Zadania z algebry[1]

1. Jakiej mocy jest podalgebra generowana przez zbiór mocy $\aleph_0$? A podalgebra generowana przez zbiór mocy $\mathfrak{C}$?

2. Jakiej mocy jest zbiór wszystkich podalgebr algebry $\langle \mathbb{N}, \cdot \rangle$, gdzie "$\cdot$" oznacza operację mnożenia?

3. Ile parami nieizomorficznych podalgebr generowanych przez jeden element można wskazać w algebrze liczb naturalnych z mnożeniem?

4.* Ile parami nieizomorficznych podalgebr można wskazać w algebrze liczb naturalnych z mnożeniem?

5. Czy zbiór wszystkich podalgebr algebry $\langle \mathbb{N}, \cdot \rangle$ jest dobrze ufundowany przez inkluzję?

6. (a) Ile parami nieizomorficznych podalgebr generowanych przez jeden element można wskazać w algebrze liczb naturalnych z dodawaniem?

   (b)* A ile nieizomorficznych podalgebr generowanych przez n elementów można wskazać w tej algebrze?

7. Wskazać przykłady algebr, które mają dokładnie $1, 2, 3, \ldots, \aleph_0, \mathfrak{C}$ podalgebr.

8. Opisać podalgebrę generowaną przez $\sqrt{2}$ w algebrze $\langle \mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1 \rangle$.

9. Podaj przykład takiej algebry:

   (a) której każdy niepusty podzbiór jest podalgebrą;

   (b) że rodzina wszystkich podalgebr nie tworzy kraty zupełnej;

   (c) która jest izomorficzna z pewną swoją podalgebrą właściwą i takiej, która nie ma tej własności;

   (d) że każde dwie podalgebry generowane przez jeden element są izomorficzne;

10. Niech $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N} \times \mathbb{N}, f^{\mathcal{A}} \rangle$, gdzie $f^{\mathcal{A}}(\langle m, n \rangle) = \langle m, n+1 \rangle$. Przez $\mathcal{P}$ oznaczymy zbiór wszystkich podalgebr algebry $\mathcal{A}$, a przez ρ — taką relację równoważności w $\mathcal{P}$, że $B_1 \rho B_2$ zachodzi wtedy i tylko wtedy gdy B_1 i B_2 są izomorficzne.

    (a) Znaleźć moc zbioru $\mathcal{P}$;

    (b) Znaleźć moc zbioru $\mathcal{P}/\rho$.

[1] Zadania są zebrane przypadkowo, nie sprawdzone i bez jakiejkolwiek gwarancji poprawności. Korzystać można na własne ryzyko i odpowiedzialność. Część zadań jest pomysłu D. Walukiewicz, J. Tyszkiewicza, D. Niwińskiego i innych. Za poprawki dziękuję Pani Magdzie Michalskiej i Panom Michałowi Jaszczykowi, Tomkowi Jurkiewiczowi, Krzysztofowi Kulewskiemu, Michałowi Parkole i Tomaszowi Weksejowi.

11. Niech $\mathcal{A} = \langle A, f_1^{\mathcal{A}}, \ldots, f_n^{\mathcal{A}}, r_1^{\mathcal{A}}, \ldots, r_m^{\mathcal{A}} \rangle$, gdzie symbole $f_1, \ldots, f_n$ są odpowiednio $k_1, \ldots, k_n$-argumentowe. Rozpatrzmy takie przekształcenie $F : \mathbf{P}(A) \to \mathbf{P}(A)$:
$$F(B) = B \cup \bigcup_{i=1}^{n} \vec{f_i}(B^{k_i}).$$
Pokazać, że to przekształcenie jest ciągłe ze względu na uporządkowanie przez inkluzję, i że podstruktura generowana przez zbiór pusty jest najmniejszym punktem stałym tego przekształcenia. Podstruktura generowana przez dowolny zbiór B też jest najmniejszym punktem stałym pewnego przekształcenia. Jakiego? Jak otrzymać tę podstrukturę jako sumę pewnego wstępującego ciągu zbiorów?

12. Mówimy, że algebra jest *lokalnie skończona*, jeżeli każda jej skończenie generowana podalgebra jest skończona. Algebra jest *jednostajnie lokalnie skończona*, jeżeli dla dowolnego k istnieje takie n, że każda podalgebra generowana przez k elementów jest mocy co najwyżej n.

   (a) Wskazać przykład algebry, która jest lokalnie skończona, ale nie jest jednostajnie lokalnie skończona, choć każda podalgebra generowana przez 1 element ma mniej niż 13 elementów.

   (b) Pokazać, że każda algebra Boole'a jest jednostajnie lokalnie skończona.

13. Niech $f : A \to A$ i przypuśćmy, że B jest minimalną (ze względu na zawieranie) podalgebrą w algebrze $\langle A, f \rangle$. Pokazać, że jest to podalgebra skończona. *(Uwaga: takie B nie zawsze istnieje.)*

14. Jakiej mocy jest rodzina wszystkich podalgebr algebry $\langle T, \alpha, \beta \rangle$, gdzie $T = \{a, b\}^*$ jest nieskończonym pełnym drzewem binarnym, a operacje α i β są określone tak: $\alpha(w) = w \cdot a$, $\beta(w) = w \cdot b$?

15. Niech $\mathcal{A}$ będzie dowolną algebrą, i niech B będzie taką podalgebrą algebry $\mathcal{A}$, że pewien element a nie należy do B. Udowodnić, że istnieje podalgebra C, spełniająca warunki $a \notin C$ i $B \subseteq C$ oraz maksymalna o tych własnościach.

16. Zbiór słów $L \subseteq \{a, b\}^*$ jest *niezależny*, jeśli żadne słowo $w \in L$ nie należy do podalgebry generowanej przez $L - \{w\}$ w algebrze $\langle \{a, b\}^*, \cdot \rangle$. Pokazać, że dowolny zbiór niezależny może być rozszerzony do maksymalnego zbioru niezależnego.

17. Jeśli D jest dobrze uporządkowany, to określamy w D operację s^D jak następuje: jeśli d jest największym elementem, to $s^D(d) = d$, w przeciwnym razie $s^D(d)$ jest bezpośrednim następnikiem d. Niech $\mathcal{D} = \langle D, s^D \rangle$. Pokazać, że:

   (a) Jeśli D jest nieprzeliczalny to $\mathcal{D}$ ma nieprzeliczalnie wiele parami rozłącznych podalgebr.

   (b) Jeśli $\overline{\overline{D}} = \mathfrak{C}$, to w $\mathcal{D}$ jest $2^{\mathfrak{C}}$ podalgebr.

