Egzamin z logiki, II termin, 6 września 2005

0. Rozważamy algebrę $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N} \times \mathbb{N}, f \rangle$, z jedną operacją jednoargumentową określoną tak:

   - $f(n, m) = (n, n + m)$, gdy n jest nieparzyste.
   - $f(n, m) = (n, m + 1)$, gdy n jest parzyste, a liczba m nie jest postaci $k \cdot 3^n + 3^n - 1$.
   - $f(n, k \cdot 3^n + 3^n - 1) = (n, k \cdot 3^n)$, gdy n jest parzyste.

   Które z następujących stwierdzeń są prawdziwe i dlaczego?

   (a) Algebra $\mathcal{A}$ jest izomorficzna z pewną swoją podalgebrą właściwą.

   (b) Algebra $\mathcal{A}$ ma nieprzeliczalnie wiele podalgebr.

   (c) Algebra $\mathcal{A}$ ma nieprzeliczalnie wiele wzajemnie nieizomorficznych podalgebr.

   (d) Algebra $\mathcal{A}$ ma nieprzeliczalnie wiele wzajemnie nieizomorficznych obrazów homomorficznych.

   (e) Algebra $\mathcal{A}$ ma nieprzeliczalnie wiele wzajemnie nieizomorficznych ilorazów.

   (f) Każdy obraz homomorficzny algebry $\mathcal{A}$ jest izomorficzny z pewną jej podalgebrą.

   (g) Każda podalgebra algebry $\mathcal{A}$ jest jej obrazem homomorficznym.

   (h) Produkt dowolnych dwóch podalgebr algebry $\mathcal{A}$ jest izomorficzny z pewną jej podalgebrą.

   (i) Klasa wszystkich ilorazów podalgebr algebry $\mathcal{A}$ jest definiowalna równościowo.

Rozwiązanie

Algebra $\mathcal{A}$ składa się z przeliczalnie wielu „łańcuchów", każdy postaci $(n, i) \to (n, n+i) \to (n, 2n+i) \to \cdots$ dla $i < n$ i nieparzystych n, oraz przeliczalnie wielu „pętli" postaci $(n, k \cdot 3^n) \to (n, k \cdot 3^n + 1) \to \cdots \to (n, k \cdot 3^n + 3^n - 1) \to (n, k \cdot 3^n)$ dla parzystych n. Dla każdego parzystego n jest nieskończenie wiele pętli rozmiaru 3^n (w tym pętli jednoelementowych).

(0a) Tak. Wystarczy usunąć na przykład jedną pętlę rozmiaru 9 i otrzymamy podelgebrę izomorficzną z $\mathcal{A}$.

(0b) Tak. Każda rodzina pętli rozmiaru 9 wyznacza podalgebrę.

(0c) Tak. Dla dowolnego podzbioru M zbioru liczb parzystych można wybrać podalgebrę zawierającą po jednej pętli rozmiaru 3^n, dla $n \in M$ i po dwie pętle dla $n \notin M$.

(0d) Tak. Podalgebra z odpowiedzi (0c) jest obrazem homomorficznym $\mathcal{A}$. („Łańcuchy" przekształcamy w jakąkolwiek pętlę.)

(0e) Tak. Wynika to natychmiast z odpowiedzi „tak" na pytanie (0d).

(0f) Nie. Homomorfizm może „skleić" nieskończony „łańcuch" do pętli dowolnego rozmiaru (niekoniecznie 3^n).

(0g) Nie. Na przykład podalgebra składająca się z jednej pętli rozmiaru 9 nie jest obrazem algebry $\mathcal{A}$. W algebrze $\mathcal{A}$ są elementy spełniające warunek $f(a) = a$. Jeśli h jest homomorfizmem, to musi być $h(a) = f(h(a))$, a takiego elementu nie ma w nietrywialnej pętli.

(0h) Tak. Produkt dwóch podalgebr jest sumą produktów składowych („pętli" i „łańcuchów"). Produkt dwóch „pętli" rozmiaru 3^n i 3^m, gdzie $n \leq m$, składa się z 3^n egzemplarzy większej „pętli". Produkt dwóch „łańcuchów" to nieskończona rodzina „łańcuchów", a produkt „pętli" i „łańcucha" to nieskończona rodzina „pętli". Zatem produkt dwóch podalgebr zawsze składa się z odpowiednich składowych.

(0i) Nie, bo składa się z algebr przeliczalnych, więc nie jest zamknięta ze względu na (dowolne) produkty.