będą różne. Oznacza to w szczególności, że funkcje s i r są różne, czyli, że $s(i) \neq r(i)$ dla pewnego $i \in I$. Zbiory $C_i^{s(i)}$ i $C_i^{r(i)}$ są wtedy rozłączne (jeden jest dopełnieniem drugiego). Jeśli teraz $x \in A \cap B$, to x należy między innymi do zbioru $C_i^{s(i)}$ a także do zbioru $C_i^{r(i)}$ – sprzeczność. A więc iloczyn $A \cap B$ jest pusty.

Wykażemy teraz, że suma wszystkich niepustych uogólnionych składowych pokrywa zbiór U, tj. że każdy element U należy do pewnej składowej. Wybierzmy dowolny ale ustalony $x \in U$ i zdefiniujmy taką funkcję $s_x \in \{0,1\}^I$, że $s_x(i) = 1$ gdy $x \in C_i$ oraz $s_x(i) = 0$ gdy $x \notin C_i$. Funkcja s_x wyznacza uogólnioną składową $\bigcap_{i\in I} C_i^{s_x(i)}$, do której należy x.

637b: Skoro $\overline{\overline{U}} = \aleph_0$, to zbiór U jest przeliczalny, skąd wszystkie podzbiory U są przeliczalne. Zatem każda uogólniona składowa nad rodziną $\mathcal{C}$ jest przeliczalna, bo jest podzbiorem U.

637c: Jeden. Po pierwsze, dla $I \neq \varnothing$ istnieje przynajmniej jedna składowa, np. $\bigcap_{i\in I} C_i$. Po drugie, jeśli zbiór U jest pusty, to każda uogólniona składowa jest pusta, bo jest podzbiorem U. Tym samym nad rodziną $\mathcal{C}$ jest dokładnie jedna uogólniona składowa.

638a: Pokażemy, że funkcja $\lambda i.\, C_i$ jest bijekcją z $\mathbb{N}$ do $\{C_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Ta funkcja jest „na" wprost z definicji; pozostaje sprawdzić, że jest różnowartościowa. Niech $n, m \in \mathbb{N}$ oraz $n \neq m$. Jeśli przyjmiemy

$$g(x) = \mathsf{if}\ x = n\ \mathsf{then}\ 0\ \mathsf{else}\ 1,$$

to łatwo sprawdzimy, że $g \in C_m$, ale $g \notin C_n$. Zatem $C_m \neq C_n$.

638b: Uogólnioną składową wyznaczoną przez funkcję $\lambda i.\, 1$ jest zbiór $B = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} C_i$. Należą do niego dokładnie te ciągi, które na każdej pozycji mają liczbę z przedziału $[\frac{1}{2}, 1]$; zatem $B = [\frac{1}{2}, 1]^{\mathbb{N}}$. Podobnie, funkcja $\lambda i.\, 0$ wyznacza uogólnioną składową $D = \bigcap_{i\in\mathbb{N}}(U - C_i)$, gdzie $U = [0,1]^{\mathbb{N}}$. Zauważmy, że do zbioru $[0,1]^{\mathbb{N}} - C_i$ należą dokładnie te ciągi f, dla których $f(i) \in [0,1]$ ale $f(i) \notin [\frac{1}{2}, 1]$, zatem $f(i) \in [0, \frac{1}{2})$. A więc D to zbiór tych ciągów, które na każdej pozycji mają liczbę z przedziału $[0, \frac{1}{2})$, wobec tego $D = [0, \frac{1}{2})^{\mathbb{N}}$.

638c: Niech A będzie uogólnioną składową wyznaczoną przez ciąg $f \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ tzn. $A = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} C_i^{f(i)}$. Zauważmy, że $f \in [0,1]^{\mathbb{N}} = U$, bo przecież $\{0,1\} \subseteq [0,1]$. Co więcej $f(i) \in C_i^{f(i)}$ dla dowolnego $i \in \mathbb{N}$. Istotnie, mamy albo $f(i) = 1 \in [\frac{1}{2}, 1]$ albo $f(i) = 0 \in [0, \frac{1}{2})$. Wynika stąd, że $f \in A$, czyli że $A \neq \varnothing$.

639a: Tak. Niech $x \in A$, wówczas x należy do pewnego cyklu w relacji r. Ponieważ cykl w relacji r zawiera się również w relacji $r \cup s$ dla dowolnego s, więc x należy do pewnego cyklu w $r \cup s$.

639b: Nie. Weźmy relacje $\{\langle 0,0\rangle, \langle 1,1\rangle\}$ oraz $\{\langle 0,1\rangle, \langle 1,0\rangle\}$ w zbiorze $\{0,1\}$. Ich przecięciem jest relacja pusta, która nie jest cykliczna.

639c: Nie. Weźmy relacje $r = \bigcup_{i\in\mathbb{Z}}\{\langle 2i, 2i{+}1\rangle, \langle 2i{+}1, 2i\rangle\}$ i $s = \bigcup_{i\in\mathbb{Z}}\{\langle 2i+1, 2i+2\rangle, \langle 2i+2, 2i+1\rangle\}$ w zbiorze $\mathbb{Z}$. Ich złożenie $r \circ s$ to relacja $\bigcup_{i\in\mathbb{Z}}\{\langle 2i, 2i+2\rangle, \langle 2i+1, 2i-1\rangle\}$, która nie jest cykliczna. Inny przykład to relacje $r = \{\langle 0,1\rangle, \langle 1,0\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle\}$ i $s = \{\langle 0,0\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle\}$ w zbiorze $\{0,1,2\}$. Ich złożenie $r \circ s = \{\langle 0,2\rangle, \langle 1,0\rangle, \langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle\}$ nie jest relacją cykliczną.

639d: Nie. Relacja r^* nie musi być symetryczna. Np. dla $r = \{\langle 0,0\rangle, \langle 0,1\rangle, \langle 1,1\rangle$ mamy $r^* = r$ i nie jest to relacja równoważności.

639e: Takich relacji w $\mathbb{N}$ jest continuum. Niech $\mathcal{C}$ oznacza rodzinę wszystkich relacji cyklicznych w $\mathbb{N}$. Aby pokazać, że $\overline{\overline{\mathcal{C}}} \geq \mathfrak{C}$, weźmy funkcję $F : \mathsf{P}(\mathbb{N}) \xrightarrow{1-1} \mathcal{C}$ zdefiniowaną następująco: $F(A) = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} f_A(i)$, gdzie $f_A = \lambda i.\, \mathsf{if}\ i \in A\ \mathsf{then}\ \{\langle 2i, 2i+1\rangle, \langle 2i+1, 2i\rangle\}\ \mathsf{else}\ \{\langle 2i, 2i\rangle, \langle 2i+1, 2i+1\rangle\}$. Powyższa definicja jest poprawna, ponieważ każda z relacji $F(A)$ jest cykliczna: dowolna liczba naturalna n jest postaci $2i$ lub $2i{+}1$ dla pewnego $i \in \mathbb{N}$ i wtedy jeśli $i \in A$, to mamy cykl $\langle 2i, 2i{+}1\rangle$ zawierający n, a jeśli $i \notin A$, to mamy cykl jednoelementowy $\langle n\rangle$. Funkcja F jest różnowartościowa. Istotnie, weźmy dowolne $A_1 \neq A_2$, wtedy możemy założyć, że istnieje takie $i \in A_1$, że $i \notin A_2$. Wówczas para $\langle 2i, 2i+1\rangle$ jest elementem relacji $F(A_1)$, a nie jest elementem $F(A_2)$. Zatem moc rodziny wszystkich relacji cyklicznych to co najmniej continuum. Oczywiście jest to również co najwyżej continuum, bo $\mathcal{C} \subseteq \mathsf{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$. A zatem z tw. Cantora-Bersteina, moc rodziny $\mathcal{C}$ to continuum.