   (c)* Istnieje taki przeliczalny zbiór D, że algebra $\mathcal{D}$ ma nieprzeliczalnie wiele podalgebr.

18. Pokazać, że algebra permutacji zbioru $\{i : i < k\}$ ze składaniem jest generowana przez zbiór transpozycji.

19. Czy obraz (przeciwobraz) podalgebry przy homomorfizmie musi być podalgebrą?

20. Udowodnić, że dla dowolnych homomorfizmów $h_1, h_2 : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, zbiór $\{a \in |\mathcal{A}| \mid h_1(a) = h_2(a)\}$ jest podalgebrą algebry $\mathcal{A}$, jeśli tylko jest niepusty.

21. Udowodnić, że homomorfizm jest izomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy jest silnym homomorfizmem i bijekcją.

22. Podać przykład algebry $\mathcal{A}$ generowanej przez podzbiór X oraz przykład przekształcenia $f : X \to \mathcal{B}$, które nie rozszerza się do homomorfizmu. Następnie podać taki przykład, w którym zbiór X jest minimalnym zbiorem generatorów.

23. Udowodnić, że struktury $\langle \mathbf{P}(\mathbb{R}), \cup, \cap \rangle$ i $\langle \{0,1\}^{\mathbb{R}}, \max, \min \rangle$, gdzie:

$$\max(f,g)(x) = \max(f(x), g(x));$$
$$\min(f,g)(x) = \min(f(x), g(x)),$$

dla dowolnych funkcji f, g i dowolnego x, są izomorficzne.

24. Udowodnić, że jeśli struktury $\mathcal{A} = \langle A, r^{\mathcal{A}}, f^{\mathcal{A}} \rangle$ i $\mathcal{B} = \langle B, r^{\mathcal{B}}, f^{\mathcal{B}} \rangle$ są izomorficzne, to

    (a) $f^{\mathcal{A}}$ jest różnowartościowa wtedy i tylko wtedy, gdy $f^{\mathcal{B}}$ jest różnowartościowa;
    (b) $r^{\mathcal{A}}$ jest porządkiem liniowym wtedy i tylko wtedy, gdy $r^{\mathcal{B}}$ jest porządkiem liniowym.

    Podać inne przykłady podobnych równoważności.

25. Które z następujących struktur są izomorficzne:

    (a) $\langle \mathbb{N}, +, 0 \rangle$ i $\langle \mathbb{N}, \cdot, 1 \rangle$?
    (b) $\langle \mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ i $\langle P(\mathbb{N}), \cup, \cap, \emptyset, \mathbb{N} \rangle$?
    (c) $\langle P_2, \perp \rangle$ i $\langle P_3, \perp \rangle$, gdzie P_2 i P_3 to odpowiednio zbiory wszystkich prostych w $\mathbb{R}^2$ i w $\mathbb{R}^3$, a symbol $\perp$ oznacza relację prostopadłości?
    (d) $\langle P_2, \| \rangle$ i $\langle P_3, \| \rangle$, gdzie P_2 i P_3 to odpowiednio zbiory wszystkich prostych w $\mathbb{R}^2$ i w $\mathbb{R}^3$, a symbol $\|$ oznacza relację równoległości?
    (e) $\langle P_2, \perp \rangle$ i $\langle P_2, \| \rangle$?
    (f) $\langle \mathbb{N} - \{0\}, \cdot \rangle$ i $\langle \mathbb{N}^{\mathbb{N}}, + \rangle$, gdzie $(f+g)(n) = f(n) + g(n)$?

26. Dlaczego następujące struktury nie są izomorficzne?

    (a) $\langle \mathbb{Q}, + \rangle$ i $\langle \mathbb{R}, + \rangle$;
    (b) $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ i $\langle \{m - \frac{1}{n}\} \mid m, n \in \mathbb{N} - \{0\}\}, \leq \rangle$;

(c) $\langle \mathbb{N}, + \rangle$ i $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$;

(d) $\langle \{a, b\}^*, \cdot \rangle$ i $\langle \{a, b, c\}^*, \cdot \rangle$;

27. Dlaczego następujące struktury nie są izomorficzne?

    (a) $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ i $\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$;

    (b) $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$ i $\langle \mathbb{R}, \leq \rangle$.

28. Algebry $\langle \mathbb{R}, +, -, 0 \rangle$ i $\langle \mathbb{R}_+, \cdot, ^{-1}, 1 \rangle$ są izomorficzne.

29. Ile jest homomorfizmów z $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ do $\langle \mathbb{N}, \geq \rangle$?

30. Udowodnić, że różniczkowanie jest homomorfizmem z $\mathcal{C}_1$ do $\mathcal{C}$ z operacją dodawania i stałą zero.

31. Ile jest homomorfizmów „na” z algebry $\langle \{a, b\}^*, \cdot, \varepsilon \rangle$ do algebry $\langle \mathbb{N}, +, 0 \rangle$?

32. Ile jest homomorfizmów z algebry $\langle \{a, b\}^*, \cdot, \varepsilon \rangle$ w siebie? Ile z nich zachowuje długość?

33. Opisać wszystkie ilorazy algebry $\langle \{a, b\}^*, \cdot, \varepsilon \rangle$.

34. Niech $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, f \rangle$, gdzie $\mathbb{N}$ jest zbiorem wszystkich liczb naturalnych, a operacja f jest określona tak: $f(x) = x+2$, gdy x dzieli się przez 3, oraz $f(x) = x-1$, w przeciwnym przypadku.

    (a) Ile jest wszystkich kongruencji w $\mathcal{A}$?

    (b) Ile można znaleźć różnych obrazów homomorficznych algebry $\mathcal{A}$, jeśli utożsamiać ze sobą te, które są izomorficzne?

35. Niech $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, f \rangle$, gdzie $\mathbb{N}$ jest zbiorem wszystkich liczb naturalnych, a operacja f jest określona tak: $f(x) = (x + 1) \ \mathbf{mod}\ 3$.

    (a) Opisać podalgebry tej algebry.

    (b) Ile jest wszystkich kongruencji w $\mathcal{A}$?

    (c) Ile można znaleźć różnych obrazów homomorficznych algebry $\mathcal{A}$, jeśli utożsamiać ze sobą te, które są izomorficzne?

36. Czy relacja $\sim$ w algebrze termów $\mathcal{T}_\Sigma$ określona warunkiem:

    $$t \sim s \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } S(t) = S(s), \text{ dla pewnego podstawienia } S,$$

    jest kongruencją?

