Egzamin z logiki, 9 czerwca 2005

1. Skonstruować w rachunku sekwentów dowody formuł
   (a) $(\neg p \to \neg q) \to ((\neg p \to q) \to p)$;
   (b) $\neg(p \to q) \wedge \neg(q \to r) \to (p \to r)$.
2. Która z następujących implikacji jest tautologią:
   (a) $[\forall x \exists y R(x,y) \to \exists x \forall y R(y,x)] \to \exists x \forall y (R(x,y) \to R(y,x))$?
   (b) $\exists x \forall y (R(x,y) \to R(y,x)) \to [\forall x \exists y R(x,y) \to \exists x \forall y R(y,x)]$?
3. Podać definicje następujących pojęć:
   (a) Wartość formuły φ w strukturze $\mathcal{A}$ przy wartościowaniu ρ.
   (b) Algebra wolna w klasie $\mathfrak{K}$ o zbiorze wolnych generatorów X.
4. Symbol funkcyjny f jest dwuargumentowy. Termy t_n, dla $n > 0$, są zdefiniowane tak: $t_1 = f(x_1, x_0)$, $t_{n+1} = f(x_{n+1}, t_n)$. Oczywiście $FV(t_n) = \{x_0, \ldots, x_n\}$. Przez Γ_m oznaczymy zbiór wszystkich równań postaci „$t_n = x_0$” dla $n \geq m$. Mówimy, że algebra $\mathcal{A}$ sygnatury Σ jest *fajna*, jeśli $\mathcal{A} \models t_n = x_0$ dla pewnego $n > 0$. Natomiast algebra $\mathcal{A}$ jest *lepsza*, gdy $\mathcal{A} \models \Gamma_m$ dla pewnego $m > 0$.
   (a) Które z równości $f(x,y) = f(z,y)$, $f(x,y) = f(z,u)$, $f(x,y) = y$ są prawdziwe w każdej fajnej algebrze? A które w każdej lepszej?
   (b) Czy klasa algebr fajnych jest definiowalna równościowo? A klasa algebr lepszych?

Rozwiązania

Zadanie 1a:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{p \vdash p}{\vdash \neg p, p}}{\neg p \to \neg q \vdash \neg p, p} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{p \vdash p}{\vdash \neg p, p}}{q \vdash \neg p, p} \quad \dfrac{\dfrac{q \vdash q}{q, \neg q \vdash}}{q, \neg q \vdash p}}{\neg p \to \neg q, q \vdash p}}{\neg p \to \neg q, \neg p \to q \vdash p}}{\neg p \to \neg q \vdash (\neg p \to q) \to p}}{\vdash (\neg p \to \neg q) \to ((\neg p \to q) \to p)}
$$

Zadanie 1b:

$$
\begin{array}{c}
q \vdash q \\ \hline
q \vdash p \to r, q \\ \hline
q \vdash q, p \to r \\ \hline
q \vdash r, q, p \to r \\ \hline
\vdash q \to r, q, p \to r \\ \hline
p \vdash q \to r, q, p \to r \\ \hline
p \vdash q, q \to r, p \to r \\ \hline
\vdash p \to q, q \to r, p \to r \\ \hline
\neg(p \to q) \vdash q \to r, p \to r \\ \hline
\neg(p \to q), \neg(q \to r) \vdash p \to r \\ \hline
\neg(p \to q), \neg(p \to q) \wedge \neg(q \to r) \vdash p \to r \\ \hline
\neg(p \to q) \wedge \neg(q \to r), \neg(p \to q) \vdash p \to r \\ \hline
\neg(p \to q) \wedge \neg(q \to r), \neg(p \to q) \wedge \neg(q \to r) \vdash p \to r \\ \hline
\neg(p \to q) \wedge \neg(q \to r) \vdash p \to r \\ \hline
\neg(p \to q) \wedge \neg(q \to r) \to (p \to r)
\end{array}
$$

Zadanie 2a: Lewa strona implikacji jest równoważna formułom:

- $\neg\forall x\exists y R(x,y) \vee \exists x\forall y R(y,x)$;
- $\exists x\forall y\neg R(x,y) \vee \exists x\forall y R(y,x)$;
- $\exists x(\forall y\neg R(x,y) \vee \forall y R(y,x))$;
- $\exists x(\forall y\neg R(x,y) \vee \forall z R(z,x))$;
- $\exists x\forall y(\neg R(x,y) \vee \forall z R(z,x))$;
- $\exists x\forall y\forall z(\neg R(x,y) \vee R(z,x))$.

