

Podstawy matematyki dla informatyków

Dodatkowe obrazki

Zadanie: Mamy relację równoważności w zbiorze $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$:

$$f \sim g \quad \text{wtw, gdy} \quad \forall x : \mathbb{N}. |f(x) - g(x)| \in \mathcal{P}r.$$

Jakiej mocy jest zbiór ilorazowy $(\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N})/\sim$?

Rozwiązanie: Takiej samej jak zbiór $\mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ wszystkich ciągów zerojedynkowych. Po pierwsze, mamy injekcję:

$$\lambda \alpha. [\alpha]_\sim : (\mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}) \xrightarrow{1-1} (\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N})/\sim$$

Po drugie, możemy określić też injekcję

$$H : (\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N})/\sim \xrightarrow{1-1} (\mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}).$$

Zróbmy to tak: dla dowolnej klasy $[f]_\sim \in (\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N})/\sim$, niech

$$H([f]_\sim) = (\lambda x. f(x) \bmod 2)$$

Ale czy to jest dobrze określona funkcja?

Definiujemy $H : (\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N})/\sim \xrightarrow{1-1} (\mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\})$

przyjmując, że $H([f]_\sim) = (\lambda x. f(x) \bmod 2)$

Czy to jest dobrze określona funkcja?

Tak, bo definicja **nie zależy od wyboru reprezentanta**.

To znaczy, że jeśli $[f]_\sim = [g]_\sim$, to funkcje $\lambda x. f(x) \bmod 2$ i $\lambda x. g(x) \bmod 2$ są takie same.

Bo wtedy $f \sim g$, czyli $|f(x) - g(x)| \in \mathcal{P}r$ dla $x \in \mathbb{N}$.

Zadanie: Mamy relację równoważności w zbiorze $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$:

$$f \sim g \quad \text{wtw, gdy} \quad \forall x : \mathbb{N}. |f(x) - g(x)| \in \mathcal{P}r.$$

Jakiej mocy jest zbiór ilorazowy $(\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N})/\sim$?

Rozwiązanie:

Zdefiniowaliśmy dwie funkcje

$$1) \lambda \alpha. [\alpha]_\sim : (\mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}) \xrightarrow{1-1} (\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N})/\sim$$

$$2) H : (\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N})/\sim \xrightarrow{1-1} (\mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}),$$

gdzie $H([f]_\sim) = (\lambda x. f(x) \bmod 2)$.

Z twierdzenia Cantora-Bersteina wynika, że zbiór $(\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N})/\sim$ jest tej samej mocy co zbiór $\mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$, czyli mocy $\mathfrak{C}$.

(Trzeba tylko sprawdzić, że to naprawdę są injekcje.)

Mamy relację równoważności w zbiorze $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$:

$$f \sim g \quad \text{wtw, gdy} \quad \forall x : \mathbb{N}. |f(x) - g(x)| \in \mathcal{P}r.$$

Sprawdzamy, że funkcja

$\lambda \alpha. [\alpha]_\sim : (\mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}) \xrightarrow{1-1} (\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N})/\sim$ jest różnowartościowa.

Niech $\alpha, \beta \in \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ oraz $\alpha \neq \beta$. Wtedy $\alpha(n) \neq \beta(n)$, dla pewnego n , co oznacza, że $|\alpha(n) - \beta(n)| = 1 \notin \mathcal{P}r$. Zatem klasy $[\alpha]_\sim$ i $[\beta]_\sim$ są różne.

Mamy relację równoważności w zbiorze $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$:

$$f \sim g \quad \text{wtw, gdy} \quad \forall x : \mathbb{N}. |f(x) - g(x)| \in \mathcal{P}r.$$

Sprawdzamy, że funkcja $H : (\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N})/\sim \xrightarrow{1-1} (\mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\})$, gdzie $H([f]_\sim) = (\lambda x. f(x) \bmod 2)$, jest różnowartościowa.

Rozpatrzmy dwie dowolne różne klasy relacji r , powiedzmy $[f]_\sim$ i $[g]_\sim$. Wtedy $\langle f, g \rangle \notin r$, czyli...

istnieje takie $x \in \mathbb{N}$, że $|f(x) - g(x)| \notin \mathcal{P}r$.

Ale to znaczy, że jedna z liczb $f(x)$ i $g(x)$ jest parzysta, a druga nie. Czyli ich reszty modulo 2 są różne.