37. Czy to prawda, że dla każdej kongruencji ρ w $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ istnieje taka kongruencja ρ_1 w $\mathcal{A}$ i taka kongruencja ρ_2 w $\mathcal{B}$, że $\langle a, b \rangle \rho \langle c, d \rangle$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $a \rho_1 c$ i $b \rho_2 d$?, A na odwrót?

38. Niech v będzie dowolnym wartościowaniem. Opisać iloraz algebry termów przez jądro v (rozszerzonego na dowolne termy).

39. Niech A będzie skończonym zbiorem i niech $f : \{0,1\}^* \times A \to A$ będzie dowolną funkcją. Przyjmijmy, że $w \sim_f u$ wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnego $a \in A$ zachodzi $f(w,a) = f(u,a)$. Czy $\sim_f$ musi (może) być kongruencją w algebrze słów?

40. Podać przykład takiej algebry $\mathcal{A}$, że:

    (a) $\mathcal{A}$ jest izomorficzna ze swoim własnym ilorazem przez kongruencję różną od identyczności;

    (b) $\mathcal{A}$ jest algebrą Boole'a i spełnia ten sam warunek .

41. Podać przykład takiej algebry $\mathcal{A}$ i różnych kongruencji r i s, że ilorazy $\mathcal{A}/r$ i $\mathcal{A}/s$ są izomorficzne;

42. Zbadać jakie kongruencje ma algebra liczb naturalnych z następnikiem i stałą zero.

43. Niech f i g będą jednoargumentowymi symbolami funkcyjnymi i niech $\mathcal{A} = \langle A, f^{\mathcal{A}}, g^{\mathcal{A}} \rangle$ będzie taką algebrą, że $f^{\mathcal{A}} \circ g^{\mathcal{A}} = \mathrm{id}_A$. Udowodnić, że jeśli algebra $\mathcal{B} = \langle A, f^{\mathcal{B}}, g^{\mathcal{B}} \rangle$ jest obrazem homomorficznym algebry $\mathcal{A}$ to także $f^{\mathcal{B}} \circ g^{\mathcal{B}} = \mathrm{id}_B$.

44. Pokazać, że $(\mathcal{A}/\rho)/\rho'$ jest izomorficzne z pewnym $\mathcal{A}/\rho''$. Znaleźć odp. homomorfizm.

45. Opisać wszystkie kongruencje w pierścieniu liczb całkowitych i w ciele liczb rzeczywistych.

46. Jakiej mocy jest zbiór wszystkich kongruencji algebry $\langle \mathbb{N} \times \mathbb{N}, f \rangle$, gdzie $f(m,n) = (m+1,n)$ dla dowolnych m,n?

47. Pokazać, że kongruencje tworzą kratę zupełną.

48. Udowodnić, że istnienie homomorfizmu pomiędzy algebrami Herbranda (generowanymi przez stałe) określa quasiporządek, który po podzieleniu przez odp. równoważność jest izomorficzny z kratą kongruencji algebry termów stałych.

49. Jeśli dla każdej algebry $\mathcal{A}$ istnieje co najwyżej jeden homomorfizm z $\mathcal{A}_0$ do $\mathcal{A}$, to $\mathcal{A}_0$ jest algebrą Herbranda (i na odwrót). Jeśli taki homomorfizm zawsze istnieje, to A_0 jest (izomorficzne z) algebrą termów stałych.

50. Niech $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ i $g : \mathcal{A} \xrightarrow{\text{na}} \mathcal{C}$ będą homomorfizmami. Udowodnić, że $\ker(g) \subseteq \ker(f)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taki homomorfizm $h : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$, że $f = h \circ g$.

51. Niech $\mathcal{B} = \langle \mathbb{N}^+, \circ, 0 \rangle$, gdzie operacja $\circ$ jest określona tak:

    $$(n_1, \ldots, n_k) \circ (p_1, \ldots, p_m) = (n_1, \ldots, n_{k-1}, n_k + p_1, p_2, \ldots, p_m).$$

    Czy $\mathcal{B}$ jest półgrupą wolną?

52. Rozpatrzmy algebrę $\mathcal{A} = \langle (\mathbb{N}\times\mathbb{N})^+, \circ, \langle 0,0\rangle\rangle$, w której operacja $\circ$ jest określona tak:

$$(\langle n_1,m_1\rangle\cdots\langle n_k,m_k\rangle)\circ(\langle p_1,q_1\rangle\cdots\langle p_\ell,q_\ell\rangle) =$$
$$(\langle n_1,m_1\rangle\cdots\langle n_{k-1},m_{k-1}\rangle\langle n_k+p_1,m_k+q_1\rangle\langle p_2,q_2\rangle\cdots\langle p_\ell,q_\ell\rangle).$$

(a) Udowodnić, że $\mathcal{A}$ jest obrazem homomorficznym algebry $\langle\{a,b,c\}^*,\cdot,\varepsilon\rangle$.

(b) Czy $\mathcal{A}$ jest półgrupą wolną?

53. Czy jeśli $h:\mathcal{A}\to\mathcal{A}/_\rho$ jest homomorfizmem to $\rho\subseteq\ker(h)$? A jeśli $\mathcal{A}$ jest algebrą wolną w jakiejś klasie algebr?

54. Mówimy, że algebra $\mathcal{A}=\langle A,f\rangle$ jest *algebrą pętelkową*, gdy f jest jednoargumentową operacją o następującej własności: dla dowolnego $a\in A$ istnieje taka (różna od zera) liczba $n\in\mathbb{N}$, że $f^n(a)=a$. Które z następujących stwierdzeń są prawdziwe i dlaczego?

(a) Obraz homomorficzny algebry pętelkowej jest zawsze algebrą pętelkową.

(b) Każda kongruencja w algebrze pętelkowej jest albo relacją totalną albo relacją identycznościową.

(c) Produkt dwóch algebr pętelkowych jest zawsze algebrą pętelkową.

(d) Produkt dwóch algebr pętelkowych, z których każda jest generowana przez jeden element, jest zawsze generowany przez co najwyżej 2 elementy.

(e) Produkt dowolnej rodziny algebr pętelkowych jest zawsze algebrą pętelkową.

(f) W klasie wszystkich algebr pętelkowych nie ma algebr wolnych.

(g) Klasa wszystkich algebr pętelkowych jest definiowalna równościowo.

