Podstawy matematyki – klasówka 14.12.2023

1. Niech $\mathsf{P}_{\text{fin}+}(\mathbb{N})$ oznacza zbiór wszystkich skończonych niepustych podzbiorów $\mathbb{N}$ i niech funkcja $\varphi : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to (\mathsf{P}_{\text{fin}+}(\mathbb{N}) \to \mathbb{N})$ będzie zdefiniowana następująco:
$$\varphi(f)(A) = \max\{f(a) \mid a \in A\} \text{ dla każdego } A \in \mathsf{P}_{\text{fin}+}(\mathbb{N}).$$
   (a) Czy funkcja φ jest różnowartościowa?
   (b) Czy funkcja φ jest na $\mathsf{P}_{\text{fin}+}(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}$?
   (c) Niech $g : \mathsf{P}_{\text{fin}+}(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}$ będzie taką funkcją, że $g(A) = \max A$, dla $A \in \mathsf{P}_{\text{fin}+}(\mathbb{N})$. Wyznaczyć moc zbioru $\varphi^{-1}(\{g\})$.
   (d) Wyznaczyć moc zbioru takich funkcji $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, że dla każdego $A \in \mathsf{P}_{\text{fin}+}(\mathbb{N})$ zachodzi $\varphi(f)(A) = f(\min A)$.

2. Niech relacja $s \subseteq \mathsf{P}(\mathbb{N}) \times \mathsf{P}(\mathbb{N})$ będzie zdefiniowana następująco:
   AsB wtedy i tylko wtedy, gdy $\forall n \in A\, \exists m \in B\, \exists p \in \mathbb{N}\, (n = m \cdot 2^p \vee m = n \cdot 2^p)$.
   (a) Podać przykład nieskończonego ciągu różnych zbiorów $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, o tej własności, że $A_n \, s \, A_{n+1}$, dla każdego $n \in \mathbb{N}$.
   (b) Udowodnić, że relacja $r = s \cap s^{-1}$ jest relacją równoważności w $\mathsf{P}(\mathbb{N})$.
   (c) Jaka jest moc zbioru ilorazowego relacji r?
   (d) Jakie liczby kardynalne są mocami klas abstrakcji relacji r?

Uwaga: W rozwiązaniach można się powoływać na ogólnie znane fakty (np. z wykładu, skryptu, wspólnych zadań domowych).

Rozwiązania

1a: Zauważmy, że dla każdego $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ i każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi $\varphi(f)(\{n\}) = f(n)$. Jeśli $f \neq g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, to istnieje takie $n \in \mathbb{N}$, że $f(n) \neq g(n)$. Wtedy $\varphi(f)(\{n\}) \neq \varphi(g)(\{n\})$, a zatem $\varphi(f) \neq \varphi(g)$. Czyli φ jest różnowartościowa.

1b: Zauważmy, że dla każdego $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ i każdych $A, B \subseteq \mathbb{N}$ z warunku $A \subseteq B$ wynika $\varphi(f)(A) \leq \varphi(f)(B)$. Żadna funkcja, która nie spełnia tej implikacji, nie będzie więc w zbiorze wartości φ. Na przykład dla funkcji $g = \lambda A.\min A$ zachodzi $g(\{0,1\}) = 0$ i $g(\{1\}) = 1$, czyli $g(\{0\}) \not\leq g(\{0,1\})$, chociaż $\{0\} \subseteq \{0,1\}$. A zatem $g \notin \mathrm{Rg}(\varphi)$, więc φ nie jest surjekcją.

1c: Przypuśćmy, że $f \in \varphi^{-1}(\{g\})$, tj. że $\varphi(f) = g$. Wtedy $\varphi(f)(\{n\}) = g(\{n\}) = \max\{n\} = n$, dla każdego n. Ale z części (1a) wiemy, że $\varphi(f)(\{n\}) = f(n)$. Stąd $f(n) = n$. Zbiór $\varphi^{-1}(\{g\})$ jest więc jednoelementowy. Należy do niego tylko funkcja identycznościowa.