Zadanie: Mamy relację równoważności w zbiorze $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$:

$$f \sim g \quad \text{wtw, gdy} \quad \forall x : \mathbb{N}. |f(x) - g(x)| \in \mathcal{P}r.$$

Jakiej mocy są klasy abstrakcji tej relacji?

Rozwiązanie: Dla dowolnej funkcji $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ klasa $[f]_r$ jest mocy continuum.

Część łatwa: Klasa $[f]_r$ jest zawarta w zbiorze wszystkich funkcji z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{N}$, który jest mocy $\mathfrak{C}$. Zatem $\overline{[f]_r} \leq \mathfrak{C}$.

Zadanie: Mamy relację równoważności w zbiorze $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$:

$$f \sim g \quad \text{wtw, gdy} \quad \forall x : \mathbb{N}. |f(x) - g(x)| \in \mathcal{P}r.$$

Jakiej mocy są klasy abstrakcji tej relacji?

Rozwiązanie: Dla dowolnej funkcji $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ klasa $[f]_r$ jest mocy continuum.

Część trudna: Potrzebna jest iniekcja $F : \mathcal{A} \xrightarrow{1-1} [f]_r$, gdzie $\mathcal{A}$ jest jakimś zbiorem mocy continuum.

Spróbujmy $\mathcal{A} = \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{P}r$ i $F(h) = f + h$ (ściślej $F(h)(n) = f(n) + h(n)$).

Zadanie: Mamy relację równoważności w zbiorze $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$:

$$f \sim g \quad \text{wtw, gdy} \quad \forall x : \mathbb{N}. |f(x) - g(x)| \in \mathcal{P}r.$$

Jakiej mocy są klasy abstrakcji tej relacji?

Rozwiązanie, cd.: Dowodzimy, że funkcja $F = \lambda h. f + h$ jest iniekcją z $\mathbb{N} \rightarrow \mathcal{P}r$ do $[f]_r$.

1. Ta funkcja jest dobrze określona, tj. $F(h) \in [f]_r$ dla każdej funkcji $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{P}r$. Istotnie, dla każdego x :

$$|F(h)(x) - f(x)| = |h(x)| = h(x) \in \mathcal{P}r.$$

2. I jest różnowartościowa, bo jeśli $h \neq h'$, to $h(x) \neq h'(x)$, dla pewnego x . Wtedy także wartości $F(h)(x) = h(x) + f(x)$ i $F(h')(x) = h'(x) + f(x)$ są różne, skąd $F(h) \neq F(h')$.

Zadanie: Jakiej mocy jest zbiór wszystkich relacji równoważności w $\mathbb{N}$?

Rozwiązanie: Niech $\mathcal{R}$ oznacza zbiór wszystkich relacji równoważności w $\mathbb{N}$. Co to jest?

To jest podzbiór zbioru wszystkich relacji w $\mathbb{N}$. Czyli $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$.

A zatem $\overline{\mathcal{R}} \leq \overline{\mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})} = \mathfrak{C}$.

Sprawdźmy, że także $\mathfrak{C} \leq \overline{\mathcal{R}}$. Stąd $\overline{\mathcal{R}} = \mathfrak{C}$.

Zadanie: Jakiej mocy jest zbiór $\mathcal{R}$ wszystkich relacji równoważności w $\mathbb{N}$?

Rozwiązanie, cd.: Chcemy pokazać, że $\mathfrak{C} \leq \overline{\mathcal{R}}$.

Wystarczy wskazać funkcję $F : X \xrightarrow{1-1} \mathcal{R}$, gdzie X jest jakimś zbiorem mocy continuum. Jaki zbiór wybrać?

Spróbujmy $X = \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Szukamy funkcji $F : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \xrightarrow{1-1} \mathcal{R}$.

To znaczy, że dla różnych $A, B \subseteq \mathbb{N}$ relacje $F(A)$ i $F(B)$ powinny być różne. Czyli wyznaczać różne podziały.

Pierwszy pomysł: $F(A)$ to relacja o klasach A i $\mathbb{N} - A$.

Źle, bo $F(A) = F(\mathbb{N} - A)$, a $F(\emptyset)$ nie jest podziałem.

