Podstawy matematyki – klasówka poprawkowa 16 stycznia 2023

1. Niech $\mathsf{P}_{\text{fin}+}(\mathbb{N})$ oznacza zbiór wszystkich skończonych niepustych podzbiorów $\mathbb{N}$ i niech funkcja $\psi : \mathsf{P}_{\text{fin}+}(\mathbb{N}) \to (\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N})$ będzie zdefiniowana następująco:

$$\psi(A)(f) = \max\{f(a) \mid a \in A\} \text{ dla każdego } A \in \mathsf{P}_{\text{fin}+}(\mathbb{N}).$$

   (a) Czy funkcja ψ jest różnowartościowa?
   (b) Czy funkcja ψ jest na $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$?
   (c) Wyznaczyć przeciwobrazy
      i. Zbioru C wszystkich funkcji stałych z $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ do $\mathbb{N}$;
      ii. Zbioru R wszystkich funkcji różnowartościowych z $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ do $\mathbb{N}$;
      iii. Zbioru S wszystkich surjekcji z $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ na $\mathbb{N}$,

      przy przekształceniu ψ.

2. Niech relacja $s \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ będzie zdefiniowana następująco:

   fsg wtedy i tylko wtedy, gdy $\forall n \in \mathbb{N}\,(f(n) = 1 \to g(n) = 1)$.

   (a) Udowodnić, że relacja $r = s \cap s^{-1}$ jest relacją równoważności w $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.
   (b) Jaka jest moc zbioru ilorazowego relacji r?
   (c) Jakie liczby kardynalne są mocami klas abstrakcji relacji r?

Uwaga: W rozwiązaniach można się powoływać na ogólnie znane fakty (np. z wykładu, skryptu, wspólnych zadań domowych).

Rozwiązania

1a: Tak. Jeśli $a \in A - B$, to $\psi(A)(f) = 1 \neq 0 = \psi(B)(f)$, dla $f(n) = \texttt{if}\ n = a\ \texttt{then}\ 1\ \texttt{else}\ 0$.

1b: Nie, na przykład jeśli $\alpha = \lambda f.\,1$ to $\alpha \neq \psi(A)$, dla każdego A. Istotnie, na przykład $\psi(A)(\lambda n.\,0) = \max\{0\} = 0 \neq 1 = \alpha(\lambda n.\,0)$.

1(c)i: Zbiór $\psi^{-1}(C)$ jest pusty, bo $\psi(A)$ nigdy nie jest funkcją stałą. Jeśli bowiem $\psi(A) = \lambda f.\,k$, to $\psi(A)(f) = k$ dla każdego f. Ale dla $f = \lambda n.\,k+1$ będzie $\psi(A)(f) = \max\{k+1\} = k+1$.

1(c)ii: Zbiór $\psi^{-1}(R)$ też jest pusty, bo $R = \varnothing$ (moc zbioru $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ jest większa od mocy zbioru $\mathbb{N}$).

1(c)iii: Ale $\psi^{-1}(S) = \mathsf{P}_{\text{fin}+}(\mathbb{N})$, bo każda funkcja postaci $\psi(A)$ jest surjekcją. Dla dowolnego k mamy $\psi(A)(\lambda n.\,k) = \max\{k\} = k$.

2a: Ponieważ $f(n) = 1$ to to samo co $n \in f^{-1}(\{1\})$, więc fsg zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $f^{-1}(\{1\}) \subseteq g^{-1}(\{1\})$. A zatem frg zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $f^{-1}(\{1\}) = g^{-1}(\{1\})$. Relacja r jest więc jądrem operacji $\lambda f.\,f^{-1}(\{1\})$, czyli relacją równoważności.

2b: Zbiór ilorazowy jest równoliczny z $\mathsf{P}(\mathbb{N})$, ponieważ dla każdego $A \subseteq \mathbb{N}$ klasa abstrakcji $[\chi_A]_r$ (gdzie χ_A to funkcja charakterystyczna zbioru A) jest inna.

2c: Niech $B = \mathbb{N} - f^{-1}(\{1\})$. Zauważmy, że dla każdej klasy abstrakcji $[f]_r$ istnieje bijekcja $\lambda g.g{\restriction}B$ z $[f]_r$ w zbiór funkcji $(\mathbb{N} - \{1\})^B$. A zatem moc $[f]_r$ zależy od mocy B. Jeśli B jest pusty, to mocą $[f]_r$ jest 1, gdyż tylko dla $f = \lambda x.1$ zachodzi $f^{-1}(\{1\}) = \mathbb{N}$. Jeśli B jest niepusty, ale skończony, to zbiór $(\mathbb{N} - \{1\})^B$ ma moc $\aleph_0$ i taka jest też moc $[f]_r$. W pozostałym przypadku, gdy B jest nieskończony, moc $[f]_r$ to continuum.