Egzamin z rachunku lambda

1 lutego 2006

1. Skonstruować taki lambda-term M, że $MM =_\beta M$. Czy M ma własność silnej normalizacji? Czy ma postać normalną? Czy jest typowalny w rachunku typów prostych? Czy istnieje taki term w rachunku kombinatorów, że $MM =_w M$? (Jeśli tak, należy podać konkretny przykład.)

2. Niech $C = (\lambda Fxy.\, xF(\lambda z.\, \mathbf{1})(yF(\lambda z.\, \mathbf{0})))(\lambda fg.gf)$. Jaką funkcję z $\mathbb{N}^2$ do $\mathbb{N}$ definiuje ten term? Ile kroków redukcji (z dokładnością do stałego czynnika) potrzeba do obliczenia wartości tej funkcji dla danych argumentów? Czy term C jest typowalny w rachunku typów prostych? Czy dla jakiegoś τ ma typ $\omega_\tau \to \omega_\tau \to \omega_\tau$, gdzie $\omega_\tau = (\tau \to \tau) \to \tau \to \tau$? Jeśli nie, to czy istnieje term typu $\omega \to \omega \to \omega$, definiujący tę samą funkcję? A term typu $\omega_\tau \to \omega_\tau \to \omega_\rho$, dla różnych τ, ρ?

3. Czy następujące formuły są tautologiami logiki intuicjonistycznej?

   (a) $((p \to q) \to r) \to (p \to r) \to r$?

   (b) $((((p \to q) \to r) \to (p \to r) \to r) \to q) \to q$?

4. Proszę napisać wypracowanie (bez dowodów, na maksymalnie pół strony A4) na temat: *Co mi wiadomo o modelach dla rachunku lambda z typami prostymi?*

Odpowiedzi:

1. W zadaniu miało chodzić o zastosowanie kombinatora punktu stałego ($M = \mathbf{Y}(\lambda m.mm)$), ale przykład został źle wybrany. Równanie $M =_\beta MM$ ma trywialne rozwiązanie: w rachunku lambda $M = \lambda x\, x$, a w rachunku kombinatorów $M = \mathbf{I} = \mathbf{SKK}$. To rozwiązanie jest oczywiście typowalne i silnie normalizowalne.

2. Niech $\mathrm{F} = \lambda fg.gf$ i niech $A_1(k,l) = \mathrm{F}^k(\lambda z.\, \mathbf{1})(\mathrm{F}^l(\lambda z.\, \mathbf{0}))$ oraz $A_0(k,l) = \mathrm{F}^k(\lambda z.\, \mathbf{0})(\mathrm{F}^l(\lambda z.\, \mathbf{1}))$. Wtedy $C\mathbf{mn} \twoheadrightarrow A_1(m,n)$, oraz $A_1(k,l) \twoheadrightarrow A_0(l,k-1)$ i $A_0(k,l) \twoheadrightarrow A_1(l,k-1)$, dla $k > 0$, a więc funkcja definiowana przez C:

$$c(m,n) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } m \le n; \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku,} \end{cases}$$

jest obliczana w czasie proporcjonalnym do mniejszego argumentu. Term C nie ma typu $\omega \to \omega \to \omega$, ani żadnego typu postaci $\omega_\tau \to \omega_\tau \to \omega_\tau$, bo typem głównym termu $\lambda fg.gf$ jest $\alpha \to (\alpha \to \beta) \to \beta$, który nie jest postaci $\tau \to \tau$. Ale C jest typowalny w typach prostych, jesli bowiem przyjmiemy, że $x : (\alpha \to (\alpha \to \beta) \to \beta) \to (\gamma \to \omega) \to \delta \to \varepsilon$ oraz $y : (\alpha \to (\alpha \to \beta) \to \beta) \to (\gamma \to \omega) \to \delta$, to otrzymamy $xF(\lambda z.\, \mathbf{1})(yF(\lambda z.\, \mathbf{0})) : \varepsilon$. Funkcja c nie jest definiowalna w typach prostych, bo nie jest wielomianem warunkowym. Nie jest też definiowalna przez term typu $\omega_\tau \to \omega_\tau \to \omega_\rho$, bo wtedy możnaby też zdefiniować test na równość. A z twierdzenia Statmana wiadomo, że to niemożliwe.

3a. Nie, bo wtedy istniałby term tego typu w długiej postaci normalnej, i musiałby mieć postać $\lambda x^{(p\to q)\to r}\lambda y^{p\to r}.M$, gdzie M byłby typu r. Wtedy albo $M = yN$, gdzie $N : p$ albo $M = x(\lambda z^p.R)$, gdzie $R : q$. Ale takich termów N ani R nie ma, bo nie mamy zmiennej typu kończącego się na p lub q.

3b. Tak, bo mamy term tego typu:

$$\lambda x^{(((p\to q)\to r)\to(p\to r)\to r)\to q}.\, x(\lambda y^{(p\to q)\to r}\lambda z^{p\to r}.\, y(\lambda u^p.\, x(\lambda y_1^{(p\to q)\to r}\lambda z_1^{p\to r}.zu)))$$

4. Należało (co najmniej) podać ogólną definicję modelu i definicję modelu postaci $\mathfrak{M}(A)$, sformułować twierdzenie o pełności dla modeli $\mathfrak{M}(A)$ i twierdzenie Statmana o modelach skończonych.