640a: Nie, bo np. $\Phi(\lambda x.x + 1) = \Phi(\lambda x.x + 2) = \varnothing$.

640b: Tak. Weźmy dowolny zbiór A. Jeśli $A = \varnothing$, to $\Phi(\lambda x.x + 1) = A$. W przeciwnym przypadku dla $f_A = \lambda x.\, \mathsf{if}\ x \in A\ \mathsf{then}\ x\ \mathsf{else}\ \min A$, mamy $\Phi(f_A) = A$. Istotnie, w oczywisty sposób $A \subseteq \Phi(f_A)$, a zawieranie w drugą stronę wynika stąd, że jeśli $x \in \Phi(f_A)$, to $x = f_A(x) \in A$.

640c: Tak, bo jest to jądro przekształcenia $\lambda f.\, f^{-1}(\Phi(f))$.

640d: Nie. Relacja ta nie jest antysymetryczna, ponieważ funkcja Φ nie jest różnowartościowa.

641a: Nie. Pokażemy takie dwie relacje r i s, że $r \neq s$ ale $\Psi(r) = \Psi(s)$. Pierwsza, to relacja pełna $r = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, a druga to $s = \{\langle n, m\rangle \mid |n - m| \text{ jest parzyste}\}$. Wszystkie klasy abstrakcji tych relacji są nieskończone, więc $\Psi(r) = \Psi(s) = \lambda n\, 0$.

641b: Nie. Na przykład nie ma takiej relacji r, że $\Psi(r) = \lambda n.\, \mathsf{if}\ n = 0\ \mathsf{then}\ 2\ \mathsf{else}\ 1$. Klasa $[0]_r$ miałaby wówczas dwa elementy, tj. $[0]_r = \{0, n\}$ dla pewnego $n \neq 0$. Ale wtedy klasa $[n]_r$ miałaby tylko 1 element, a przecież $[0]_r = [n]_r$.

641c: Ponieważ $\overline{\overline{\mathcal{R}}} = \mathfrak{C}$, więc moc zbioru $\mathcal{R}/_{\ker\Psi}$ jest co najwyżej $\mathfrak{C}$, bo mamy kanoniczną surjekcję $\lambda r.\, [r]_{\ker\Psi} : \mathcal{R} \to \mathcal{R}/_{\ker\Psi}$. Pokażemy, że moc naszego zbioru jest też co najmniej $\mathfrak{C}$. Oznaczmy przez $\mathcal{P}$r zbiór wszystkich liczb parzystych i określmy funkcję $\Xi : \mathsf{P}(\mathcal{P}\mathrm{r}) \xrightarrow{1-1} \mathcal{R}/_{\ker\Psi}$ tak, że $\Xi(A) = [r_A]_{\ker\Psi}$, gdzie $r_A = \{\langle x,y\rangle \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid x = y \text{ lub } x,y \in \mathbb{N}-A\}$. Relacja r_A ma jedną nieskończoną klasę abstrakcji $\mathbb{N} - A$, a postałe klasy są jednoelementowe. Są to klasy $[x]_{r_A}$, gdzie $x \in A$. Zatem funkcja $\Psi(r_A)$ przyjmuje wartość 1 dla argumentów ze zbioru A, a dla innych argumentów wartość zero. Inaczej mówiąc, $\Psi(r_A)$ to po prostu funkcja charakterystyczna zbioru A. Ponieważ funkcje charakterystyczne różnych zbiorów A, B, są różne, więc $\langle r_A, r_B\rangle \notin \ker\Psi$, czyli $\Xi(A) \neq \Xi(B)$. Funkcja Ξ jest więc różnowartościowa, skąd otrzymujemy, że $\overline{\overline{\mathcal{R}/_{\ker\Psi}}} \geq \overline{\overline{\mathsf{P}(\mathcal{P}\mathrm{r})}} = \mathfrak{C}$ i ostatecznie $\overline{\overline{\mathcal{R}/_{\ker\Psi}}} = \mathfrak{C}$.

642a: Pokażemy, że zbiór $\mathcal{C}/_\sim$ jest mocy $\aleph_0$. Zacznijmy od tego, że jest nieskończony, bo np. jeśli $a[m](i) = \mathsf{if}\ i \leq m\ \mathsf{then}\ 0\ \mathsf{else}\ 1$, to $a[m] \not\sim a[k]$ dla $m \neq k$. Wystarczy teraz udowodnić, że $\mathcal{C}/_\sim$ jest zbiorem przeliczalnym.

Dla dowolnego słowa $w = \delta_0 \ldots \delta_{n-1} \in D^*$ i zbioru $A = \{\varrho_0, \ldots, \varrho_{m-1}\} \subseteq D$ (gdzie $\varrho_0 < \cdots < \varrho_{m-1}$) niech ciąg $\xi(w,A)$ będzie taki, że $\xi(w,A)(i) = \delta_i$ dla $i < n$ oraz $\xi(w,A)(n+mj) = \varrho_j$, dla każdego $j \in \mathbb{N}$. Na przykład, jeśli $w = 0343$ i $A = \{1,2,8\}$, to $\xi(w,A) = (0,3,4,3,1,2,8,1,2,8,\ldots)$ Określimy teraz funkcję $\Xi : D^* \times (\mathsf{P}(D) - \{\varnothing\}) \to \mathcal{C}/_\sim$ przyjmując $\Xi(w,A) = [\xi(w,A)]_\sim$. Pokażemy, że funkcja Ξ jest na zbiór $\mathcal{C}/_\sim$, tj. że dla każdego ciągu $b \in \mathcal{C}$ istnieją takie w i A, że $b \sim \xi(w,A)$. Stąd wywnioskujemy przeliczalność zbioru $\mathcal{C}/_\sim$, bo zbiór $D^* \times (\mathsf{P}(D) - \{\varnothing\})$ jest przeliczalny.

Rozpatrzmy więc dowolny ciąg $b \in \mathcal{C}$ i zauważmy, że są takie cyfry, które występują w tym ciągu nieskończenie wiele razy. Innymi słowy, zbiór $A_b = \{\delta \in D \mid b^{-1}(\{\delta\}) \text{ jest nieskończony}\}$ jest niepusty. Jeśli bowiem cyfra δ występuje w b skończenie wiele razy, to zbiór $b^{-1}(\{\delta\})$ jest ograniczony z góry przez pewną liczbę n_δ. Dla n większego od wszystkich takich liczb n_δ (których jest co najwyżej 10) mamy $b(n) \in A_b$. Ustalmy takie n i niech w_b oznacza słowo $b(0)b(1)\ldots b(n-1)$. Pokażemy, że $b \sim \xi(w_b, A_b)$.