55. Jakiej mocy jest

(a) rodzina wszystkich podalgebr;

(b) zbiór wszystkich kongruencji,

algebry $\langle\mathbb{N}\times\mathbb{N},f\rangle$, gdzie

$$f(m,n)=\begin{cases}\langle 0,0\rangle, & \text{jeśli } m=n=0;\\ \langle 0,n-1\rangle, & \text{jeśli } m=0 \text{ i } n>0;\\ \langle m-1,n\rangle, & \text{w przeciwnym przypadku.}\end{cases}$$

56. Rozpatrzmy algebrę $\mathcal{A}=\langle A,f\rangle$, w której

- $A=(\mathbb{N}-\{0\})\times\mathbb{N}$;
- $f(n,k\cdot n+i)=\langle n,k\cdot n+i+1\rangle$, dla $k\in\mathbb{N}$, $i<n-1$;
- $f(n,k\cdot n+n-1)=\langle n,k\cdot n\rangle$, dla $k\in\mathbb{N}$.

Które z następujących stwierdzeń są prawdziwe i dlaczego?

(a) Algebra $\mathcal{A}$ jest izomorficzna z własnym kwadratem kartezjańskim $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$.

(b) Każdy obraz homomorficzny algebry $\mathcal{A}$ jest też jej podalgebrą (z dokładnością do izomorfizmu).

(c) Każda podalgebra algebry $\mathcal{A}$ jest też jej obrazem homomorficznym.

57. Pokazać, że rzuty są homomorfizmami.

58. Pokazać, że dla dowolnej algebry $\mathcal{C}$ i dowolnych homomorfizmów $f : \mathcal{C} \to \mathcal{A}$, $g : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$, istnieje dokładnie jeden homomorfizm $h : \mathcal{C} \to \mathcal{A} \times \mathcal{B}$, spełniający warunki $\pi_1 \circ h = f$ i $\pi_2 \circ h = g$.

59. Pokazać, że produkt $\prod_{n \in \mathbb{N}} \langle \{0, 1\}, \max, \min, 0, 1\rangle$ jest izomorficzny z $\langle P(\mathbb{N}), \cup, \cap, \emptyset, \mathbb{N}\rangle$.

60. Jeśli r, s — takie kongruencje w $\mathcal{A}$, że $r \cap s = id$, oraz $(r\,;\,s) = A^2$, to $\mathcal{A}$ jest izomorficzna z produktem $\mathcal{A}/r \times \mathcal{A}/s$. Nadto zachodzi twierdzenie odwrotne: czynniki są zawsze izomorficzne z pewnymi ilorazami produktu.

61. Uogólnić poprzednie zadanie na dowolne produkty przy założeniu, że $\bigcap_{i \in I} \rho_i = id$, oraz dla dowolnego $\varphi : I \to \mathcal{A}$ istnieje takie a, że $\varphi_i \, \rho_i \, a$ dla wszystkich i.

62. Podać przykład algebry, której kwadrat kartezjański składa się z jej izomorficznych kopii.

63. Podać przykład algebry $\mathcal{A}$ takiej, że dla dowolnych dwóch podalgebr $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2 \subseteq \mathcal{A}$ ich produkt $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$ nie jest izomorficzny z żadną podalgebrą $\mathcal{A}$.

64. Opisać wszystkie kongruencje, wszystkie podalgebry i kwadrat kartezjański dla algebry (zrobić rysunek):

   (a) $\langle \{0, 1, 2, 3\}, f\rangle$, gdzie $f(i) = i + 1 \bmod 4$, dla $i = 1, \ldots, 4$;

   (b) $\langle \{1, 2, 3, 4\}, f\rangle$, gdzie $f(i) = 1$, dla $i \neq 1$, oraz $f(1) = 2$;

   (c) $\langle \{1, 2, 3\}, *\rangle$, gdzie $i * i = i$ oraz $i * j = k$, dla $i \neq j \neq k \neq i$. Ta algebra jest wolna w pewnej klasie definiowalnej równościowo. Jakiej?

65. Obliczyć wartość termu $f(x, g(f(y, x)))$ w strukturach:

   (a) $\mathcal{A} = \langle \{a, b\}^*, f^{\mathcal{A}}, g^{\mathcal{A}}\rangle$, gdzie $f^{\mathcal{A}}(w, v) = wv$ i $g^{\mathcal{A}}(w) = w^R$, dla dowolnych w i v;

   (b) $\mathcal{B} = \langle \{a, b\}^*, f^{\mathcal{B}}, g^{\mathcal{B}}\rangle$, gdzie $f^{\mathcal{B}}(w, v)$ to najdłuższy wspólny prefiks w i v, oraz $g^{\mathcal{B}}(w) = tail(w)$, dla dowolnych w i v;

   (c) $\mathcal{C} = \langle \{a, b\}^*, f^{\mathcal{C}}, g^{\mathcal{C}}\rangle$, gdzie $f^{\mathcal{C}}(w, v) = w$ i $g^{\mathcal{C}}(w) = aw$, dla dowolnych w i v,

przy takim wartościowaniu v, że $v(x) = ba$, $v(y) = bba$.

66. Obliczyć wartość termu $(x + y) \cdot (y - x)$ w strukturach:

$$\langle \mathbb{Z}, \bullet, +, - \rangle, \quad \langle \mathbf{P}(\mathbb{N}), \cap, \cup, - \rangle, \quad \langle \mathbb{N}, \cdot, \sharp, \sim \rangle,$$

gdzie $n \bullet m = 2n + m$, $n \sharp m = |n - m|$, $n \sim m = \lfloor \frac{n}{m+1} \rfloor$, przy takim wartościowaniu v, że $v(x) = 3$, $v(y) = 7$.

67. Obliczyć wartość termu $(x \cdot y) \cdot c$ w strukturach:

$$\langle \mathbb{N}, \cdot, 1 \rangle, \quad \langle \mathbb{N}, +, 0 \rangle, \quad \langle \mathbb{N}, \sharp, 2 \rangle,$$

gdzie $n \sharp m = |n - m|$, przy takim wartościowaniu v, że $v(x) = 2$ i $v(y) = 3$.

68. Zbadać czy krata zbiorów wypukłych na płaszczyźnie jest dystrybutywna.

69. Czy homomorfizm porządkowy krat (algebr Boole'a) jest homomorfizmem krat (algebr Boole'a)?

70. Czy obraz homomorficzny kraty dystrybutywnej musi być kratą dystrybutywną?

71. Rozpatrzmy relację r w zbiorze $P(\mathcal{R})$, określoną następująco: $A\,r\,B$ wtedy i tylko wtedy gdy A i B są równoliczne. Czy relacja r jest kongruencją w algebrze Boole'a $\langle P(\mathcal{R}), \cup, \cap, -, \mathcal{R}, \emptyset \rangle$? Jeśli tak, to opisać algebrę ilorazową.

