Egzamin z logiki, II termin, 6 września 2005

1. Skonstruować w rachunku sekwentów dowody formuł

   (a) $((p \to q) \to r) \to ((p \to r) \to r)$;

   (b) $\neg(p \to \neg q) \to p \wedge q$.

2. Jedynym symbolem sygnatury Σ jest dwuargumentowy symbol funkcyjny g. Rozważamy algebry postaci $\mathcal{N}_g = \langle \mathbb{N}, g \rangle$, gdzie g jest funkcją dwuargumentową. Czy formuła $\exists yz(x \neq y \wedge x \neq z \wedge g(x,y) = g(z,x))$

   (a) jest prawdziwa w pewnej algebrze $\mathcal{N}_g$?

   (b) jest spełnialna, ale nie prawdziwa w pewnej algebrze $\mathcal{N}_g$?

   (c) jest spełnialna w każdej algebrze $\mathcal{N}_g$?

   Czy klasa wszystkich algebr, w których nasza formuła jest prawdziwa, jest definiowalna równościowo?

3. Teraz jedynym symbolem sygnatury Σ jest dwuargumentowy symbol relacyjny R. Przez φ_n, dla $n > 0$, oznaczymy formułę

   $$\forall x_1 \ldots x_n \, (R(x_1, x_2) \vee R(x_2, x_3) \vee \cdots \vee R(x_{n-1}, x_n) \vee R(x_n, x_1)).$$

   W szczególności φ_1 to formuła $\forall x_1 \, R(x_1, x_1)$. Zbadać, które z formuł $\varphi_n \to \varphi_m$, dla $m, n > 0$ są tautologiami.

4. Czy prawdziwe jest następujące twierdzenie: *Jeżeli istnieją algebry wolne w klasie $\mathfrak{K}$ o zbiorach wolnych generatorów dowolnej mocy, to klasa $\mathfrak{K}$ jest definiowalna równościowo?*

Rachunek sekwentów

Osłabianie: $\dfrac{\Gamma \vdash \Sigma}{\Gamma, \alpha \vdash \Sigma}(\mathrm{LO})$ $\qquad$ $\dfrac{\Gamma \vdash \Sigma}{\Gamma \vdash \alpha, \Sigma}(\mathrm{PO})$

Wymiana: $\dfrac{\Gamma, \varphi, \psi, \Delta \vdash \Sigma}{\Gamma, \psi, \varphi, \Delta \vdash \Sigma}(\mathrm{LW})$ $\qquad$ $\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi, \psi, \Sigma}{\Gamma \vdash \Delta, \psi, \varphi, \Sigma}(\mathrm{PW})$

Skracanie: $\dfrac{\Gamma, \varphi, \varphi \vdash \Sigma}{\Gamma, \varphi \vdash \Sigma}(\mathrm{LS})$ $\qquad$ $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi, \varphi, \Sigma}{\Gamma \vdash \varphi, \Sigma}(\mathrm{PS})$

Negacja: $\dfrac{\Gamma \vdash \alpha, \Sigma}{\Gamma, \neg\alpha \vdash \Sigma}(\mathrm{LN})$ $\qquad$ $\dfrac{\Gamma, \alpha \vdash \Sigma}{\Gamma \vdash \neg\alpha, \Sigma}(\mathrm{PN})$

Koniunkcja: $\dfrac{\Gamma, \alpha \vdash \Sigma}{\Gamma, \alpha \wedge \beta \vdash \Sigma}(\mathrm{LK})$ $\dfrac{\Gamma, \beta \vdash \Sigma}{\Gamma, \alpha \wedge \beta \vdash \Sigma}$ $\dfrac{\Gamma \vdash \alpha, \Sigma \quad \Gamma \vdash \beta, \Sigma}{\Gamma \vdash \alpha \wedge \beta, \Sigma}(\mathrm{PK})$

Alternatywa: $\dfrac{\Gamma, \alpha \vdash \Sigma \quad \Gamma, \beta \vdash \Sigma}{\Gamma, \alpha \vee \beta \vdash \Sigma}(\mathrm{LA})$ $\dfrac{\Gamma \vdash \alpha, \Sigma}{\Gamma \vdash \alpha \vee \beta, \Sigma}(\mathrm{PA})$ $\dfrac{\Gamma \vdash \beta, \Sigma}{\Gamma \vdash \alpha \vee \beta, \Sigma}$

Implikacja: $\dfrac{\Gamma \vdash \alpha, \Sigma \quad \Gamma, \beta \vdash \Sigma}{\Gamma, \alpha \to \beta \vdash \Sigma}(\mathrm{LI})$ $\qquad$ $\dfrac{\Gamma, \alpha \vdash \beta, \Sigma}{\Gamma \vdash \alpha \to \beta, \Sigma}(\mathrm{PI})$

Kwantyfikator ogólny: $\dfrac{\Gamma, \varphi[x{:=}t] \vdash \Sigma}{\Gamma, \forall x\varphi \vdash \Sigma}(\mathrm{L}\forall)$ $\qquad$ $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi[x{:=}y], \Sigma}{\Gamma \vdash \forall x\varphi, \Sigma}(\mathrm{P}\forall)$

Kwantyfikator szczegółowy: $\dfrac{\Gamma, \varphi[x{:=}y] \vdash \Sigma}{\Gamma, \exists x\varphi \vdash \Sigma}(\mathrm{L}\exists)$ $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi[x{:=}t], \Sigma}{\Gamma \vdash \exists x\varphi, \Sigma}(\mathrm{P}\exists)$

Cięcie: $\dfrac{\Gamma \vdash \alpha, \Sigma \quad \Gamma, \alpha \vdash \Sigma}{\Gamma \vdash \Sigma}(\text{Ciach!})$

Reguły (P$\forall$) i (L$\exists$) mają następujące ograniczenie: zmienna y nie może występować wolno w żadnej formule należącej do $\Gamma \cup \Sigma$.