Aby pokazać, że b jest podciągiem $\xi(w_b, A_b)$ określimy ostro rosnącą funkcję $\psi : \mathbb{N} \xrightarrow{1-1} \mathbb{N}$. Dla $i < n$ niech $\psi(i) = i$, natomiast dla $i \geq n$ użyjemy indukcji: jako $\psi(i)$ wybierzemy najmniejszą liczbę ℓ, która jest większa od wszystkich $\psi(j)$ dla $j < i$, oraz spełnia warunek $\xi(w_b, A_b)(\ell) = b(i)$. Taka liczba istnieje, bo $b(i)$ występuje w $\xi(w_b, A_b)$ nieskończenie wiele razy. Oczywiście $\xi(w_b, A_b)(\psi(i)) = b(i)$, dla każdego i, ciąg b jest więc podciągiem ciągu $\xi(w_b, A_b)$. Analogicznie dowodzimy, że także $\xi(w_b, A_b)$ jest podciągiem ciagu b.

642b: Pokażemy, że są to liczby 1 i $\mathfrak{C}$. Niech $b \in \mathcal{C}$. Jak zauważyliśmy w części 642a, pewne cyfry muszą występować w ciągu b nieskończenie wiele razy. Przypuśćmy najpierw, że jest $r > 1$ tych cyfr. Dla uproszczenia, niech $r = 2$ (rozwiązanie dla $r = 3, \ldots, 10$ jest analogiczne) i niech to będą cyfry δ i ρ. Wybierzmy takie n, że każda cyfra $b(k)$ dla $k \geq n$ to δ albo ρ (por. część 642a).

Określimy funkcję $f : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to [b]_\sim$ przyjmując dla $\varphi : \mathbb{N} \to \{0,1\}$ oraz dowolnego $k < n$, że $f(\varphi)(k) = b(k)$, a dla dalszych argumentów kładąc: $f(\varphi)(n+2i) = \delta$ i $f(\varphi)(n+2i+1) = \rho$, gdy $\varphi(i) = 0$, oraz $f(\varphi)(n+2i+1) = \delta$ i $f(\varphi)(n+2i) = \rho$, w przeciwnym przypadku. Na przykład jeśli $n = 4$, $\delta = 2$, $\rho = 3$ i ciąg a zaczyna się od cyfr 0434, to dla ciągu $\varphi = 011011\ldots$ otrzymujemy $f(\varphi) = 0434233232233232\ldots$ Funkcja f jest różnowartościowa, bo dla różnych ciągów φ i φ', istnieje takie j, że $\varphi(j) \neq \varphi'(j)$, skąd $f(\varphi)(n+2j) \neq f(\varphi')(n+2j)$, a zatem $f(\varphi) \neq f(\varphi')$. Stąd klasa $[b]_\sim$ jest mocy continuum.

Inaczej jest, gdy w ciągu b tylko jedna cyfra, powiedzmy ρ, występuje nieskończenie wiele razy, tj. ciąg b jest od pewnego miejsca stale równy ρ. Wtedy klasa $[b]_\sim$ jest jednoelementowa. Istotnie, najpierw zauważmy, że jeśli $a \sim b$ to cyfra ρ występuje nieskończenie wiele razy w a (bo b jest podciągiem a) i jest to jedyna taka cyfra (bo a jest podciągiem b). Zatem także ciąg a musi być prawie wszędzie równy ρ. Niech k i ℓ będą najmniejszymi liczbami o tej własności, że $\forall n\,(n \geq k \to b(n) = \rho)$ oraz $\forall n\,(n \geq \ell \to a(n) = \rho)$. Skoro a jest podciągiem ciągu b, to ℓ początkowych wyrazów ciągu a występuje (w tej samej kolejności) wśród k początkowych wyrazów ciągu b, a więc $\ell \leq k$. Podobnie uzasadniamy, że $k \leq \ell$, skąd $k = \ell$. Pozostaje teraz tylko jedna możliwość: $a(i) = b(i)$ dla $i < k$, a skoro dalej mamy same ρ, to $a = b$.

645: Przyjmijmy oznaczenie $\mathsf{P}_+(\mathbb{Z}_+) = \mathsf{P}(\mathbb{Z}_+) - \{\varnothing\}$. Ponieważ mocą zbioru $\mathsf{P}_+(\mathbb{Z}_+)$ jest $\mathfrak{C}$, więc takie jest ograniczenie górne zarówno na moc zbioru ilorazowego, jak i na moc każdej klasy abstrakcji. Zbiór ilorazowy ma moc $\mathfrak{C}$, ponieważ każdy niepusty podzbiór zbioru liczb pierwszych $\mathbb{P}$ wyznacza osobną klasę abstrakcji. Istotnie, dla $P_1, P_2 \in \mathsf{P}_+(\mathbb{P})$, jeśli $p \in P_1 - P_2$ to p nie dzieli się przez żadną liczbę ze zbioru P_2, a więc $P_2 \not\lesssim P_1$, czyli $P_2 \not\sim P_1$. Zatem kanoniczna surjekcja $\kappa = \lambda A.[A]_\sim$, obcięta do zbioru $\mathsf{P}_+(\mathbb{P})$ jest różnowartościowa, co dowodzi, że $\mathfrak{C} = \overline{\overline{\mathsf{P}_+(\mathbb{P})}} \leq \overline{\overline{\mathsf{P}_+(\mathbb{Z}_+)/_\sim}}$, a zatem $\overline{\overline{\mathsf{P}_+(\mathbb{Z}_+)/_\sim}} = \mathfrak{C}$.

Pokażemy teraz, że dla dowolnego $A \in \mathsf{P}_+(\mathbb{Z}_+)$ klasa $[A]_\sim$ jest mocy continuum. Ze względu na ustalone wcześniej ograniczenie górne, wystarczy udowodnić, że $\overline{\overline{[A]_\sim}} \geq \mathfrak{C}$. Wiemy, że $A \neq \varnothing$, wybierzmy więc jakieś $k \in A$ i niech $K = \{kn \mid n \geq 2\}$. Oczywiście $\overline{\overline{K}} = \aleph_0$, a zatem $\mathsf{P}(K)$ ma moc continuum. Określimy funkcję $F_A : \mathsf{P}(K) \to [A]_\sim$, przyjmując $F_A(B) = (A - K) \cup B$. Zacznijmy od sprawdzenia, że funkcja F_A jest dobrze określona, tj. że dla każdego podzbioru $B \subseteq \mathsf{P}(K)$ zachodzi $F_A(B) \sim A$. Nierówność $A \lesssim F_A(B) = (A - K) \cup B$ wynika stąd, że elementy zbioru B dzielą się przez k, a elementy $A - K$ dzielą się przez siebie. Na odwrót, jeśli $x \in A$, to albo $x \in A - K$ i liczba x dzieli się przez siebie, albo $x \in K$ i x dzieli się przez $k \in A - K$. Funkcja F_A jest różnowartościowa, bo jeśli $B', B'' \subseteq K$ oraz $x \in B' - B''$, to także $x \in F_A(B') - F_A(B'')$, bo $x \notin A - K$.