72. Pokazać, że jeśli wszystkie filtry w algebrze Boole'a są główne, to jest ona skończona.

73. Scharakteryzować kongruencje w algebrach Boole'a jako relacje zadane przez filtry na dwa równoważne sposoby:

    (a) $a \rho b$ wtedy i tylko wtedy gdy $(a \cup -b) \cap (b \cup -a) \in F$;

    (b) $a \rho b$ wtedy i tylko wtedy gdy istnieje $f \in F$, takie że $a \cap f = b \cap f$.

74. Pokazać, że jeśli $\sim$ jest kongruencją w algebrze Boole'a $\mathcal{B}$, to $F = [1]_\sim$ jest filtrem, oraz $a \sim b$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $(a \cup -b) \cap (b \cup -a) \in F$.

75. Przy oznaczeniach z poprzedniego zadania pokazać, że filtr F jest maksymalny wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{B}/_\sim$ jest dwuelementowa.

76. Niech $\mathcal{B}$ będzie algebrą Boole'a. Dla dowolnego $a \in B$ przez $\mathcal{R}^a$ oznaczymy rodzinę wszystkich filtrów maksymalnych, do których należy a. Udowodnić, że dla dowolnych a, b:

    (a) $\mathcal{R}^{a \cup b} = \mathcal{R}^a \cup \mathcal{R}^b$;

    (b) $\mathcal{R}^{a \cap b} = \mathcal{R}^a \cap \mathcal{R}^b$;

    (c) $\mathcal{R}^0 = \emptyset$ i $\mathcal{R}^1 = \mathcal{F}$;

    (d) $\mathcal{R}^{-a} = \mathcal{F} - \mathcal{R}^a$,

gdzie $\mathcal{F}$ oznacza rodzinę wszystkich filtrów maksymalnych w $\mathcal{B}$. Wywnioskować stąd, że algebra $\mathcal{B}$ jest izomorficzna z pewną podalgebrą algebry $\mathbf{P}(\mathcal{F})$.

77. Udowodnić, że $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ z dodawaniem po współrzędnych jest wolną grupą abelową o dwóch generatorach.

78. Opisać kraty wolne o jednym i dwóch generatorach. Czy krata wolna o trzech generatorach jest dystrybutywna?

79. Udowodnić, że dwie algebry wolne w tej samej klasie i o tej samej liczbie wolnych generatorów muszą być izomorficzne.

80. Pokazać, że $PH(\mathfrak{K}) \subseteq HP(\mathfrak{K})$, $PS(\mathfrak{K}) \subseteq SP(\mathfrak{K})$, oraz $SH(\mathfrak{K}) \subseteq HS(\mathfrak{K})$, gdzie $P(\mathfrak{K})$, $S(\mathfrak{K})$ i $P(\mathfrak{K})$ oznacza odpowiednio klasę wszystkich produktów, podalgebr i obrazów homomorficznych algebr z klasy $\mathfrak{K}$. Stąd $HSP(HSP(\mathfrak{K})) = HSP(\mathfrak{K})$.

81. Pokazać, że jeśli $\mathcal{A}$ jest algebrą wolną w klasie $\mathfrak{K}$ to jest też wolną w klasie $HSP(\mathfrak{K})$.

82. Pokazać, że nie zawsze zachodzą inkluzje

    (a) $HP(\mathfrak{K}) \subseteq PH(\mathfrak{K})$;

    (b) $SP(\mathfrak{K}) \subseteq PS(\mathfrak{K})$;

    (c) $HS(\mathfrak{K}) \subseteq SH(\mathfrak{K})$.

83. Jaki jest związek pomiędzy $\mathfrak{K}$ i $\mathrm{Mod}(\mathrm{Eq}(\mathfrak{K}))$, a jaki pomiędzy E i $\mathrm{Eq}(\mathrm{Mod}(E))$? Kiedy zachodzą równości?

84. Czy algebra $\langle P(\mathbb{N}), \cup, \cap \rangle$ jest kratą wolną?

85. Pokazać, że aksjomaty grup są wzajemnie niezależne.

86. Podaj przykład równości prawdziwej i nieprawdziwej w algebrze

    (a) $\langle P(\mathbb{N}), \cup, \cap \rangle$;

    (b) $\langle \mathbb{N}, \cdot, 1 \rangle$;

    (c) $\langle \mathbb{N}, +, 0 \rangle$.

87. Czy algebra $\langle \mathbb{N}, \cdot, 1 \rangle$ jest półgrupą wolną? A wolną półgrupą abelową?

88. Algebry $\langle \mathbb{N} - \{0\}, \cdot, 1 \rangle$ i $\langle \mathbb{N}, +, 0 \rangle$ są wolne w pewnej równościowo definiowalnej klasie algebr. Jakiej? Wskaż ich wolne generatory. Opisz algebrę wolną w tej samej klasie o dwóch wolnych generatorach.

89. Czy klasa wszystkich lokalnie skończonych (zob. zadanie 12) algebr sygnatury Σ jest definiowalna równościowo?

90. W algebrze termów $\mathcal{T}(1)$ dla języka z jedną operacją unarną definiujemy:

    $t \leq t'$ *wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje automorfizm* h *algebry* $\mathcal{T}(1)$, *taki że* $h(t) = t'$

    Czy to jest częściowy (liniowy, dobry) porządek? Co się zmieni dla algebry $\mathcal{T}(2)$?

91. Scharakteryzować te skończone algebry Boole'a, które są algebrami wolnymi.

92. Niech E będzie takim zbiorem równań, że $(t_1 = t_2) \notin \mathrm{Con}(E)$. Istnieje maksymalny zbiór E' taki, że $E \subseteq E'$ oraz $(t_1 = t_2) \notin \mathrm{Con}(E')$

93. Jeśli rozmaitość ma algebrę co najmniej 2-elementową, to ma nieskończoną, a jeśli ma nieskończoną to ma przeliczalną.

94. Czy algebra $\mathcal{A}$ z zadania 35 jest wolna w klasie zdefiniowanej przez równanie „$f(f(f(f(x)))) = f(x)$"?

95. Dana sygnatura z dwiema operacjami unarnymi a i b. Rozważamy trzy algebry.

    (a) zbiór $\{1\}^*$ z operacjami $a(x) = 1x, b(x) = 1x$;

    (b) zbiór $\{1,2\}^*$ z operacjami $a(x) = 1x, b(x) = 2x$;

    (c) zbiór $\{1,2,3\}^*$ z operacjami $a(x) = 1x, b(x) = 2x$.

    W których z nich prawdziwe są te same równania?