1d: Niech $\mathcal{Z} = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid \forall A \in \mathsf{P}_{\text{fin}+}(\mathbb{N}).\, \varphi(f)(A) = f(\min A)\}$ i niech $f \in \mathcal{Z}$. Warunek $\varphi(f)(A) = f(\min A)$ oznacza to samo co $\max f(A) = f(\min A)$. W szczególności dla $m \leq n$ mamy $f(m) = f(\min\{m,n\}) = \max\{f(m), f(n)\}$ czyli $f(m) \geq f(n)$. A więc wszystkie funkcje ze zbioru $\mathcal{Z}$ są nierosnące. I na odwrót, jeśli f jest funkcją nierosnącą, to największym elementem zbioru $f(A)$ jest $f(\min A)$. A zatem $\mathcal{Z}$ to zbiór wszystkich funkcji nierosnących z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{N}$, o którym mowa w zadaniu domowym 212. Jest to zbiór mocy $\aleph_0$.

2: Niech $\nu(n)$ oznacza największy nieparzysty dzielnik liczby $n \neq 0$ i niech $\nu(0) = 0$. Zauważmy teraz, że warunek $n = m \cdot 2^p \vee m = n \cdot 2^p$, występujący w definicji relacji s, zachodzi dokładnie wtedy kiedy $\nu(n) = \nu(m)$. A zatem $A\, s\, B$ oznacza to samo, co zawieranie obrazów $\nu(A) \subseteq \nu(B)$.

2a: Taki ciąg tworzą na przykład zbiory $A_n = \{1, 3, \ldots, 2n+1\}$.

2b: Relacja $r = s \cap s^{-1}$ jest jądrem operacji obrazu funkcji ν, czyli przekształcenia $\lambda A.\, \nu(A)$.

2c: Zbiór wszystkich klas abstrakcji relacji r jest co najwyżej takiej mocy jak zbiór $\mathsf{P}(\mathbb{N})$, czyli mocy $\mathfrak{C}$. Ale jest też co najmniej tej mocy, bo każdy zbiór Z złożony z samych liczb nieparzystych wyznacza inną klasę abstrakcji. Istotnie, wtedy $\nu(Z) = Z$. Zatem jeśli $Z_1 \neq Z_2$, to $[Z_1]_r \neq [Z_2]_r$. Ostatecznie moc naszego zbioru ilorazowego jest równa $\mathfrak{C}$.

2d: Najpierw zauważmy przypadki szczególne: klasa $[\varnothing]_r$ jest jednoelementowa, bo tylko pusty zbiór ma pusty obraz. Podobnie, klasa $[\{0\}]_r$ jest jednoelementowa, bo tylko dla $A = \{0\}$ zachodzi $\nu(A) = \{0\}$. Niech więc $A \neq \varnothing, \{0\}$ i niech $n \in A$ dla pewnego $n \neq 0$. Określimy $G : \mathsf{P}(\mathbb{N}) \to [A]_r$ w ten sposób: $G(X) = \nu(A) \cup \{n \cdot 2^{k+1} \mid k \in X\}$. Sprawdźmy, czy funkcja jest dobrze określona, tj. czy $G(X) \in [A]_r$ dla dowolnego $X \subseteq \mathbb{N}$. Otóż jest, bo $\nu(G(X)) = \nu(A) \cup \{\nu(n)\} = \nu(A)$, co wynika stąd, że $\nu(\nu(m)) = \nu(m) = m$ dla nieparzystych m i dla $m = 0$, oraz stąd, że $\nu(n \cdot 2^k) = \nu(n)$ dla każdego $k \in \mathbb{N}$. Teraz sprawdźmy różnowartościowość funkcji G: jeśli $X_1 \neq X_2$, na przykład $k \in X_1 - X_2$, to liczba $n \cdot 2^{k+1}$ należy do zbioru $G(X_1)$, ale nie należy żadnego z dwóch składników sumy $G(X_2)$. Do drugiego wprost z definicji, a do pierwszego dlatego, że jest parzysta i różna od zera. Ponieważ $[A]_r \subseteq \mathsf{P}(\mathbb{N})$, więc już wiemy, że klasa $[A]_r$ jest mocy continuum. A zatem poszukiwane liczby kardynalne to 1 i $\mathfrak{C}$.