647a: Funkcja $\mathcal{F}$ nie jest na $\mathsf{P}(\mathbb{N}) \to \mathsf{P}(\mathbb{N})$, bo funkcja stała $g = \lambda A.\{5\}$ nie jest postaci $\mathcal{F}(r)$ dla żadnej relacji $r \in \mathcal{R}$. Mamy bowiem np. $\mathcal{F}(r)(\{0\}) = \{0\}$ dla każdego r. Ale funkcja $\mathcal{F}$ jest różnowartościowa. Niech $r, s \in \mathcal{R}$ i niech $r \neq s$, na przykład $\langle m, n\rangle \in r - s$. Wtedy $F(r)(\{m\}) = F(r)(\{n\})$, ale $F(s)(\{m\}) \neq F(s)(\{n\})$, bo $F(s)(\{m\}) \in [m]_s$, a $F(s)(\{n\}) \in [n]_r \neq [m]_s$, a różne klasy są rozłączne.

647b: Zauważmy, że $\mathcal{F}(\mathbf{1}_\mathbb{N})(A) = A$, bo $\min[x]_{\mathbf{1}_\mathbb{N}} = \min\{x\} = x$ dla każdego x. Zatem funkcja $\mathcal{F}(\mathbf{1}_\mathbb{N}) = \mathrm{id}_{\mathsf{P}(\mathbb{N})}$ jest bijekcją. A jeśli $x \, r \, y$ dla pewnych różnych liczb x, y, to $\mathcal{F}(r)$ nie jest ani injekcją ani surjekcją. Po pierwsze, wtedy $\min[x]_r = \min[y]_r$, więc $\mathcal{F}(r)(\{y\}) = \mathcal{F}(r)(\{x\})$, choć $\{x\} \neq \{y\}$. Po drugie, zbiór $\{x, y\}$ nie jest wtedy wartością funkcji $\mathcal{F}(r)$. Gdyby bowiem $\{x, y\} = \mathcal{F}(r)(A)$, to $x = \min[x']_r$ oraz $y = \min[y']_r$, dla pewnych $x', y' \in A$. Ale wtedy $[x']_r = [x]_r = [y]_r = [y']_r$, więc minimum jest to samo, czyli $x = y$, sprzeczność.

647c: Najpierw ustalmy co to znaczy, że relacja r należy do $\mathcal{S}$. Ponieważ $\mathcal{F}(r)(\{i\}) = \{\min[i]_r\}$ oraz $\mathcal{F}(r)(\{i+1\}) = \{\min[i+1]_r\}$, więc zawieranie $\mathcal{F}(r)(\{i\}) \subseteq \mathcal{F}(r)(\{i+1\})$ oznacza po prostu, że $\langle i, i+1\rangle \in r$. A więc $\mathcal{S} = \{r \in \mathcal{R} \mid \exists i.\, \langle i, i+1\rangle \in r\}$.

Pokażemy, że zbiór $\mathcal{S}$ jest mocy continnuum. Oczywiście $\overline{\overline{\mathcal{S}}} \leq \mathfrak{C}$, ponieważ $\mathcal{S} \subseteq \mathsf{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$. Aby udowodnić, że $\mathfrak{C} \leq \overline{\overline{\mathcal{S}}}$, zdefiniujemy funkcję $G : \mathcal{R}_+ \xrightarrow{1-1} \mathcal{S}$, gdzie $\mathcal{R}_+$ to zbiór wszystkich relacji równoważności w $\mathbb{N}_+ = \mathbb{N} - \{0\}$. Dla dowolnej relacji $r \in \mathcal{R}_+$ definiujemy relację $G(r)$ w ten sposób, że $[n]_{G(r)} = [n]_r$ dla wszystkich liczb $n > 1$ oraz $[1]_{G(r)} = [0]_{G(r)} = [1]_r \cup \{0\}$. Ta definicja jest poprawna, bo wymienione zbiory tworzą podział $\mathbb{N}$. Jeśli teraz $r \neq s$, to $G(r) \neq G(s)$, bo różne podziały $\mathbb{N} - \{0\}$ pozostają różne po „doklejeniu" zera do klasy jedynki. A więc funkcja G jest różnowartościowa. Ponieważ zbiory $\mathbb{N}$ i $\mathbb{N}_+$ są równoliczne, więc także zbiory $\mathcal{R}$ i $\mathcal{R}_+$ są równoliczne, a wiemy, że $\mathcal{R}$ jest mocy $\mathfrak{C}$. Stąd wynika, że $\mathfrak{C} = \overline{\overline{\mathcal{R}_+}} \leq \overline{\overline{\mathcal{S}}}$. Z twierdzenia Cantora-Bernsteina wnioskujemy, że $\overline{\overline{\mathcal{S}}} = \mathfrak{C}$.

648b: Zbiór $A_1 = R[\varnothing]$ to zbiór elementów bez właściwych podzielników i są to liczby pierwsze. Natomiast $R[A_1]$, to zbiór tych liczb, których jedynymi dzielnikami właściwymi są liczby pierwsze, zatem $6 \in A_2$ ale $24 \notin \mathcal{A}_2$, bo $12 \,|\, 24$. Jednak $2, 3, 4, 6, 8, 12 \in A_3$, skąd $24 \in A_4 \subseteq A_\omega$.

648c: Niech $x \in R[\overline{R}]$. Pokażemy, że $x \in \overline{R}$, tj. $x \in A$ dla wszystkich R-indukcyjnych zbiorów A. Weźmy więc taki zbiór A. Ponieważ $x \in R[\overline{R}]$, więc $R^{-1}(x) \subseteq \overline{R} \subseteq A$. To oznacza, że $x \in R[A]$, a skoro A jest R-indukcyjny, to $x \in A$ i mamy co trzeba.

648d: ($\subseteq$) Wystarczy udowodnić, że zbiór A_ω jest R-indukcyjny. Niech więc $x \in R[A_\omega]$. Każdy element skończonego zbioru $R^{-1}(x) = \{y \in X \mid y \, R \, x\}$ należy do pewnego zbioru A_n, więc dla dostatecznie dużego n mamy $R^{-1}(x) \subseteq A_n$. Oznacza to, że $x \in R[A_n] \subseteq A_{n+1} \subseteq A_\omega$.

($\supseteq$) Pokażemy przez indukcję, że $A_n \subseteq \overline{R}$ zachodzi dla wszystkich n. Inkluzja $A_0 = \varnothing \subseteq \overline{R}$ jest oczywista. Załóżmy, że $A_n \subseteq \overline{R}$ i niech $x \in A_{n+1}$. Jeśli $x \in A_n$, to $x \in \overline{R}$ wprost z założenia indukcyjnego, niech więc $x \in R[A_n]$, czyli $R^{-1}(x) \subseteq A_n \subseteq \overline{R}$. Zatem $x \in \overline{R}$, bo $\overline{R}$ jest R-indukcyjny.

648e: Założenie (*) jest istotne. Weźmy jako przykład zbiór $\mathbb{N} \cup \{\omega\}$, gdzie $\omega \notin \mathbb{N}$, i rozpatrzmy relację $R = \{\langle n, n+1\rangle \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{\langle n, \omega\rangle | \, n \in \mathbb{N}\}$. Warunek (*) nie jest spełniony przez element ω. Nietrudno sprawdzić, że $A_n = \{k \mid k < n\}$ dla wszystkich n, skąd $\omega \notin A_\omega$. Ale jedynym zbiorem R-indukcyjnym jest $\mathbb{N} \cup \{\omega\}$, więc $\overline{R} = \mathbb{N} \cup \{\omega\} \neq A_\omega$.