Zadanie: Jakiej mocy jest zbiór $\mathcal{R}$ wszystkich relacji równoważności w $\mathbb{N}$?

Rozwiązanie, cd.: Szukamy funkcji $F : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \xrightarrow{1-1} \mathcal{R}$.

Pierwszy pomysł: $F(A)$ to relacja o klasach A i $\mathbb{N} - A$. Tak jest niedobrze. Jak to poprawić?

Można np. tak: $F(A)$ to relacja o klasach A^* i $\mathbb{N} - A^*$, gdzie $A^* = \{2n \mid n \in A\} \cup \{1\}$.

Oba zbiory A^* i $\mathbb{N} - A^*$ są niepuste i mamy dobry podział.

Ale czy funkcja F jest różnowartościowa?

Tak, przypuśćmy, że $A \neq B$, np. $x \in A - B$.

Wtedy $2x \in A^*$, czyli $\langle 2x, 1 \rangle \in F(A)$.

Ale $2x \notin B^*$, więc $\langle 2x, 1 \rangle \notin F(B)$. Stąd $F(A) \neq F(B)$.

Zadanie: Jakiej mocy jest zbiór $\mathcal{P}$ wszystkich porządków częściowych w $\mathbb{R}$?

Rozwiązanie: Po pierwsze każdy porządek częściowy jest relacją w $\mathbb{R}$, więc $\overline{\mathcal{P}} \leq \overline{P(\mathbb{R} \times \mathbb{R})} = 2^{\mathfrak{c}}$.

Po drugie pokażemy, że $2^{\mathfrak{c}} \leq \overline{\mathcal{P}}$.

Pierwszy pomysł: Spróbujmy pokazać, że $\overline{P(\mathbb{R})} \leq \overline{\mathcal{P}}$.

Jeśli $X \subseteq \mathbb{R}$, to określmy taką relację $\leq_X$, że dla $x, y \in \mathbb{R}$:

$x \leq_X y$ wtw, gdy albo $x = y$, albo $x \in X$ i $y \notin X$.

Relacja $\leq_X$ jest (oczywiście?) porządkiem częściowym. Zatem mamy funkcję $\lambda X. \leq_X : P(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}$.

Dlaczego to jest niedobrze i jak to poprawić?

Jest niedobrze, bo $\leq_{\emptyset}$ i $\leq_{\mathbb{R}}$ to ta sama relacja.

Zatem $\lambda X. \leq_X$ nie jest injekcją.

Trzeba się pozbyć np. $\mathbb{R}$...

Zadanie: Jakiej mocy jest zbiór $\mathcal{P}$ wszystkich porządków częściowych w $\mathbb{R}$?

Rozwiązanie c.d. Pokażemy, że $\overline{P(\mathbb{R}_+)} \leq \overline{\mathcal{P}}$.

Jeśli $X \subseteq \mathbb{R}_+$, to określmy taką relację $\leq_X$, że dla $x, y \in \mathbb{R}$:

$x \leq_X y$ wtw, gdy albo $x = y$, albo $x \in X$ i $y \notin X$.

Tak otrzymamy injekcję $\lambda X. \leq_X : P(\mathbb{R}_+) \xrightarrow{1-1} \mathcal{P}$.

Ale dlaczego to jest injekcja?

Bo jeśli $X \neq Y$, np. $a \in X - Y$, to $a \leq_X -1$, ale $a \not\leq_Y -1$.

Wnioski: Ponieważ $\mathbb{R}_+ \sim \mathbb{R}$, więc $P(\mathbb{R}_+) \sim P(\mathbb{R})$.

A zatem $\overline{\mathcal{P}} \leq \overline{P(\mathbb{R}_+)} = 2^{\mathfrak{c}}$

i z twierdzenia Cantora-Bernsteina $\overline{\mathcal{P}} = 2^{\mathfrak{c}}$.

Zadanie: W zbiorze $P(\mathbb{N} - \{0\}) - \{\emptyset\}$ określamy relację $\sqsubseteq$:

$$A \sqsubseteq B \leftrightarrow A = B \vee \forall xy (x \in A \wedge y \in B \rightarrow x | y).$$

1. Udowodnić, że $\sqsubseteq$ jest relacją porządku częściowego w $P(\mathbb{N} - \{0\}) - \{\emptyset\}$.
2. Niech $A, B \subseteq \mathbb{N} - \{0\}$ będą niepuste i skończone. Czy rodzina $\{A, B\}$ ma kres górny w porządku $\sqsubseteq$?
3. Niech $\mathcal{R} = \{\{2^n, 2^{n+2}\} \mid n \geq 2\}$. Czy rodzina $\mathcal{R}$ ma kres dolny w tym porządku?
4. Czy każda niepusta rodzina zbiorów $\mathcal{R}$ ma kres dolny w tym porządku?

