Klasówka z logiki, 7 kwietnia 2005

Rozważamy trzy algebry $\mathcal{O} = \langle O, \oplus \rangle$, $\mathcal{T} = \langle T, \oplus \rangle$ i $\mathcal{K} = \langle K, \oplus \rangle$, gdzie zbiory O, T i K to odpowiednio odcinek, trójkąt i kwadrat. Operacja $\oplus$ jest zawsze określona tak samo: $A \oplus B$ to środek odcinka AB, `[przy czym` $A \oplus A = A$`]`.

1. Udowodnić, że każdy `[niepusty]` wypukły podzbiór zbioru T jest podalgebrą w $\mathcal{T}$. Czy wszystkie podalgebry są wypukłe?
2. Czy algebra $\mathcal{O}$ jest izomorficzna z jakimś ilorazem algebry $\mathcal{T}$?
3. Udowodnić, że $HSP(\{\mathcal{O}\}) = HSP(\{\mathcal{T}\}) = HSP(\{\mathcal{K}\})$.
4. Niech $\mathcal{W}$ będzie algebrą wolną w klasie $HSP(\{\mathcal{O}\})$ o dwóch wolnych generatorach. Udowodnić, że $\mathcal{W}$ jest nieskończona.
5. Z części (3) wynika, że w algebrach $\mathcal{O}$, $\mathcal{T}$ i $\mathcal{K}$ prawdziwe są te same równania. Wywnioskować stąd, że odcinki łączące połowy przeciwległych boków dowolnego czworokąta dzielą się nawzajem na połowy.
6. Udowodnić, że żadne dwie spośród algebr $\mathcal{O}$, $\mathcal{T}$ i $\mathcal{K}$ nie są izomorficzne.

Odpowiedzi:

1. Jeśli podzbiór P jest wypukły to odcinek łączący dwa punkty z P jest zawarty w P. Tym bardziej więc środek tego odcinka należy do P. Ale podalgebra generowana przez dwa różne punkty nie jest wypukła, bo jest przeliczalna.

2. Tak. Rzutowanie trójkąta na odcinek zachowuje operację $\oplus$, jest więc homomorfizmem. A zatem $\mathcal{O}$ jest izomorficzne z ilorazem $\mathcal{T}$ przez jądro tego homomorfizmu.

3. Z części (2) wynika, że $\mathcal{O} \in H(\{\mathcal{T}\})$ a stąd $HSP(\{\mathcal{O}\}) \subseteq HSP(\{\mathcal{T}\})$. Dalej $\mathcal{T} \in S(\{\mathcal{K}\})$, bo trójkąt $\mathcal{T}$ jest podobny do pewnego trójkąta zawartego w $\mathcal{K}$. (Podobieństwo zachowuje środki odcinków, więc jest izomorfizmem). Stąd $HSP(\{\mathcal{T}\}) \subseteq HSP(\{\mathcal{K}\})$. Wreszcie kwadrat jest produktem dwóch odcinków, więc $\mathcal{K} \in P(\{\mathcal{O}\})$ i mamy też $HSP(\{\mathcal{K}\}) \subseteq HSP(\{\mathcal{O}\})$.

4. Do naszej klasy należy odcinek $(0,1)$ z operacją $x \oplus x' = \frac{1}{2}(x + x')$ (jest izomorficzny z $\mathcal{O}$). Jeśli generatorom algebry wolnej przyporządkujemy liczby 0 i 1 to obrazem homomorfizmu rozszerzającego to przyporządkowanie jest nieskończona podalgebra złożona ze wszystkich liczb o skończonym rozwinięciu dwójkowym. A więc algebra wolna też musi być nieskończona.

5. Wiemy już, że odcinek $\mathcal{O}$ jest izomorficzny z przedziałem $(0,1)$, gdzie operacja $\oplus$ to średnia arytmetyczna. Zatem w $\mathcal{O}$ prawdziwe jest równanie $(x \oplus y) \oplus (z \oplus v) = (x \oplus v) \oplus (y \oplus z)$. Wybierzmy teraz kwadrat $\mathcal{K}$ tak, aby cały nasz czworokąt był w nim zawarty i niech x, y, v, z będą wierzchołkami tego czworokąta. Teza wynika stąd, że w $\mathcal{K}$ powyższe równanie też jest prawdziwe.

6. W algebrze $\mathcal{O}$ są dwa takie punkty C, które nie są postaci $A \oplus B$ dla $A, B \in \mathcal{O}$, $A, B \neq C$. W algebrze $\mathcal{T}$ są takie trzy, a w $\mathcal{K}$ cztery.