649a: Funkcja F nie jest różnowartościowa. Na przykład $F(\leq) = F(r) = \{0\}$, gdzie $\leq$ jest zwykłym porządkiem w $\mathbb{N}$ oraz $r = \mathbf{1}_\mathbb{N} \cup (\{0\} \times \mathbb{N})$.

Ale F jest na $\mathsf{P}(\mathbb{N})$, bo dla każdego $A \subseteq \mathbb{N}$ można wskazać taką relację r_A, że $F(r_A) = A$. Dla $A \neq \varnothing$ można przyjąć $r_A = \mathbf{1}_{\mathbb{N}} \cup (A \times (\mathbb{N} - A))$, a dla $A = \varnothing$ wziąć na przykład $r_A = \geq$.

649b: Szukany obraz $F(D) = \{F(r) \mid r \text{ jest dobrze ufundowany}\}$, to zbiór $\mathsf{P}(\mathbb{N}) - \{\varnothing\}$. Po pierwsze, każdy dobrze ufundowany porządek musi mieć element minimalny (bo $\mathbb{N}$ jest niepustym podzbiorem $\mathbb{N}$). Zatem $F(D) \subseteq \mathsf{P}(\mathbb{N}) - \{\varnothing\}$. Po drugie, jeśli $A \neq \varnothing$, to relacja r_A z zadania 649a jest dobrym ufundowaniem, ma bowiem ciągi malejące długości co najwyżej 2. A więc $\mathsf{P}(\mathbb{N}) - \{\varnothing\} \subseteq F(D)$. Ponieważ funkcja F obcięta do zbioru D jest na $F(D) = \mathsf{P}(\mathbb{N}) - \{\varnothing\}$, więc moc zbioru D jest co najmniej taka jak moc zbioru $\mathsf{P}(\mathbb{N}) - \{\varnothing\}$, czyli continuum. A więc jest równa continuum, bo $D \subseteq \mathcal{R}$ i wiemy, że cały zbiór $\mathcal{R}$ jest mocy $\mathfrak{C}$.

649c: Zbiór $F^{-1}(\mathcal{Z}) = \{r \in \mathcal{R} \mid F(r) \in \mathcal{Z}\}$, to zbiór tych porządków, które mają co najwyżej jeden element minimalny. Ponieważ $F^{-1}(\mathcal{Z}) \subseteq \mathcal{R}$, więc moc tego zbioru jest co najwyżej continuum. Pokażemy, że moc ta jest także co najmniej continuum. W tym celu zdefiniujemy injekcję $G : \mathsf{P}(\mathbb{N} - \{0,1\}) \xrightarrow{1-1} F^{-1}(\mathcal{Z})$. Dla $A \subseteq \mathbb{N} - \{0,1\}$ niech $A_0 = A \cup \{0\}$ i niech $A_1 = \mathbb{N} - A_0$. Zbiory A_0 i A_1 wyznaczają podział $\mathbb{N}$ na dwie niepuste i rozłączne części. Funkcję G definiujemy tak:
$G(A) = \{\langle m,n\rangle \mid m \in A_0 \wedge n \in A_1\} \cup \{\langle m,n\rangle \mid m,n \in A_0 \wedge m \leq n\} \cup \{\langle m,n\rangle \mid m,n \in A_1 \wedge m \leq n\}$.
A więc w porządku $G(A)$ wszystkie elementy A_0 poprzedzają wszystkie elementy A_1. Jest to porządek liniowy z zerem jako najmniejszym elementem, więc $G(A) \in F^{-1}(\mathcal{Z})$ i nasza funkcja jest dobrze określona. Jest to funkcja różnowartościowa, bo jeśli zbiory $A, B \subseteq \mathbb{N} - \{0,1\}$ są różne i na przykład mamy $a \in A - B$, to liczba a poprzedza jedynkę w porządku $G(A)$ ale nie w porządku $G(B)$.

650a: Wszystkie klasy abstrakcji tej relacji są tej samej mocy, co zbiór $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, czyli są mocy continuum. Dla $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mamy bowiem bijekcję $H : (\mathbb{N} \to \mathbb{Q}) \xrightarrow[\text{na}]{1-1} [f]_r$ określoną wzorem $H(\alpha)(n) = f(n) + \alpha(n)$, gdzie $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ i $n \in \mathbb{N}$. Funkcja H jest dobrze określona, bo dla dowolnych α i n różnica między $f(n)$ i $H(\alpha)(n)$ jest równa wymiernej wartości $\alpha(n)$, co oznacza, że $H(\alpha) \in [f]_r$. Funkcja H jest różnowartościowa, bo jeśli $\alpha(n) \neq \beta(n)$ dla pewnego n, to także $f(n)+\alpha(n) \neq f(n)+\beta(n)$, a więc $H(\alpha) \neq H(\beta)$. Wreszcie H jest na $[f]_r$, bo jeśli $g \in [f]_r$, to $g = H(\lambda n.\, g(n) - f(n))$.

650b: Pokażemy, że zbiór ilorazowy $(\mathbb{N} \to \mathbb{R})/_r$ relacji r jest mocy continuum. Oczywiście moc tego zbioru jest mniejsza lub równa mocy zbioru $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, czyli $\mathfrak{C}$. Wystarczy więc na przykład wskazać injekcję $\Phi : (\mathbb{N} \to \{0,1\}) \xrightarrow{1-1} (\mathbb{N} \to \mathbb{R})/_r$. Zdefiniujemy ją tak: dla $\varphi : \mathbb{N} \to \{0,1\}$ i $n \in \mathbb{N}$ przyjmiemy $\Phi(\varphi) = [f_\varphi]_r$, gdzie $f_\varphi = \lambda n.\, \varphi(n) \cdot \sqrt{2}$. Przypuśćmy, że $\varphi \neq \psi$, tj. $\varphi(n) \neq \psi(n)$, dla pewnego n. Wtedy różnica $f_\varphi(n) - f_\psi(n)$ jest równa $\sqrt{2}$ lub $-\sqrt{2}$ i nie jest wymierna. Zatem funkcje f_φ i f_ψ należą do różnych klas abstrakcji, czyli $\Phi(\varphi) \neq \Phi(\psi)$. Udowodniliśmy więc, że funkcja Φ jest różnowartościowa.

651a: Udowodnimy trudniejszą implikację z prawej do lewej. Potrzebna nam funkcja h o własności $h(n) \geq f(y)$, gdy $g(y) = n$. Czyli wartość $h(n)$ powinna być ograniczeniem górnym zbioru $\{f(y) \mid g(y) = n\} = f(S)$, gdzie $S = g^{-1}(\{n\})$. Skoro zbiór $g(S) = g(g^{-1}(\{n\})) = \{n\}$ jest ograniczony z góry (przez n), to i $f(S)$ jest ograniczony i jako $h(n)$ można przyjąć dowolne jego ograniczenie.

656a: Przy każdym wartościowaniu zmiennych p, q, r nasza formuła jest albo równoważna α albo $\neg\alpha$ albo jest po prostu spełniona lub nie spełniona niezależnie od α. Badamy wszystkie takie wartościowania i ustalamy kiedy α musi być prawdziwa a kiedy fałszywa. Możliwa odpowiedź to $(p \to q) \wedge r$.