Zadanie: W zbiorze $P(\mathbb{N} - \{0\}) - \{\emptyset\}$ określamy relację $\sqsubseteq$:

$$A \sqsubseteq B \leftrightarrow A = B \vee \forall xy (x \in A \wedge y \in B \rightarrow x | y).$$

Od czego zacząć?

Można od przykładu. Czy zachodzi $\{2, 4, 7\} \sqsubseteq \{4, 7, 8\}$? Nie, bo 4 nie jest dzielnikiem liczby 7.

A czy zachodzi $\{2, 4, 7\} \sqsubseteq \{28, 56\}$? Tak.

A może nawet $\{2, 4, 7\} \sqsubseteq \{28\}$? Też tak.

Zadanie: W zbiorze $P(\mathbb{N} - \{0\}) - \{\emptyset\}$ określamy relację $\sqsubseteq$:

$$A \sqsubseteq B \leftrightarrow A = B \vee \forall xy (x \in A \wedge y \in B \rightarrow x | y).$$

1. Udowodnić, że $\sqsubseteq$ jest relacją porządku częściowego w $P(\mathbb{N} - \{0\}) - \{\emptyset\}$.

Czy ta relacja jest zwrotna? Tak, wprost z definicji.

Zadanie: W zbiorze $P(\mathbb{N} - \{0\}) - \{\emptyset\}$ określamy relację $\sqsubseteq$:

$$A \sqsubseteq B \leftrightarrow A = B \vee \forall xy (x \in A \wedge y \in B \rightarrow x | y).$$

1. Udowodnić, że $\sqsubseteq$ jest relacją porządku częściowego w $P(\mathbb{N} - \{0\}) - \{\emptyset\}$.

Sprawdźmy, czy relacja $\sqsubseteq$ jest **przechodnia**.

Niech $A \sqsubseteq B \sqsubseteq C$. Mamy tu 4 przypadki:

1. $A = B$ oraz $B = C$,
2. $A = B$ oraz $\forall xy (x \in B \wedge y \in C \rightarrow x | y)$,
3. $\forall xy (x \in A \wedge y \in B \rightarrow x | y)$ oraz $B = C$,
4. $\forall xy (x \in A \wedge y \in B \rightarrow x | y)$
oraz $\forall xy (x \in B \wedge y \in C \rightarrow x | y)$.

W przypadkach 1–3 oczywiście $A \sqsubseteq C$. Zostaje przypadek 4.

Zadanie: W zbiorze $P(\mathbb{N} - \{0\}) - \{\emptyset\}$ określamy relację $\sqsubseteq$:

$$A \sqsubseteq B \leftrightarrow A = B \vee \forall xy (x \in A \wedge y \in B \rightarrow x|y).$$

1. Udowodnić, że $\sqsubseteq$ jest relacją porządku częściowego w $P(\mathbb{N} - \{0\}) - \{\emptyset\}$.

Sprawdzamy, czy relacja $\sqsubseteq$ jest **przechodnia**.

Z założenia $A \sqsubseteq B \sqsubseteq C$ chcemy wywnioskować $A \sqsubseteq C$.

Jeden przypadek jest nieoczywisty:

$$\forall xy (x \in A \wedge y \in B \rightarrow x|y) \text{ i } \forall xy (x \in B \wedge y \in C \rightarrow x|y).$$

Ale wtedy $\forall xy (x \in A \wedge y \in C \rightarrow x|y)$. Istotnie:

Przypuśćmy, że $x \in A \wedge y \in C$. Ponieważ $B \neq \emptyset$,

więc zbiór B ma jakiś element $b \in B$. Wtedy:

$$x|b, \text{ bo } x \in A \text{ i } b \in B, \text{ oraz } b|y, \text{ bo } b \in B \text{ i } y \in C.$$

Zatem $x|y$.

