

1. zadania, rozdział pierwszy

zadanie 1.21. Niech $X, \mathcal{T}$ będzie przestrzenią topologiczną. Pokazać, że dla $A, B \subseteq X$ zachodzi

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Dowód. Rozwiązanie polega na kilkakrotnym zastosowaniu ważnej zasady, która mówi że operacja domknięcia jest zgodna z zawieraniem, czyli:

$$M \subseteq N \rightarrow \overline{M} \subseteq \overline{N}.$$

Mamy $A \subseteq A \cup B$, zatem

$$(1) \quad \overline{A} \subseteq \overline{A \cup B}.$$

Analogicznie

$$(2) \quad \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}.$$

Z zawierań (1) i (2) wynika, że

$$(3) \quad \overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$$

Pozostaje udowodnić, że $\overline{A} \cup \overline{B} \supseteq \overline{A \cup B}$. Jest oczywiste, że $\overline{A} \cup \overline{B} \supseteq A \cup B$. Teraz możemy zastosować operację domknięcia po obydwu stronach i otrzymujemy zawieranie

$$\overline{\overline{A} \cup \overline{B}} \supseteq \overline{A \cup B}.$$

Ale domknięcie zbioru domkniętego jest tym samym zbiorem, zatem $\overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = \overline{A} \cup \overline{B}$, mamy więc również zawieranie

$$(4) \quad \overline{A} \cup \overline{B} \supseteq \overline{A \cup B}$$

Zawierania (3) i (4) natychmiast implikują dowodzoną równość.

komentarz 1.1. Związek zawierania topologii z zawieraniem kul dla przestrzeni metrycznych.

Przypuśćmy, że na zbiorze X mamy zadane dwie metryki d_1 i d_2 . Te metryki zadają dwie topologie, $\mathcal{T}_1$ i $\mathcal{T}_2$. Jeżeli

$$(1) \quad \forall x \in X \forall r > 0 \quad B_{d_1}(x, r) \subseteq B_{d_2}(x, r),$$

to

$$(2) \quad \mathcal{T}_1 \supseteq \mathcal{T}_2.$$

Jak widać, zawierania dla kul są skierowane w odwrotną stronę niż zawierania dla topologii.

Oczywiście warunek (1) jest dostateczny ale nie jest konieczny do tego, żeby zachodziło zawieranie topologii (2). Warunek konieczny i dostateczny wygląda w następujący sposób:

$$(1') \quad \forall x \in X \forall r_2 > 0 \exists r_1 > 0 \quad B_{d_1}(x, r_1) \subseteq B_{d_2}(x, r_2).$$

Wówczas, tak jak w (2) mamy

$$\mathcal{T}_1 \supseteq \mathcal{T}_2.$$

Bardziej potocznym językiem: jeżeli chcemy stwierdzić, że topologia $\mathcal{T}_2$ jest zawarta w topologii $\mathcal{T}_1$, to musimy sprawdzić, że w każdej kuli według metryki d_2 da się upchnąć kulę o tym samym środku ale być może mniejszym promieniu według metryki d_1 .

przykład 1.2.

Na zbiorze $C[0, 1]$ funkcji ciągłych na odcinku domkniętym rozpatrujemy dwie metryki d_{sup} (metryka zbieżności jednostajnej, opisana w skrypcie w zadaniu 1.6) i d_i , gdzie $d_i(f, g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)| dt$. Czy zachodzi zawieranie topologii w którąś stronę?

Jest oczywiste, że dla każdych dwóch funkcji f, g zachodzi nierówność

$$d_i(f, g) \leq d_{sup}(f, g).$$

w takim razie zachodzą też zawierania kul w **przeciwną** stronę (to łatwo zapamiętać: jeżeli mierzymy odległość np. w calach, to wyjdzie nam mniej niż gdy mierzymy odległość w centymetrach, więc metryka calowa daje odległości **mniejsze** niż metryka centymetrowa. natomiast kula o promieniu 10 cali jest oczywiście **większa** od kuli o promieniu 10 centymetrów):

$$B_i(f, r) \supseteq B_{sup}(f, r).$$

Wobec tego zachodzi zawieranie topologii w stronę przeciwną niż zawieranie kul, a w tę samą co nierówność dla metryk:

$$\mathcal{T}_{sup} \supseteq \mathcal{T}_i.$$

A co z zawieraniem topologii w odwrotną stronę? Inaczej: czy w każdej kuli według metryki supremum można upchnąć kulę o tym samym środku i być może mniejszym promieniu według metryki całkowitej?

Odpowiedź jest negatywna. Rozpatrzmy na przykład $B_{sup}(0, 1)$, czyli kulę według metryki supremum, której środkiem jest funkcja stała zerowa. Czy w takiej kuli da się upchnąć kulę według metryki całkowitej, której środkiem byłaby znów funkcja zerowa? Oczywiście nie, bo całka z funkcji ciągłej o nieujemnych wartościach może być bardzo mała, a funkcja może na jakimś niewielkim odcinku przyjmować bardzo duże wartości. Na przykład

$$d_i(0, x^n) = \frac{1}{n+1},$$

podczas gdy

$$d_{sup}(0, x^n) = 1.$$

Jak widać z powyższego, funkcja x^n nie mieści się w $B_{sup}(0, 1)$, chociaż należy do $B_i(0, \frac{1}{n})$. Inaczej mówiąc: żaden, nawet bardzo mały promień $r = \frac{1}{n}$ nie jest tak mały, żeby zachodziło zawieranie

$$B_i(0, \frac{1}{n}) \subseteq B_{sup}(0, 1).$$

Zatem ostatecznie

$$\mathcal{T}_{sup} \supsetneq \mathcal{T}_i.$$

zadanie 1.22. Niech $Y \subseteq X$ będzie podzbiorem w przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T})$. Dla $A \subseteq Y$ domknięcie zbioru A w podprzestrzeni $(Y, \mathcal{T}_Y)$ oznaczamy $\overline{A}^Y$ a domknięcie w przestrzeni $(X, \mathcal{T})$ oznaczamy $\overline{A}^X$.