96.* Czy możliwe, aby ta sama algebra była wolna w pewnej klasie $\mathfrak{K}$ z dwoma różnymi zbiorami wolnych generatorów

    (a) tej samej mocy?

    (b) różnej mocy?

97. Opisać algebrę wolną o 2 generatorach w klasie definiowanej równościami $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$, $x \cdot x = x$.

98. Podać przykład klasy $\mathfrak{K}$, algebry $\mathcal{A}$ wolnej w $\mathfrak{K}$ i takiego równania $t_1 = t_2$, które jest prawdziwe w $\mathcal{A}$, ale nie w $\mathfrak{K}$.

99. Algebra $\mathcal{A}$ jest algebrą wolną w klasie $\mathfrak{K}$ o czterech wolnych generatorach. Udowodnić, że jeśli $FV(t_1) \cup FV(t_2) \subseteq \{x_1, x_2, x_3\}$, oraz $\mathcal{A} \models t_1 = t_2$ to $\mathfrak{K} \models t_1 = t_2$.

100. Sygnatura Σ składa się z dwóch symboli stałych a i b oraz jednego dwuargumentowego symbolu funkcyjnego f. Klasa $\mathfrak{K}$ algebr sygnatury Σ jest określona równaniami $f(f(x,y),z) = f(x, f(y,z))$ i $f(a,b) = f(b,a)$. Czy $\mathfrak{K} \models f(x,y) = f(y,x)$? A czy to równanie jest prawdziwe w algebrze początkowej w $\mathfrak{K}$?

101. Rozważamy trzy algebry $\mathcal{O} = \langle O, \oplus \rangle$, $\mathcal{T} = \langle T, \oplus \rangle$ i $\mathcal{K} = \langle K, \oplus \rangle$, gdzie zbiory O, T i K to odpowiednio odcinek, trójkąt i kwadrat. Operacja $\oplus$ jest zawsze określona tak samo: $A \oplus B$ to środek odcinka AB.

    (a) Udowodnić, że każdy wypukły podzbiór zbioru T jest podalgebrą w $\mathcal{T}$. Czy wszystkie podalgebry są wypukłe?

    (b) Czy algebra $\mathcal{O}$ jest izomorficzna z jakimś ilorazem algebry $\mathcal{T}$?

(c) Udowodnić, że $HSP(\{\mathcal{O}\}) = HSP(\{\mathcal{T}\}) = HSP(\{\mathcal{K}\})$.

(d) Niech $\mathcal{W}$ będzie algebrą wolną w klasie $HSP(\{\mathcal{O}\})$ o dwóch wolnych generatorach. Udowodnić, że $\mathcal{W}$ jest nieskończona.

(e) Udowodnić, że w algebrach $\mathcal{O}$, $\mathcal{T}$ i $\mathcal{K}$ prawdziwe są te same równania.

(f) Z części (101e) wywnioskować, że odcinki łączące połowy przeciwległych boków dowolnego czworokąta dzielą się nawzajem na połowy.

(g) Udowodnić, że żadne dwie spośród algebr $\mathcal{O}$, $\mathcal{T}$ i $\mathcal{K}$ nie są izomorficzne.

102. Symbol funkcyjny f jest dwuargumentowy. Termy t_n, dla $n > 0$, są zdefiniowane tak: $t_1 = f(x_1, x_0)$, $t_{n+1} = f(x_{n+1}, t_n)$. Oczywiście $FV(t_n) = \{x_0, \ldots, x_n\}$. Przez Γ_m oznaczymy zbiór wszystkich równań postaci „$t_n = x_0$" dla $n \geq m$. Mówimy, że algebra $\mathcal{A}$ sygnatury Σ jest *fajna*, jeśli $\mathcal{A} \models t_n = x_0$ dla pewnego $n > 0$. Natomiast algebra $\mathcal{A}$ jest *lepsza*, gdy $\mathcal{A} \models \Gamma_m$ dla pewnego $m > 0$.

(a) Które z równości $f(x,y) = f(z,y)$, $f(x,y) = f(z,u)$, $f(x,y) = y$ są prawdziwe w każdej fajnej algebrze? A które w każdej lepszej?

(b) Czy klasa algebr fajnych jest definiowalna równościowo? A klasa algebr lepszych?

(c) Czy istnieje takie zdanie pierwszego rzędu φ, że $\mathcal{A} \models \varphi$ zachodzi wtedy i tylko wtedy gdy $\mathcal{A}$ jest algebrą fajną? A jak jest w przypadku algebr lepszych?

(d) Ile elementów ma algebra wolna o trzech wolnych generatorach w klasie algebr lepszych?

(e) Czy każda relacja równoważności w algebrze fajnej jest w tej algebrze kongruencją? A jak jest w przypadku algebr lepszych?

Rozwiązania i wskazówki do niektórych zadań

Zadanie 4. Wskazówka: Zrobić zadanie 25f.

Zadanie 52a. Wskazówka: znaleźć trzy generatory.

Zadanie 54. Każda algebra pętelkowa składa się z „pętli”, czyli rozłącznych podalgebr postaci $\{a_0, \ldots, a_{n-1}\}$, gdzie $f(a_i) = a_{i+1}$ dla $i < n-1$, oraz $f(a_{n-1}) = a_0$.

1. Tak. Niech $\langle A, f\rangle$ będzie algebrą pętelkową. Jeśli $h : \langle A, f\rangle \xrightarrow{\text{na}} \langle B, g\rangle$ jest homomorfizmem, oraz $f^n(a) = a$, to oczywiście $g^n(h(a)) = h(f^n(a)) = h(a)$. Ponadto każdy element B jest postaci $f(a)$, dla pewnego $a \in A$.

2. Nie. Niech np. $A = \{0, \ldots, 5\}$, oraz $f(i) = i + 1 \bmod 6$, dla dowolnego i. Relacja przystawania modulo 3 jest kongruencją w algebrze $\langle A, f\rangle$.

3. Tak. Niech $\langle A, f\rangle$ i $\langle B, g\rangle$ będą algebrami pętelkowymi. Ich iloczyn kartezjański to algebra $\langle A\times B, \varphi\rangle$, w której $\varphi(a, b) = \langle f(a), g(b)\rangle$. Jeśli $\langle a, b\rangle \in A\times B$, to dla pewnych n, m zachodzi $f^n(a) = a$ i $g^m(b) = b$. Jesli $k = NWW(m, n)$ to $\varphi^k(a, b) = \langle a, b\rangle$.