Zadanie: W zbiorze $P(\mathbb{N} - \{0\}) - \{\emptyset\}$ określamy relację $\sqsubseteq$:

$$A \sqsubseteq B \leftrightarrow A = B \vee \forall xy (x \in A \wedge y \in B \rightarrow x|y).$$

1. Udowodnić, że $\sqsubseteq$ jest relacją porządku częściowego w $P(\mathbb{N} - \{0\}) - \{\emptyset\}$.

Sprawdzamy, czy relacja $\sqsubseteq$ jest **antysymetryczna**.

Z założenia $A \sqsubseteq B \sqsubseteq A$ chcemy wywnioskować $A = B$.

Jeden przypadek jest nieoczywisty:

$$\forall xy (x \in A \wedge y \in B \rightarrow x|y) \text{ i } \forall xy (x \in B \wedge y \in A \rightarrow x|y).$$

Pokażemy, że wtedy $A \subseteq B$. Weźmy dowolne $a \in A$.

Ponieważ $B \neq \emptyset$, więc zbiór B ma jakiś element $b \in B$.

Wtedy $a|b$, bo $A \sqsubseteq B$ oraz $b|a$, bo $B \sqsubseteq A$.

Stąd $a = b \in B$.

Analogicznie udowodnimy $B \subseteq A$.

Zadanie: W zbiorze $P(\mathbb{N} - \{0\}) - \{\emptyset\}$ określamy relację $\sqsubseteq$:

$$A \sqsubseteq B \leftrightarrow A = B \vee \forall xy (x \in A \wedge y \in B \rightarrow x|y).$$

2. Niech $A, B \subseteq \mathbb{N} - \{0\}$ będą niepuste i skończone. Czy rodzina $\{A, B\}$ ma kres górny w porządku $\sqsubseteq$?

Hipoteza: Tak, kresem górnym jest zbiór $\{c\}$, gdzie liczba c jest najmniejszą wspólną wielokrotnością wszystkich elementów sumy $A \cup B$.

To jest ograniczenie górne, bo każdy element A i każdy element B jest dzielnikiem liczby c .

Czy to ograniczenie jest najmniejsze? Jeśli $A \sqsubseteq C$ oraz $B \sqsubseteq C$, to zachodzi jeden z czterech przypadków.

Najprostszy przypadek: $A = C$ i $B = C$. Na przykład $A = B = C = \{2, 3\}$. Ale wtedy $c = 6$ i $\{6\} \not\sqsubseteq C$.

Hipoteza była fałszywa!

Zadanie: W zbiorze $P(\mathbb{N} - \{0\}) - \{\emptyset\}$ określamy relację $\sqsubseteq$:

$$A \sqsubseteq B \leftrightarrow A = B \vee \forall xy (x \in A \wedge y \in B \rightarrow x|y).$$

3. Niech $\mathcal{R} = \{\{2^n, 2^{n+2}\} \mid n \geq 2\}$. Czy rodzina $\mathcal{R}$ ma kres dolny w tym porządku?

Jakie ograniczenia dolne ma rodzina $\mathcal{R}$? Czy na przykład istnieje element najmniejszy?

Nie, bo są dwa elementy minimalne: $\{4, 16\}$ i $\{8, 32\}$.

Jeśli więc C jest ograniczeniem dolnym rodziny $\mathcal{R}$, to $C \not\sqsubseteq \mathcal{R}$.

Zatem każdy element C jest dzielnikiem wszystkich liczb 2^n dla $n \geq 2$. Czyli do C mogą należeć tylko liczby 1, 2 i 4.

Ale $1 \nmid 4$ i $2 \nmid 4$ więc $C \sqsubseteq \{4\}$. A zatem $\inf \mathcal{R} = \{4\}$.

Zadanie: W zbiorze $P(\mathbb{N} - \{0\}) - \{\emptyset\}$ określamy relację $\sqsubseteq$:

$$A \sqsubseteq B \leftrightarrow A = B \vee \forall xy (x \in A \wedge y \in B \rightarrow x|y).$$

1. Udowodnić, że $\sqsubseteq$ jest relacją porządku częściowego w $P(\mathbb{N} - \{0\}) - \{\emptyset\}$.

Teraz pytamy, czy relacja $\sqsubseteq$ jest **antysymetryczna**?