Prawa strona jest równoważna formule $\exists x\forall y(\neg R(x,y) \vee R(y,x))$. Pozostaje więc zauważyć, że:

- Każda formuła postaci $\forall y\forall z\, \varphi(y,z) \to \forall y\, \varphi(y,y)$ jest tautologią;
- Jeśli $\varphi \to \psi$ jest tautologią, to także $\exists x\, \varphi \to \exists x\, \psi$ jest tautologią.

Zadanie 2b: Rozwiązanie zadania ułatwi przekształcenie formuły do równoważnej postaci $\exists x\forall y(\neg R(x,y) \vee R(y,x)) \to \exists x\forall y\neg R(x,y) \vee \exists x\forall y R(y,x)$. Teraz łatwo sprawdzić, że ta formuła nie jest prawdziwa w modelu $\langle \mathbb{R}, = \rangle$. Mamy bowiem na przykład $\mathbb{R}, \{0/x\} \models \forall y(\neg R(x,y) \vee R(y,x))$, bo dla dowolnej liczby y albo $0 \neq y$ albo $y = 0$. A więc $\mathbb{R} \models \exists x\forall y(\neg R(x,y) \vee R(y,x))$. Ale nie ma ani liczby równej wszystkim, ani liczby różnej od wszystkich liczb rzeczywistych, więc $\mathbb{R} \not\models \exists x\forall y\neg R(x,y) \vee \exists x\forall y R(y,x)$.

Zadanie 3: Patrz materiały do wykładu.

Zadanie 4a: Wartość termu t_n przy wartościowaniu $\{a_n/x_n, \ldots, a_0/x_0\}$ będziemy dla uproszczenia zapisywać po prostu jako $t_n(a_n, \ldots, a_0)$.

Pokażemy najpierw, że w algebrach fajnych prawdziwe jest równanie $f(x,y) = f(z,y)$, tj. że operacja f zależy tylko od drugiego argumentu. Załóżmy, że w algebrze $\mathcal{A}$ prawdziwe jest równanie $t_n = x_0$. Wtedy $a_0 = t_n(a_n, \ldots, a_0) = t_{n-1}(a_n, \ldots, f(a_1, a_0)) = f(a_n, t_{n-1}(a_{n-1}, \ldots, a_0))$, dla dowolnych $a_0, \ldots, a_n$.

Zatem $f(a_1', a_0) = f(a_1', t_n(a_n, \ldots, a_1, a_0)) = t_n(a_1', a_n, \ldots, a_2, f(a_1, a_0)) = f(a_1, a_0)$, dla dowolnych a_1, a_1'.

Pozostałe dwa równania nie są prawdziwe na przykład w algebrze o elementach 0, 1 i 2, w której $f(a, b) = (b + 1) \bmod 3$.

Natomiast w algebrach lepszych prawdziwe jest równanie $f(x, y) = y$, bo dla dostatecznie dużego n mamy $a_0 = t_{n+1}(a_n, \ldots, a_0) = t_n(a_n, \ldots, f(a_1, a_0)) = f(a_1, a_0)$. Oznacza to, że algebry lepsze to dokładnie te algebry, w których f jest rzutowaniem na drugą współrzędną. (Rzutowanie spełnia definicję dla $m = 1$.) Ale rzutowanie na ogół nie jest funkcją stałą, więc równanie $f(x, y) = f(z, u)$ nie jest prawdziwe w algebrach lepszych.

Zadanie 4b: Z powyższego wynika, że klasa algebr lepszych jest definiowalna równaniem $f(x, y) = y$. Natomiast klasa algebr fajnych nie jest definiowalna równościowo, bo nie jest zamknięta ze względu na produkty. Rozpatrzmy algebry $\mathcal{A}_n = \langle A_n, f_n \rangle$, gdzie $A_n = \{0, \ldots, n\}$ oraz $f_n(a, b) = (b + 1) \bmod n$. Wtedy produkt $\Pi_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_n$ nie jest fajny.