661: Formuła φ o zmiennych $p_1, \ldots, p_n$ wyznacza funkcję $\lambda\varrho.\, [\![\varphi]\!]_\varrho : (\{p_1, \ldots, p_n\} \to \{0,1\}) \to \{0,1\}$. Takich funkcji jest dokładnie 2^{2^n}, czyli skończenie wiele. Gdyby każdej z tych funkcji odpowiadało tylko skończenie wiele formuł ze zbioru S, to cały ten zbiór też byłby skończony. Mamy więc nieskończenie wiele formuł wyznaczających tę samą funkcję, a takie formuły są równoważne (mają to samo znaczenie przy każdym wartościowaniu).

662a: Aby skonstruować dowód w naturalnej dedukcji, zazwyczaj postępujemy od końca, tj. szukamy reguły wnioskowania, która ma być użyta w dowodzie jako ostatnia. Jeśli dowodzona formuła jest implikacją, to na ogół dobrym wyborem jest reguła wprowadzania implikacji. W tym przypadku spodziewamy się więc, że przedostatnim osądem w dowodzie jest $p \wedge q \to r \vdash p \to (q \to r)$. Ale ponieważ nadal po prawej stronie mamy implikację, i to podwójną, więc warto podjąć próbę udowodnienia osądu $(p \wedge q) \to r, p, q \vdash r$. Teraz po prawej stronie jest symbol zdaniowy r, a po lewej mamy założenie $(p \wedge q) \to r$, którego docelowym atomem jest też r. To założenie może posłużyć do udowodnienia r

(z pomocą reguły odrywania) jeśli wcześniej udowodnimy koniunkcję $p \wedge q$. Ale to jest łatwe, bo mamy obie składowe p i q. Ostatecznie nasz dowód wygląda tak:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p \wedge q \to r, p, q \vdash p \wedge q \to r}\,(\mathrm{Ax}) \qquad \dfrac{\dfrac{}{p \wedge q \to r, p, q \vdash p}\,(\mathrm{Ax}) \quad \dfrac{}{p \wedge q \to r, p, q \vdash q}\,(\mathrm{Ax})}{p \wedge q \to r, p, q \vdash p \wedge q}\,(\mathrm{W}\wedge)}{p \wedge q \to r, p, q \vdash r}\,(\mathrm{E} \to)}{p \wedge q \to r, p \vdash q \to r}\,(\mathrm{W} \to)}{p \wedge q \to r \vdash p \to (q \to r)}\,(\mathrm{W} \to)}{\vdash (p \wedge q \to r) \to (p \to (q \to r))}\,(\mathrm{W} \to)$$

662b: Osąd $\vdash (p \to q) \to ((\neg p \to q) \to q)$ dostaniemy łatwo z osądu $p \to q, \neg p \to q \vdash q$, a ten ostatni pokażemy z pomocą klasycznej reguły (E¬¬). Użyjemy tu skrótu $\Gamma = \{p \to q, \neg p \to q\}$. Aby otrzymać $\Gamma, \neg q \vdash \bot$, spróbujemy z $\Gamma, \neg q$ wyprowadzić... q, bo mamy w Γ założenia kończące się na q. Z tych dwóch założeń użyjemy $\neg p \to q$, bo pojawi się wtedy negatywny cel dowodowy $\neg p$, który pozwoli na dodanie nowego założenia p. Dowód poniżej wymaga jeszcze na końcu dwukrotnego użycia (W→).

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, \neg q, p \vdash p \to q}\,(\mathrm{Ax}) \quad \dfrac{}{\Gamma, \neg q, p \vdash p}\,(\mathrm{Ax})}{\Gamma, \neg q, p \vdash q}\,(\mathrm{E} \to) \quad \dfrac{}{\Gamma, \neg q, p \vdash \neg q}\,(\mathrm{Ax})}{\Gamma, \neg q, p \vdash \bot}\,(\mathrm{E}\neg)}{\Gamma, \neg q \vdash \neg p}\,(\mathrm{W}\neg) \qquad \dfrac{}{\Gamma, \neg q \vdash \neg p \to q}\,(\mathrm{Ax})}{\Gamma, \neg q \vdash q}\,(\mathrm{E} \to) \qquad \dfrac{}{\Gamma, \neg q \vdash \neg q}\,(\mathrm{Ax})}{\Gamma, \neg q \vdash \bot}\,(\mathrm{E}\neg)}{\Gamma \vdash q}\,(\mathrm{E}\neg\neg)$$

662c: Teraz niech $\Gamma = \{p \to q \vee r, \neg((p \to q) \vee r), p\}$ i zajmijmy się dowodem osądu $\Gamma \vdash q$. Żadne założenie nie kończy się na q, ale jest założenie kończące się alternatywą, więc można próbować dowodu z reguły (E∨). W tym celu wyprowadzimy trzy osądy $\Gamma \vdash q \vee r$, $\Gamma, q \vdash q$ i $\Gamma, r \vdash q$. Jedynie trzeci z nich jest nieoczywisty; dostaniemy go zauważając, że kontekst Γ, r jest sprzeczny.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash p \to q \vee r}\,(\mathrm{Ax}) \quad \dfrac{}{\Gamma \vdash p}\,(\mathrm{Ax})}{\Gamma \vdash q \vee r}\,(\mathrm{E} \to) \qquad \dfrac{}{\Gamma, q \vdash q}\,(\mathrm{Ax}) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, r \vdash r}\,(\mathrm{Ax})}{\Gamma, r \vdash (p \to q) \vee r}\,(\mathrm{W}\vee) \quad \dfrac{}{\Gamma, r \vdash \neg((p \to q) \vee r)}\,(\mathrm{Ax})}{\Gamma, r \vdash \bot}\,(\mathrm{E}\neg)}{\Gamma, r \vdash q}\,(\mathrm{E}\bot)}{\Gamma \vdash q}\,(\mathrm{E}\vee)$$

Na końcu tego dowodu brak jeszcze trzech kroków (W→).

662d: Osąd $p \to q \vee r \vdash (p \to q) \vee r$ wyprowadzimy przez zaprzeczenie. W tym celu wykorzystamy zadanie 662c, z którego wynika $p \to q \vee r, \neg((p \to q) \vee r) \vdash (p \to q) \vee r$.

$$
\dfrac{
\dfrac{}{p \to q \vee r, \neg((p \to q) \vee r) \vdash \neg((p \to q) \vee r)}\,(\mathrm{Ax})
\qquad
\dfrac{\dfrac{\vdots}{p \to q \vee r, \neg((p \to q) \vee r) \vdash p \to q}}{p \to q \vee r, \neg((p \to q) \vee r) \vdash (p \to q) \vee r}\,(\mathrm{W}\vee)
}{
\dfrac{p \to q \vee r, \neg((p \to q) \vee r) \vdash \bot}{\dfrac{p \to q \vee r \vdash (p \to q) \vee r}{\vdash (p \to q \vee r) \to ((p \to q) \vee r)}\,(\mathrm{W}\to)}\,(\mathrm{E}\neg\neg)
}\,(\mathrm{E}\neg)
$$

672: Wskazówka: Czego nie da się przedstawić w postaci sumy dwóch niezerowych składników?

673a: $\forall x \forall y \forall z(R(x,y) \wedge R(y,z) \to R(x,z)) \wedge \forall x \forall y \forall z(S(x,y) \wedge S(y,z) \to S(x,z))$
$\wedge \exists x \exists y \exists z((R(x,y) \vee S(x,y)) \wedge (R(y,z) \vee S(y,z)) \wedge \neg R(x,z) \wedge \neg S(x,z)))$.