4. Nie. Produkt pętli rozmiaru 6 i 15 składa się z 3 rozłącznych pętli.

5. Nie. Niech $A_n = \{0, \ldots, n-1\}$ i niech $f_n(i) = i + 1 \bmod n$, dla $i \in A_n$. Produktem algebr $\langle A_n, f_n\rangle$ jest algebra $\langle \prod_{n\in\mathbb{N}-\{0\}} A_n, \varphi\rangle$, w której $\varphi(\alpha)(n) = \alpha(n)+1 \bmod n$ dla dowolnego $\alpha \in \prod_{n\in\mathbb{N}-\{0\}} A_n$. Dla ustalenia uwagi niech α będzie stale równa zeru. Wtedy dla $m > n$ zachodzi $\varphi^n(\alpha)(m) = n \neq 0$, a wiec $\varphi^n(\alpha) \neq \alpha$. A więc nasz produkt nie jest algebrą pętelkową.

6. Tak. Przypuśćmy, że algebra $\langle A, f\rangle$ jest wolna w klasie algebr pętelkowych, i niech $a \in A$ będzie takie, że $f^n(a) = a$. Jeśli $\langle B, g\rangle$ jest pojedynczą pętlą rozmiaru większego od n, to nie istnieje żaden homomorfizm z $\langle A, f\rangle$ do $\langle B, g\rangle$.

7. Nie. Wynika to z poprzedniej części, bo klasy definiowalne równościowo mają algebry wolne. Inne rozwiazanie wynika z części (e): ta klasa nie jest zamknięta ze względu na produkty.

Zadanie 55. Niech $A = \{\langle 0, n\rangle \mid n \in \mathbb{N}\}$ oraz $B_n = \{\langle m, n\rangle \mid m \in \mathbb{N}\}$.

(a) Oczywiście każda podalgebra jest podzbiorem zbioru $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, a więc jest ich co najwyżej $\mathfrak{C}$. Ponadto, dla dowolnego $P \subseteq \mathbb{N}$, zbiór $Z_P = A \cup \bigcup\{B_n \mid n \in P\}$ jest podalgebrą algebry $\langle \mathbb{N}\times\mathbb{N}, f\rangle$. Mamy więc dokładnie $\mathfrak{C}$ podalgebr.

(b) Niech $P \subseteq \mathbb{N}$ i niech $h_P : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \xrightarrow{\text{na}} Z_P$ (gdzie Z_P jest jak w części (a)) będzie określone tak:

$$h(m,n) = \begin{cases} \langle m,n\rangle, & \text{jeśli } n \in P; \\ \langle 0, n+m\rangle, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Przekształcenie h_P jest homomorfizmem. Co więcej, dla różnych P, jądra homomorfizmów h_P są różne.[2] Istotnie: jeśli np. $n \in P - Q$ to $h_Q(1,n) = h_Q(0,n+1)$, ale $h_P(1,n) \neq h_P(0,n+1)$. Mamy więc continuum różnych kongruencji. Podobnie jak w punkcie (a), ograniczenie z góry jest oczywiste, a więc moc zbioru wszystkich kongruencji jest równa $\mathfrak{C}$.

Zadanie 56. Nasza algebra jest algebrą pętelkową (zob. zadanie 54), przy czym liczba pętli każdego możliwego rozmiaru n jest nieskończona. Zatem każda przeliczalna algebra pętelkowa jest podalgebrą algebry $\mathcal{A}$. Każdy obraz homomorficzny algebry $\mathcal{A}$ jest przeliczalną algebrą pętelkową, więc stwierdzenie (b) jest prawdziwe.

Podobnie iloczyn kartezjański $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ jest algebrą pętelkową i też ma nieskończenie wiele pętli każdego rozmiaru, więc stwierdzenie (a) jest prawdziwe.

Natomiast stwierdzenie (c) nie jest prawdziwe, bo na przykład podalgebra złożona z elementów $\langle 3,0\rangle$, $\langle 3,1\rangle$, $\langle 3,2\rangle$ nie jest obrazem homomorficznym $\mathcal{A}$. Gdyby bowiem h było odpowiednim homomorfizmem, to mielibyśmy $f(f(h(2,0))) = h(f(f(2,0))) = (2,0)$ a to nie może zajść w trzyelementowej pętli.

Zadanie 64c. Jest to algebra wolna (o dwóch wolnych generatorach) w klasie zadanej przez równania $x * x = x$, $x * y = y * x$, $x * (y * x) = y$.

Zadanie 82. Część 1: Dowolny zbiór potęgowy jest izomorficzny z produktem dwuelementowych algebr Boole'a i ma iloraz, który nie jest zbiorem potęgowym (nie jest atomowy). Natomiast ilorazy algebr dwuelementowych są trywialne więc ich produkty są atomowe.

Część 2: Podalgebra produktu $\langle \mathbb{N}, s\rangle \times \langle \mathbb{N}, s\rangle$ złożona z dwóch gałęzi sama nie jest produktem podalgebr.

Część 3: Ciało $\mathbb{Z}_3$ jest obrazem podalgebry $\mathbb{Z}$ ciała $\mathbb{R}$, ale nie jest podalgebrą żadnego ilorazu, bo ideały są tylko trywialne.

Zadanie 89. Niech A_n będzie „pętlą" rozmiaru $n+1$. Wtedy produkt $\prod_{n\in\mathbb{N}} A_n$ nie jest lokalnie skończony, a nawet każdy jego element generuje nieskończoną podalgebrę. Zatem klasa algebr lokalnie skończonych nie jest zamknięta ze względu na produkty i nie może być definiowalna równościowo.

Zadanie 91. Wskazówka: Dla 3 generatorów narysować 3 kółka.

Zadanie 93. Nieskończoną, bo jest zamknięta ze względu na produkty, przeliczalną, bo jest zamknięta ze względu na podalgebry.

Zadanie 95. W drugiej i trzeciej.

[2] Można powiedzieć wiecej: obrazy homomorfizmów h_P i h_Q nie są nawet izomorficzne.

Zadanie 97. Ta algebra ma wszystkiego 6 elementów: a, b, ab, ba, aba i bab.

Zadanie 98. Półgrupa wolna o jednym generatorze (algebra słów jednoliterowych) jest abelowa (tj. prawdziwe jest w niej równanie $x \cdot y = y \cdot x$. Podobnie, jeśli $\mathfrak{K}$ jest definiowana równościami $f(x,x,y) = x$, $f(y,x,x) = x$ i $f(x,y,x) = x$ to algebra wolna o dwóch generatorach jest dwuelementowa i zachodzi w niej warunek $f(x,y,z) = f(y,x,z)$.

