Egzamin z logiki intuicjonistycznej, 21 czerwca 2012

1. Dla następujących formuł wskazać kontrprzykłady w modelach Kripkego i kontrprzykłady w algebrach Heytinga:

   (a) $(\neg p \to q \vee r) \to ((\neg p \to q) \vee (\neg p \to r))$;

   (b) $(q \wedge r \to \neg p) \to ((q \to \neg p) \vee (r \to \neg p))$.

2. Rozpatrzmy następujące schematy aksjomatów:

   (A) $\forall x(\psi \vee \varphi(x)) \to \psi \vee \forall x\, \varphi(x)$;

   (B) $(\forall x\, \varphi(x) \to \psi) \to \exists x\, (\varphi(x) \to \psi)$;

   (C) $\exists x(\varphi(x) \to \forall y \varphi(y))$.

   Czy w logice intuicjonistycznej pierwszego rzędu rozszerzonej o jeden z tych schematów można udowodnić któryś z pozostałych?

3. Dla następujacych formuł logiki zdaniowej drugiego rzędu znaleźć (intuicjonistycznie) równoważne formuły bez kwantyfikatorów:

   (a) $\exists p\, ((q \to p) \to q)$;

   (b) $\exists p\, (((q \to p) \to p) \to r)$;

   (c) $\forall p\, (q \vee (q \to p))$;

   (d) $\exists p\, (q \vee (q \to p))$.

Wskazówki do rozwiązań

1: Kontrprzykłady Kripkego są na rysunku. Strzałki oznaczają relację $\leq$ w zbiorze stanów. Zaznaczono wszystkie zmienne zdaniowe wymuszone w poszczególnych stanach.

(1a)
$$\begin{tikzcd} & q \\ \bullet \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & r \\ & p \end{tikzcd}$$

(1b)
$$\begin{tikzcd} & p, q \\ p \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & p, r \end{tikzcd}$$

Kontrprzykłady Heytinga wybierzemy w algebrze otwartych podzbiorów prostej. W części 1a niech $v(p) = (-\infty, 0)$, $v(q) = (0, \infty) - \{\frac{1}{2^n} \mid n \geq 2\}$, $v(r) = (0, \infty) - \{\frac{1}{3^n} \mid n \geq 2\}$.
W części 1b weźmy $v(p) = \mathbb{R}$, $v(q) = (-\infty, 0)$, $v(r) = (0, \infty)$.

2: Schematy (B) i (C) są równoważne. W schemacie (B) możemy przyjąć $\forall x\, \varphi(x)$ jako ψ i otrzymamy (C). Mamy też oczywiste wynikanie $\varphi(x) \to \forall x\, \varphi(x), \forall x\, \varphi(x) \to \psi \vdash \varphi(x) \to \psi$, a więc (C) po prostu implikuje (B). Dalej, z paradoksu pijaka (C) wynika schemat Grzegorczyka (A). Mamy bowiem $\varphi(x_0) \to \forall y \varphi(y), \psi \vee \varphi(x_0) \vdash \psi \vee \forall y \varphi(y)$. Natomiast schematy (B) i (C) nie są konsekwencjami (A), bo (B) ma kontrprzykład o stałych dziedzinach (prosta adaptacja rozwiązania 1b).

3a: $\neg q \to q$ czyli $\neg\neg q$ (bo $\vdash \neg q \to (q \to p)$); **3b:** $q \to r$ (bo z jednej strony $q \vdash (q \to p) \to p$, a z drugiej $\vdash q \leftrightarrow (q \to q) \to q$); **3c:** $q \vee \neg q$ (bo z jednej strony $\neg q \vdash q \to p$, a z drugiej strony można przyjąć $p := \bot$); **3d:** $\top$ (bo wystarczy $p := q$).