**Egzamin z logiki intuicjonistycznej**
10 czerwca 2008

1. Niech $\mathcal{H}$ będzie algebrą Heytinga (można założyć, że jest to algebra formuł intuicjonistycznego rachunku zdań) i niech $F = \{a \in \mathcal{H} \mid -a = 0\}$. Definiujemy relację $\approx$:

   $$a \approx b \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } a \Rightarrow b \in F \text{ oraz } b \Rightarrow a \in F.$$

   Proszę udowodnić, że

   (a) zbiór $F$ jest filtrem w $\mathcal{H}$;

   (b) relacja $\approx$ jest kongruencją w $\mathcal{H}$;

   (c) algebra ilorazowa $\mathcal{H}/_{\approx}$ jest algebrą Boole'a.

2. Wiedząc, że każda klasyczna tautologia jest prawdziwa w dowolnej algebrze Boole'a, proszę z poprzedniego zadania wywnioskować twierdzenie Gliwenki.

3. Które z następujących formuł są twierdzeniami intuicjonistycznymi? Odpowiedź proszę uzasadnić. (Jeśli odpowiedź jest „tak" można np. podać dowód albo odpowiedni $\lambda$-term; jeśli odpowiedź jest „nie" można podać kontrprzykład topologiczny, model Kripkego itp.)

   (a) $(\neg q \to q) \leftrightarrow \neg\neg q$;

   (b) $((\neg\neg q \to q) \to \neg q) \to \neg q$;

   (c) $((\neg\neg p \to p) \to p \vee \neg p) \to \neg p \vee \neg\neg p$;

   (d) $\forall a(\neg P(a) \to \exists b\, Q(b)) \to \forall a \exists b(\neg P(a) \to Q(b))$;

   (e) $\forall p(q \vee ((p \to q) \to q) \to p) \to q \vee \forall p(((p \to q) \to q) \to p)$.[1]

[1] Wskazówka: rozpatrzyć podstawienie $p := \neg q$.

## Rozwiązania

**Zadanie 1a:** Warunek $-a = 0$ oznacza tyle co $\forall x(x \sqcap a = 0 \to x = 0)$. Jeśli $a, b \in F$ oraz $x \sqcap a \sqcap b = 0$ to wtedy $x \sqcap a = 0$, bo $b \in F$, i dalej $x = 0$, bo $a \in F$. Jeśli $a \in F$ oraz $a \leq b$ to $x \sqcap b \geq x \sqcap a$, jeśli więc $x \sqcap b = 0$ to tym bardziej $x \sqcap a = 0$, więc $x = 0$. Ponadto $F \neq \emptyset$, bo $-1 = 0$, a więc $F$ jest filtrem.

**1b:** Niech $a \approx a'$ oraz $b \approx b'$. Chcemy pokazać, że $-a \approx -a'$ oraz $a \circ b \approx a' \circ a'$ dla każdego działania $\circ \in \{\sqcap, \sqcup, \Rightarrow\}$. W tym celu potrzebne są nam takie nierówności, prawdziwe w każdej algebrze Heytinga, a oczywiste w algebrze Lindenbauma:

- $a \Rightarrow a' \leq -a' \Rightarrow -a$;
- $(a \Rightarrow a') \sqcap (b \Rightarrow b') \leq (a \sqcap b \Rightarrow a' \sqcap b')$;
- $(a \Rightarrow a') \sqcap (b \Rightarrow b') \leq (a \sqcup b \Rightarrow a' \sqcup b')$;
- $(a' \Rightarrow a) \sqcap (b \Rightarrow b')) \leq (a \Rightarrow b) \Rightarrow (a' \Rightarrow b')$.

Jeśli lewe strony tych nierówności należą do filtru, to prawe strony też i to już cały dowód.

**1c:** Aby pokazać, że $\mathcal{H}/_{\approx}$ jest algebrą Boole'a, trzeba sprawdzić, że $a \sqcup -a \approx 1$, dla dowolnego $a$, inaczej mówiąc, że $a \sqcup -a \in F$. Przypuśćmy więc, że $x \sqcap (a \sqcup -a) = 0$. Wtedy $x \sqcap a = x \sqcap -a = 0$ czyli $x \leq -a$ oraz $x \leq - - a$. Stąd $x \leq (-a \sqcap - - a) = 0$.