Zadanie 99. Niech a_1, a_2, a_3, a_4 będą wolnymi generatorami algebry $\mathcal{A}$. Załóżmy, że $\mathcal{B} \in \mathfrak{K}$ i że w jest wartościowaniem w $\mathcal{B}$. Przyporządkowanie zadane warunkami $h(a_i) = w(x_i)$ dla $i = 1,2,3$ oraz $h(a_4) = x_1$ rozszerza się do homomorfizmu $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$. Niech v będzie takim wartościowaniem w $\mathcal{A}$ przy którym $v(x_i) = a_i$ dla $i = 1,2,3$. Jeśli teraz $FV(t) \subseteq \{x_1, x_2, x_3\}$, to $w(t) = h(v(t))$, co pokazujemy przez indukcję ze względu na długość termu t:

Dla zmiennych równość wynika wprost z założenia. Jeśli $t = f(u_1,\ldots,u_n)$ to $w(t) = f^{\mathcal{B}}(w(u_1),\ldots,w(u_n)) = f^{\mathcal{B}}(h(v(u_1)),\ldots,h(v(u_n))) = h(f^{\mathcal{A}}(v(u_1)),\ldots,f^{\mathcal{A}}(v(u_n))) =$
$= h(v(f(u_1,\ldots,u_n))) = h(v(t))$.

A zatem $w(t_1) = h(v(t_1)) = h(v(t_2)) = w(t_2)$. Stąd $\mathcal{B}, w \models t_1 = t_2$.

Zadanie 101. 101a. Jeśli podzbiór P jest wypukły to odcinek łączący dwa punkty z P jest zawarty w P. Tym bardziej więc środek tego odcinka należy do P. Ale podalgebra generowana przez dwa różne punkty nie jest wypukła, bo jest przeliczalna.

101b. Tak. Rzutowanie trójkąta na odcinek zachowuje operację $\oplus$, jest więc homomorfizmem. A zatem $\mathcal{O}$ jest izomorficzne z ilorazem $\mathcal{T}$ przez jądro tego homomorfizmu.

101c. Z części (101b) wynika, że $\mathcal{O} \in H(\{\mathcal{T}\})$ a stąd $HSP(\{\mathcal{O}\}) \subseteq HSP(\{\mathcal{T}\})$. Dalej mamy $\mathcal{T} \in S(\{\mathcal{K}\})$, bo trójkąt $\mathcal{T}$ jest podobny do pewnego trójkąta zawartego w $\mathcal{K}$. (Podobieństwo zachowuje środki odcinków, więc jest izomorfizmem). Stąd $HSP(\{\mathcal{T}\}) \subseteq HSP(\{\mathcal{K}\})$. Wreszcie kwadrat jest produktem dwóch odcinków, więc $\mathcal{K} \in P(\{\mathcal{O}\})$ i mamy też $HSP(\{\mathcal{K}\}) \subseteq HSP(\{\mathcal{O}\})$.

101d. Do naszej klasy należy odcinek $(0,1)$ z operacją $x \oplus x' = \frac{1}{2}(x + x')$ (jest izomorficzny z $\mathcal{O}$). Jeśli generatorom algebry wolnej przyporządkujemy liczby 0 i 1 to obrazem homomorfizmu rozszerzającego to przyporządkowanie jest ta właśnie nieskończona podalgebra. A więc algebra wolna też musi być nieskończona.

101e. Należy skorzystać z części (101c).

101f. Odcinek $\mathcal{O}$ jest izomorficzny z przedziałem $(0,1)$, gdzie operacja $\oplus$ to średnia arytmetyczna. Zatem $\mathcal{O} \models (x \oplus y) \oplus (z \oplus v) = (x \oplus v) \oplus (y \oplus z)$. Wybierzmy teraz kwadrat $\mathcal{K}$ tak, aby cały nasz czworokąt był w nim zawarty. Teza wynika stąd, że w $\mathcal{K}$ powyższe równanie też jest prawdziwe.

101g. W algebrze $\mathcal{O}$ są dwa takie punkty C, które nie są postaci $A \oplus B$ dla $A, B \in \mathcal{O}$, $A, B \neq C$. W algebrze $\mathcal{T}$ są takie trzy, a w $\mathcal{K}$ cztery.

Zadanie 102.

Część 102a: Wartość termu t_n przy wartościowaniu $\{a_n/x_n, \dots, a_0/x_0\}$ będziemy dla uproszczenia zapisywać po prostu jako $t_n(a_n, \dots, a_0)$.

Pokażemy najpierw, że w algebrach fajnych prawdziwe jest równanie $f(x, y) = f(z, y)$, tj., że operacja f zależy tylko od drugiego argumentu. Załóżmy, że w algebrze $\mathcal{A}$ prawdziwe jest równanie $t_n = x_0$. Wtedy, dla dowolnych $a_0, \dots, a_n$:

$$a_0 = t_n(a_n, \dots, a_0) = t_{n-1}(a_n, \dots, f(a_1, a_0)) = f(a_n, t_{n-1}(a_{n-1}, \dots, a_0)).$$

Zatem $f(a_1', a_0) = f(a_1', t_n(a_n, \dots, a_1, a_0)) = t_n(a_1', a_n, \dots, a_2, f(a_1, a_0)) = f(a_1, a_0)$, dla dowolnych a_1, a_1'.

Pozostałe dwa równania nie są prawdziwe na przykład w algebrze o elementach 0, 1 i 2, w której $f(a, b) = (b + 1) \bmod 3$.

Natomiast w algebrach lepszych prawdziwe jest równanie $f(x, y) = y$, bo dla dostatecznie dużego n mamy $a_0 = t_{n+1}(a_n, \dots, a_0) = t_n(a_n, \dots, f(a_1, a_0)) = f(a_1, a_0)$. Oznacza to, że algebry lepsze to dokładnie te algebry, w których f jest rzutowaniem na drugą współrzędną. (Rzutowanie spełnia definicję dla $m = 1$.) Ale rzutowanie na ogół nie jest funkcją stałą, więc równanie $f(x, y) = f(z, u)$ nie jest prawdziwe w algebrach lepszych.

Część 102b: Z powyższego wynika, że klasa algebr lepszych jest definiowalna równaniem $f(x, y) = y$. Natomiast klasa algebr fajnych nie jest definiowalna równościowo, bo nie jest zamknięta ze względu na produkty. Rozpatrzmy np. algebry $\mathcal{A}_n = \langle A_n, f_n \rangle$, gdzie $A_n = \{0, \dots, n\}$ oraz $f_n(a, b) = (b + 1) \bmod n$. Wtedy produkt $\Pi_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_n$ nie jest fajny.

Ostatnia zmiana 25 sierpnia 2005 o godzinie 13:06.