673b: $\forall x(s(x) \leftrightarrow \exists y \exists z(x = g(y,z) \wedge r(y) \wedge r(z)))$.

686a: $\forall x \forall y(r(x,y) \wedge s(x,y) \to \exists z(r(x,z) \wedge s(z,y)))$.

686b: $\neg\bot$, bo warunek zachodzi zawsze.

686c: $\forall x \forall y(r(x,x) \wedge r(y,y) \to f(x,x) = f(y,y))$.

687a: $\forall x \forall z \forall y(r(x,y) \wedge s(y,z) \to r(x,z) \wedge s(x,z))$.

687b: $\forall x \forall z \forall y(r(x,y) \wedge s(y,z) \to r(x,z) \wedge s(x,z))$.

687c: $\forall x(\exists y \exists z(x = f(y,z)) \leftrightarrow \exists y(r(x,y) \vee s(x,y)))$.

687c: $\exists x(\neg \exists y r(x,y) \vee \exists y \exists z(r(x,y) \wedge r(x,z) \wedge \neg(y = z)))$.

687d: $\bot$.

689a: Nasza formuła jest spełnialna na przykład w modelu $\mathfrak{C} = \langle \mathbb{N}, P^{\mathfrak{C}}, Q^{\mathfrak{C}}, f^{\mathfrak{C}} \rangle$, gdzie funkcja $f^{\mathfrak{C}}$ jest stale równa 7, a obie relacje $P^{\mathfrak{C}}$ i $Q^{\mathfrak{C}}$ są pełne (tj. $P^{\mathfrak{C}} = Q^{\mathfrak{C}} = \mathbb{N}$). W tym modelu konkluzja implikacji jest w oczywisty sposób prawdziwa.

Formuła ta nie jest tautologią, bo nie jest prawdziwa na przykład w modelu $\mathcal{B} = \langle \mathbb{N}, P^{\mathcal{B}}, Q^{\mathcal{B}}, f^{\mathcal{B}} \rangle$, gdzie $Q^{\mathcal{B}}$ jest zbiorem pustym, $P^{\mathcal{B}} = \{0,1,2\}$, a $f^{\mathcal{B}}$ jest funkcją następnika. Teraz przesłanka jest spełniona, bo $\mathcal{B}, 0 \models P(x)$, więc także $\mathcal{B}, 0 \models \forall y(P(x) \vee Q(y))$. Ale $\mathcal{B}, 4 \not\models P(f(y)) \vee Q(y)$, bo $4 \notin Q^{\mathcal{B}}$ oraz $f^{\mathcal{B}}(4) = 5 \notin P^{\mathcal{B}}$. Zatem konkluzja nie jest spełniona.

689b: Pokażemy, że $\mathcal{A} \models \forall y(P(f(y)) \vee Q(y)) \to \exists x \forall y(P(x) \vee Q(y))$, dla każdego $\mathcal{A} = \langle A, P^{\mathcal{A}}, Q^{\mathcal{A}}, f^{\mathcal{A}} \rangle$. Rozpatrzymy dwa przypadki. Najpierw przypuśćmy, że $f^{\mathcal{A}}(a) \in P^{\mathcal{A}}$, dla pewnego $a \in A$. Wtedy mamy $\mathcal{A}, f^{\mathcal{A}}(a) \models P(x)$. Stąd $\mathcal{A}, f^{\mathcal{A}}(a) \models \forall y(P(x) \vee Q(y))$, a więc $\mathcal{A} \models \exists x \forall y(P(x) \vee Q(y))$. W drugim przypadku $f^{\mathcal{A}}(a) \notin P^{\mathcal{A}}$, dla wszystkich $a \in A$. Można założyć, że $\mathcal{A} \models \forall y(P(f(y)) \vee Q(y))$ (w przeciwnym razie cała formuła jest trywialnie prawdziwa). To znaczy, że $\mathcal{A}, a \models P(f(y)) \vee Q(y)$, dla wszystkich $a \in A$. Ale teraz mamy zawsze $\mathcal{A}, a \not\models P(f(y))$, więc dla każdego $a \in A$ musi być $\mathcal{A}, a \models Q(y)$. Biorąc jakiekolwiek $b \in B$, otrzymamy $\mathcal{A}, a, b \models P(x) \vee Q(y)$, skąd $\mathcal{A}, b \models \forall y(P(x) \vee Q(y))$ i wreszcie $\mathcal{A} \models \exists x \forall y(P(x) \vee Q(y))$.

690a: Ta formuła nie jest tautologią. Niech $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, P^{\mathcal{A}}, Q^{\mathcal{A}} \rangle$, gdzie $P^{\mathcal{A}} = Q^{\mathcal{A}} = \{13\}$. Wówczas $\mathcal{A} \models \exists y P(y)$, bo $P^{\mathcal{A}} \neq \varnothing$, oraz $\mathcal{A} \not\models \forall z Q(z)$, bo $Q^{\mathcal{A}} \neq \mathbb{N}$. Zatem $\mathcal{A} \not\models \exists y P(y) \to \forall z Q(z)$. Tymczasem $\mathcal{A} \models \exists y \forall z(P(y) \to Q(z))$, bo $\mathcal{A}, v \models \forall z(P(y) \to Q(z))$ na przykład dla $v(y) = 7$.

690b: Ta formuła jest tautologią. Można to sprawdzić stwierdzając, że założenie $\exists y P(y) \to \forall z Q(z)$ jest równoważne formule $\neg \exists y P(y) \vee \forall z Q(z)$, i dalej kolejno każdej z formuł: $\forall y \neg P(y) \vee \forall z Q(z)$, $\forall y(\neg P(y) \vee \forall z Q(z))$, $\forall y \forall z(\neg P(y) \vee Q(z))$, $\forall y \forall z(P(y) \to Q(z))$. A zatem całość jest równoważna formule $\forall y \forall z(P(y) \to Q(z)) \to \forall y \forall z(P(y) \to Q(z))$, która jest trywialną tautologią.

691a: Tak. Wynika to z następujących równoważności:

- $\models \exists x(P(x) \to \forall y Q(y)) \leftrightarrow \exists x(\neg P(x) \vee \forall y Q(y))$;
- $\models \exists x(\neg P(x) \vee \forall y Q(y)) \leftrightarrow \exists x \forall y(\neg P(x) \vee Q(y))$ (bo y nie jest wolne w $\neg P(x)$);
- $\models \exists x \forall y(\neg P(x) \vee Q(y)) \leftrightarrow \exists x \forall y(P(x) \to Q(y))$.

691b: Nie. Kontrprzykładem jest model $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, P^{\mathcal{A}}, Q^{\mathcal{A}} \rangle$, w którym $P^{\mathcal{A}} = \varnothing$ oraz $Q^{\mathcal{A}} = \{2, 3, 5, 7\}$. Wtedy $\mathcal{A} \not\models \forall y Q(y)$, bo $Q^{\mathcal{A}} \neq \mathbb{N}$, a zatem $\mathcal{A} \models \exists x(\forall y Q(y) \to P(x))$ (wartościowanie $x \mapsto 4$).