Udowodnić, że:

$$(A) \quad \overline{A}^Y = \overline{A}^X \cap Y$$

$$(B). \quad \overline{A}^Y = Y \Rightarrow \overline{A}^X = \overline{Y}^X$$

Dowód równości (A). Zgodnie z definicją topologii podprzestrzeni istnieje taki zbiór domknięty B w przestrzeni X , że $\overline{A}^Y = B \cap Y$. Oczywiście wynika stąd, że $A \subseteq B$. Zatem B jest domkniętym w X nadzbiorem zbioru A . W takim razie $\overline{A}^X \subseteq B$. Skoro $\overline{A}^X \subseteq B$, to

$$A \subseteq \overline{A}^X \cap Y \subseteq B \cap Y = \overline{A}^Y$$

i (po pominięciu w powyższym wyrazu $B \cap Y$)

$$A \subseteq \overline{A}^X \cap Y \subseteq \overline{A}^Y.$$

Ale wiemy dobrze, że zbiór $\overline{A}^X \cap Y$ jest domknięty w Y . Stąd już natychmiast wynika, że $\overline{A}^X \cap Y = \overline{A}^Y$, bo pomiędzy zbiorem a jego domknięciem nie ma pośrednich zbiorów domkniętych.

Dowód implikacji (B). Zawieranie w jedną stronę jest całkiem oczywiste:

$$(B) \quad \overline{A}^X \subseteq \overline{Y}^X$$

ponieważ $A \subseteq Y$ (tak jest w treści zadania), a domknięcie jest zgodne z inkluzją. Pozostaje udowodnić, że także

$$(1) \quad \overline{A}^X \supseteq \overline{Y}^X$$

Tym razem konieczne jest skorzystanie z poprzednika implikacji i z punktu (A). Mamy $\overline{A}^Y = Y$ (poprzednik implikacji) i $\overline{A}^Y = \overline{A}^X \cap Y$ (stwierdzenie zawarte w punkcie (A)). Zatem

$$Y = \overline{A}^X \cap Y,$$

z czego wynika że

$$\overline{A}^X \supseteq Y.$$

Wystarczy teraz zastosować operację domknięcia w przestrzeni X do obu stron i skorzystać ze zgodności domknięcia z inkluzją (i z tego że domknięcie zbioru domkniętego jest tymże zbiorem).

zadanie 1.22. Niech $(X \times Y, \mathcal{T})$ będzie iloczynem kartezjańskim przestrzeni topologicznych $(X, \mathcal{T}_X)$ i $(Y, \mathcal{T}_Y)$. Niech $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$.

(A) Wykazać, że $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$.

(B) Wykazać, że $(A \times B)^d = (A^d \times \overline{B}) \cup (\overline{A} \times B^d)$, gdzie operacja d została zdefiniowana w Zadaniu 1.24.

Dowód równości (B). Na użytek tego dowodu wprowadzimy symbol A^i na oznaczenie zbioru punktów izolowanych w zbiorze A . Rozumiemy przez to, że $a \in A^i \Leftrightarrow (a \in A \wedge \exists_{a \in U \in \mathcal{T}} A \cap U = \{a\})$. Oczywiście to nie znaczy, że punkty ze zbioru A^i mają być punktami izolowanymi w całej przestrzeni X . Jest jasne z definicji pochodnej zbioru, że zachodzi zawsze równość $Z^d = \overline{Z} \setminus Z^i$. Rozpatrzmy teraz następujący ciąg równości (na początku jest lewa a na końcu prawa strona równości (B)).

$$\begin{aligned} (A \times B)^d &= \overline{A \times B} \setminus (A \times B)^i = \\ &= (\overline{A} \times \overline{B}) \setminus (A^i \times B^i) = \\ &= ((\overline{A} \setminus A^i) \times \overline{B}) \cup (\overline{A} \times (\overline{B} \setminus B^i)) \\ &= (A^d \times \overline{B}) \cup (\overline{A} \times B^d) \end{aligned}$$

W powyższym ciągu równości mamy kilka przejść o różnym stopniu oczywistości.

1. Równość w pierwszej linijce: to jest dopasowana do sytuacji równość $Z^d = \overline{Z} \setminus Z^i$.
2. Przejście od pierwszej linijki do drugiej: to jest po prostu wykorzystanie punktu (A) tego zadania i oczywistego faktu, że $(A \times B)^i = (A^i \times B^i)$.
3. Przejście od drugiej linijki do trzeciej ma charakter mnogościowy: zawsze jest tak, że jeżeli $P \subseteq Q$ i $R \subseteq S$, to $(Q \times S) \setminus (P \times R) = ((Q \setminus P) \times S) \cup ((Q \times (S \setminus R)))$.
4. Przejście od trzeciej linijki do czwartej to tylko dwukrotne wykorzystanie równości $Z^d = \overline{Z} \setminus Z^i$ (zastosowanej raz do zbioru A , a drugi raz do zbioru B).