**Zadanie 2:** Jeśli $\mathcal{H}$ jest algebrą Lindenbauma i $\alpha$ jest klasyczną tautologią, to $\alpha$ jest spełniona przez trywialne wartościowanie w $\mathcal{H}/_{\approx}$ zadane wzorem $v(p) = [[p]_{\sim}]_{\approx}$. To wartościowanie ma tę własność, że $[\![\alpha]\!]_v = [[\alpha]_{\sim}]_{\approx}$, gdzie $[\alpha]_{\sim}$ oznacza element algebry Lindenbauma wyznaczony przez formułę $\alpha$ (klasę abstrakcji ze względu na intuicjonistyczną równoważność formuł. A więc mamy $[\alpha]_{\sim} \approx 1$ czyli $[\alpha]_{\sim} \in F$. Jeszcze inaczej, $\vdash \neg\alpha \to \bot$ czyli $\vdash \neg\neg\alpha$.

**Zadanie 3a:** Twierdzenie. Równoważność to koniunkcja dwóch implikacji, więc $\lambda$-term reprezentujący dowód tej formuły jest parą $\langle \lambda x^{\neg q \to q} \lambda y^{\neg q}.\, y(xy), \lambda x^{\neg\neg q} \lambda y^{\neg q}.\, \varepsilon_q(xy) \rangle$.

**3b:** Twierdzenie. Inhabitantem jest term $\lambda x^{(\neg\neg q \to q) \to \neg q} \lambda y^q.\, x(\lambda z^{\neg\neg q}.\, y)$.

**3c:** Nie twierdzenie. Jako kontrprzykład można podać model Kripkego o 4 stanach uporządkowanych tak, że $c_0 \leq c_1 \leq c_2$ oraz $c_0 \leq c_3$, ale $c_3$ jest nieporównywalne z $c_1$ i z $c_2$. W tym modelu $p$ jest wymuszone tylko w stanie $c_2$. Wtedy $c_3 \Vdash \neg p$, i mamy $c_0 \nVdash \neg p \vee \neg\neg p$. Ponieważ $c_1 \Vdash \neg\neg p$, więc $\neg\neg p \to p$ jest wymuszone tylko w $c_2$ i $c_3$. Zatem $c_0 \Vdash (\neg\neg p \to p) \to p \vee \neg p$.

**3d:** Nie twierdzenie. Rozpatrzmy dziedzinę $D = \{1, 2\}$ i algebrę otwartych podzbiorów $\mathbb{R}^2$. Zinterpretujmy $B(1)$ jako I ćwiartkę płaszczyzny, $B(2)$ jako III ćwiartkę, a $P(1)$ i $P(2)$ jako sumę II i IV ćwiartki. Wtedy lewa strona to cała płaszczyzna, a po prawej stronie brakuje punktu $\langle 0, 0 \rangle$.

**3e:** Twierdzenie. Podstawiając $p := \neg q$ i korzystając z części (3a–3b) widzimy, że z lewej strony implikacji wynika $q \vee \neg q$. A zatem dowód naszej formuły można zapisać z pomocą termu:

$$\begin{array}{lll} \lambda x^{\forall p(q \vee \alpha)}.\, \mathsf{case}\ x(\neg q) & \mathsf{of}\ [u^q] inleft(u) & \\ & \mathsf{or}\ [w^{\alpha'}] inright(\Lambda p.\, \mathsf{case}\ xp & \mathsf{of}\ [s^q] \varepsilon_\alpha(w(\lambda z^{\neg q \to q}\, s)s) \\ & & \mathsf{or}\ [r^\alpha] r) \end{array}$$

gdzie użyto skrótów $\alpha = ((p \to q) \to q) \to p$ i $\alpha' = \alpha[p := \neg q] = ((\neg q \to q) \to q) \to \neg q$.