Rozwiązania

Zadanie 1a:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{p \vdash p}{p \vdash q, p, r}}{\vdash p \to q, p, r} \quad \dfrac{r \vdash r}{r \vdash p, r}}{(p \to q) \to r \vdash p, r} \quad \dfrac{r \vdash r}{(p \to q) \to r, r \vdash r}}{(p \to q) \to r, p \to r \vdash r}}{(p \to q) \to r \vdash (p \to r) \to r}}{\vdash ((p \to q) \to r) \to ((p \to r) \to r)}$$

Zadanie 1b:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{p \vdash p}{p, q \vdash p} \quad \dfrac{q \vdash q}{p, q \vdash q}}{p, q \vdash p \wedge q}}{p \vdash \neg q, p \wedge q}}{\vdash p \to \neg q, p \wedge q}}{\neg(p \to \neg q) \vdash p \wedge q}}{\vdash \neg(p \to \neg q) \to p \wedge q}$$

Zadanie 2:

1. Tak, na przykład jeśli g jest funkcją stałą. Równość $g(x, y) = g(z, x)$ jest wtedy spełniona, niezależnie od wartości zmiennych y i z,
2. Tak, na przykład dla $g(m, n) = \begin{cases} n, & \text{gdy } m \cdot n = 0; \\ 3, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$
   Formuła nie jest spełniona przez wartościowanie $\varrho(x) = 0$, bo wtedy warunki $x \neq y$ i $g(x, y) = g(z, x)$ wykluczają się. W pozostałych przypadkach formuła jest spełniona.
3. Nie, na przykład jeśli g jest rzutem na pierwszą współrzędną.

Klasa algebr, w których ta formuła jest prawdziwa, nie jest definiowalna równościowo, bo nie jest np. zamknięta ze względu na podalgebry. Istotnie, jeśli g jest stale równa 1, to $\{1\}$ jest podalgebrą $\mathcal{N}_g$. W tej podalgebrze formuła nie jest prawdziwa, bo nie ma tam elementów różnych od 1.

Zadanie 3: Formuła $\varphi_n \to \varphi_m$ jest tautologią wtedy i tylko wtedy gdy n jest podzielne przez m. Przypuśćmy najpierw, że $n = k \cdot m$, i że $\mathcal{A} \models \varphi_n$. Niech $a_1, \ldots, a_m \in \mathcal{A}$. Formuła $R(x_1, x_2) \vee R(x_2, x_3) \vee \cdots \vee R(x_{n-1}, x_n) \vee R(x_m, x_1)$ jest spełniona przez wartościowanie $\rho(x_i) = a_i$, ponieważ formuła $R(x_1, x_2) \vee R(x_2, x_3) \vee \cdots \vee R(x_{n-1}, x_n) \vee R(x_n, x_1)$ jest spełniona przez wartościowanie $\rho(x_i) = a_{i \bmod m}$.

Rozpatrzmy teraz strukturę $\mathcal{A}_m = \langle \{1, \ldots, m\}, R_m \rangle$, gdzie $A_m = \{1, \ldots, m\}$ oraz $R_m = \mathcal{A}_m^2 - \{\langle 1, 2\rangle, \ldots, \langle m-1, m\rangle, \langle m, 1\rangle\}$. Oczywiście $\mathcal{A}_m \not\models \varphi_m$. Pokażemy, że $\mathcal{A}_m \models \varphi_n$ dla wszystkich n, niepodzielnych przez m. Stąd otrzymamy, że $\varphi_n \to \varphi_m$ nie jest tautologią.

W przeciwnym razie mamy ciąg n elementów $a_1, a_2, \ldots, a_n$, w którym żadne dwa kolejne (oraz ostatni z pierwszym) nie są w relacji R_m. Z określenia R_m wynika, że różnica pomiędzy kolejnymi elementami jest zawsze 1 (modulo m) a liczba j powtarza się co m kroków. Tak samo różnica $a_1 - a_n$ jest jedynką modulo m. A zatem n jest podzielne przez m.

Zadanie 4: Nie. Rozpatrzmy na przykład klasę $\mathfrak{K}$ złożoną ze wszystkich algebr wolnych w klasie $\mathfrak{P}$ wszystkich półgrup z jednością. Oczywiście algebra wolna w $\mathfrak{P}$ jest też wolna w $\mathfrak{K}$, więc $\mathfrak{K}$ ma algebry wolne o dowolnej liczbie generatorów. Zauważmy teraz, że $\mathrm{Eq}(\mathfrak{K}) = \mathrm{Eq}(\mathfrak{P})$. Istotnie, dowolne równanie prawdziwe w w algebrze wolnej o nieskończonej liczbie generatorów jest prawdziwe w całej klasie $\mathfrak{P}$, zachodzi więc inkluzja $\subseteq$. (Inkluzja odwrotna jest oczywista.) A zatem klasa $\mathfrak{K}$ nie jest definiowalna równościowo, mielibyśmy bowiem wtedy $\mathfrak{K} = \mathrm{Mod}(\mathrm{Eq}(\mathfrak{K})) = \mathrm{Mod}(\mathrm{Eq}(\mathfrak{P})) = \mathfrak{P}$. A przecież nie każda półgrupa jest wolna.