Przypuśćmy, że $A \sqsubseteq B \sqsubseteq A$. Znowu są 4 przypadki:

1. $A = B$ oraz $B = A$,
2. $A = B$ oraz $\forall xy (x \in B \wedge y \in A \rightarrow x|y)$,
3. $\forall xy (x \in A \wedge y \in B \rightarrow x|y)$ oraz $B = A$,
4. $\forall xy (x \in A \wedge y \in B \rightarrow x|y)$
oraz $\forall xy (x \in B \wedge y \in A \rightarrow x|y)$.

W przypadkach 1–3 oczywiście $A = B$. Zostaje przypadek 4.

Zadanie: W zbiorze $P(\mathbb{N} - \{0\}) - \{\emptyset\}$ określamy relację $\sqsubseteq$:

$$A \sqsubseteq B \leftrightarrow A = B \vee \forall xy (x \in A \wedge y \in B \rightarrow x|y).$$

2. Niech $A, B \subseteq \mathbb{N} - \{0\}$ będą niepuste i skończone. Czy rodzina $\{A, B\}$ ma kres górny w porządku $\sqsubseteq$?

Czy ta rodzina ma jakieś ograniczenia górne?

Gdyby C było takim ograniczeniem i $c \in C$, to liczba c dzieli się przez wszystkie elementy A i wszystkie elementy B .

Skoro zbiory A i B są skończone, to takie liczby istnieją.

Na przykład dla $A = \{3, 2\}$ i $B = \{4, 5\}$ taką liczbą jest 1200.

Czy tylko 1200? Nie, na przykład $60 = \text{NWW}(2, 3, 4, 5)$.

Zatem na przykład zbiór $\{60, 1200\}$ jest ograniczeniem górnym dla rodziny $\{\{3, 2\}, \{4, 5\}\}$. Czy to jest kres?

Nie, bo np. $\{60\}$ też jest ograniczeniem i $\{60\} \sqsubseteq \{60, 1200\}$.

Zadanie: W zbiorze $P(\mathbb{N} - \{0\}) - \{\emptyset\}$ określamy relację $\sqsubseteq$:

$$A \sqsubseteq B \leftrightarrow A = B \vee \forall xy (x \in A \wedge y \in B \rightarrow x|y).$$

2. Niech $A, B \subseteq \mathbb{N} - \{0\}$ będą niepuste i skończone. Czy rodzina $\{A, B\}$ ma kres górny w porządku $\sqsubseteq$?

Rozwiązanie: Tak. Jeśli $A \sqsubseteq B$ lub $B \sqsubseteq A$, to kresem górnym jest B lub A . W przeciwnym razie kresem górnym jest zbiór $\{c\}$, gdzie liczba c jest najmniejszą wspólną wielokrotnością wszystkich elementów sumy $A \cup B$.

Wiemy, że to jest ograniczenie, trzeba sprawdzić, czy najmniejsze. Niech C będzie ograniczeniem górnym.

Ponieważ A i B są nieporównywalne, więc $C \not\sqsubseteq A, B$.

Zatem każdy element sumy $A \cup B$ (a w takim razie także ich najmniejsza wspólna wielokrotność c) jest dzielnikiem każdego elementu C . Wynika stąd od razu, że $\{c\} \sqsubseteq C$.

Zadanie: W zbiorze $P(\mathbb{N} - \{0\}) - \{\emptyset\}$ określamy relację $\sqsubseteq$:

$$A \sqsubseteq B \leftrightarrow A = B \vee \forall xy (x \in A \wedge y \in B \rightarrow x|y).$$

4. Czy każda niepusta rodzina zbiorów $\mathcal{R}$ ma kres dolny w tym porządku?

Rozwiązanie: Tak. Jeśli rodzina $\mathcal{R}$ ma element najmniejszy, to jest on oczywiście kresem dolnym.

W przeciwnym przypadku kresem dolnym jest $\{c\}$, gdzie c jest najmniejszą wspólną wielokrotnością wszystkich liczb ze zbioru $A = \{n \in \mathbb{N} \mid \forall x (x \in \bigcup \mathcal{R} \rightarrow n|x)\}$. Dlaczego?

Ale trzeba pokazać, że taka liczba istnieje.

Istnieje, bo zbiór A jest niepusty (bo $1 \in A$) i skończony, bo należą do niego tylko dzielniki liczby $\min \bigcup \mathcal{R}$.