Tymczasem, jakie by nie było $a \in \mathbb{N}$, zawsze $\mathcal{A}, \{x \mapsto a, y \mapsto 5\} \not\models Q(y) \to P(x)$. Dlatego $\mathcal{A}, \{x \mapsto a\} \not\models \forall y(Q(y) \to P(x))$ i ostatecznie $\mathcal{A} \not\models \exists x \forall y(Q(y) \to P(x))$.

691c: Tak. Rozpatrzmy dowolny model $\mathcal{A} = \langle A, P^{\mathcal{A}}, Q^{\mathcal{A}} \rangle$. Jeśli $\mathcal{A} \not\models \exists x(\forall y Q(y) \to P(x))$, to oczywiście $\mathcal{A} \models \exists x(\forall y Q(y) \to P(x)) \to \exists x(Q(x) \to P(x))$. Przypuśćmy więc, że $\mathcal{A} \models \exists x(\forall y Q(y) \to P(x))$. Oznacza to, że $\mathcal{A}, \{x \mapsto a\} \models \forall y Q(y) \to P(x)$, dla pewnego $a \in A$. Mamy więc dwa przypadki. Pierwszy zachodzi wtedy, gdy $\mathcal{A}, \{x \mapsto a\} \models P(x)$, czyli gdy $a \in P^{\mathcal{A}}$. Wtedy $\mathcal{A}, \{x \mapsto a\} \models Q(x) \to P(x)$, a zatem $\mathcal{A} \models \exists x(Q(x) \to P(x))$.

Drugi przypadek zachodzi wtedy, gdy $\mathcal{A}, \not\models \forall y Q(y)$, czyli gdy $Q^{\mathcal{A}} \neq A$. Jest więc takie $b \in A$, że $\mathcal{A}, \{x \mapsto b\} \not\models Q(x)$. Stąd mamy $\mathcal{A}, \{x \mapsto b\} \models Q(x) \to P(x)$, więc także $\mathcal{A} \models \exists x(Q(x) \to P(x))$.

stosując prawa De Morgana i prawa dystrybutywności.

693a: W przeciwieństwie do schematu zdaniowego $(p \to q) \vee (q \to p)$, nasza formuła nie jest tautologią. Na przykład w dziedzinie liczb naturalnych symbol p może oznaczać własność podzielności przez 3, a symbol q własność podzielności przez 7.

693b: Tak. Jeśli bowiem wszystkie elementy y danej dziedziny spełniają $P(y)$, to warunek oczywiście jest spełniony. A jeśli znajdzie się takie a, że $P(a)$ nie zachodzi, to implikacja $P(a) \to \forall y P(y)$ jest spełniona „walkowerem".

693c: Nie. Wskazówka: wybór v zależy nie tylko od u ale także od x, a nawet od y.

703a: Ta implikacja jest tautologią. Wystarczy w tym celu zauważyć równoważność kolejnych formuł: $(\forall x P(x) \to \forall y Q(y)) \to \exists y R(y)$, $\neg(\forall x P(x) \to \forall y Q(y)) \vee \exists y R(y)$, $(\forall x P(x) \wedge \neg \forall y Q(y)) \vee \exists y R(y)$, $(\forall x P(x) \wedge \exists y \neg Q(y)) \vee \exists y R(y)$, $\forall x(P(x) \wedge \exists y \neg Q(y)) \vee \exists y R(y)$, $\forall x((P(x) \wedge \exists y \neg Q(y)) \vee \exists y R(y))$, $\forall x(\exists y(P(x) \wedge \neg Q(y)) \vee \exists y R(y))$, $\forall x \exists y((P(x) \wedge \neg Q(y)) \vee \exists y R(y))$, $\forall x \exists y(\neg(P(x) \to Q(y)) \vee \exists y R(y))$, $\forall x \exists y((P(x) \to Q(y)) \to \exists y R(y))$.

703b: Ta implikacja nie jest prawdziwa w modelu $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, P^{\mathcal{A}}, Q^{\mathcal{A}}, R^{\mathcal{A}} \rangle$, gdzie $P^{\mathcal{A}} = \mathbb{N}$, $Q^{\mathcal{A}} = \{2, 3\}$ i $R^{\mathcal{A}} = \varnothing$. Mamy bowiem $\mathcal{A}, \{n/x, 4/y\} \not\models P(x) \to Q(y)$ dla dowolnej liczby $n \in \mathbb{N}$. A zatem $\mathcal{A} \models \forall x \exists y((P(x) \to Q(y)) \to R(y))$. Ponieważ $Q^{\mathcal{A}} \neq \varnothing$, więc $\mathcal{A} \models \forall x P(x) \to \exists y Q(y)$, ale przecież $\mathcal{A} \not\models \exists y R(y)$. A więc formuła 703b nie jest tautologią.

704a: Tak. Zauważmy, że przesłanka implikacji jest równoważna zdaniu $\forall x(\neg P(x) \vee \exists y Q(y))$. Ponieważ x nie jest wolne w $\exists y Q(y)$, to zdanie jest równoważne $\forall x \neg P(x) \vee \exists y Q(y)$, a zatem zdaniu $\neg \exists x P(x) \vee \exists y Q(y)$. Ale y nie jest wolne w $\neg \exists x P(x)$, więc nasze zdanie jest równoważne formule $\exists y(\neg \exists x P(x) \vee Q(y))$. A to jest równoważne konkluzji naszej implikacji.

704b: Nie. Weźmy $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, P^{\mathcal{A}}, Q^{\mathcal{A}} \rangle$, gdzie $P^{\mathcal{A}} = \{11\}$ i $Q^{\mathcal{A}} = \varnothing$. Wtedy $\mathcal{A} \not\models \forall x P(x)$, więc mamy np. $\mathcal{A}, 5 \models \forall x P(x) \to Q(y)$. Zatem przesłanka implikacji jest prawdziwa w $\mathcal{A}$. Natomiast $\mathcal{A}, 11 \not\models P(x) \to \exists y Q(y)$, więc konkluzja jest fałszywa.

706a: Jeśli w zbiorze $\mathbb{N}$ przyjmiemy, że $R(n)$ zachodzi dla $n > 0$, a warunek S określimy jako zawsze fałszywy, to przesłanka naszej formuły $\forall x R(x) \to \exists y S(y)$ będzie spełniona „walkowerem". Ale konkluzja $\forall x \exists y(R(x) \to S(y))$ nie będzie spełniona. Dla $x = 5$ nie znajdziemy takiego n, aby ze spełnionego warunku $5 > 0$ wynikał niemożliwy warunek $S(n)$. A więc formuła (a) nie jest tautologią.

706b: Ta formuła jest tautologią, bo przesłanka i konkluzja są w istocie równoważne. Aby się o tym przekonać przekształcimy konkluzję $\exists x(R(x) \to S(x))$ najpierw do postaci $\exists x(\neg R(x) \vee S(x))$, potem do postaci $\exists x \, \neg R(x) \vee \exists x \, S(x)$, a nastepnie do $\neg \forall x \, R(x) \vee \exists x \, S(x)$. W końcu dostajemy formułę $\forall x \, R(x) \to \exists x \, S(x)$, różniącą się od $\forall x \, R(x) \to \exists y \, S(y)$ tylko nazwą jednej zmiennej związanej.

707: Przykład z jednym symbolem relacyjnym: $\forall x \exists y \forall z(P(x, y) \wedge \neg P(y, x) \wedge P(y, z) \to P(x, z))$.