Notatki te są zamierzone jako uzupełnienie wykładu prowadzonego w semestrzach jesiennych lat 2012 i 2013; są one modyfikacją tych z lat 2003 i 2004, których zapisaniem w TeXu w sporej części zajął się Pan Wojciech Bagiński. Mogą one ułatwić zrozumienie wykładu, lecz z konieczności nie są wyczerpujące. Głębsze omówienie poruszanych zagadnień można znaleźć w podręcznikach wymienionych niżej.

Materiał bądź to nieco trudniejszy i wykraczający poza minimum, zakreślone programem, bądź to mniej w dalszej części wykorzystywany, oznaczono gwiazdką *; tylko niewielką jego część omówimy na wykładzie. (Pominięte będą w całości rozdziały czy paragrafy, których tytuły oznaczone są gwiazdką.) Znak $\square$ oznacza koniec rozumowania czy –gdy rozumowanie jest zbędne– koniec sformułowania. Znak $\boxminus$ ma podobne znaczenie, ale używany jest wtedy, gdy pewne fragmenty rozumowania są pozostawione czytelnikowi.

Zadaniami nazwano wybrane lematy, których dowód jest na tyle prosty, że z pożytkiem może być znaleziony przez czytelnika, podczas gdy podawanie go zaciemniłoby tylko układ materiału. Nie zastępują więc one tych, które rozwiązywane były na ćwiczeniach lub które można znaleźć w znanych zbiorach (np. prof. J. Krzyża). *Zadania** grają tę samą rolę w odniesieniu do materiału uzupełniającego i niekoniecznie są trudniejsze od pozostałych. Oprócz „zadań", są też nieliczne *ćwiczenia* różnej trudności, które już nie są dalej wykorzystywane.

Niektóre podręczniki w języku polskim:

J. Chądzyński, Wstęp do analizy zespolonej.

F. Leja, Teoria funkcji analitycznych.

F. Leja, Funkcje zespolone.

F. Leja, Funkcje analityczne i harmoniczne.[1]

K. Maurin, Analiza (w szczególności rozdział XVI).

W. Rudin, Analiza rzeczywista i zespolona.

S. Saks, A. Zygmund, Funkcje analityczne.[1]

B.W. Szabat, Analiza zespolona.

Z tekstów w języku angielskim wymienię tylko dwa, pochodzące od laureatów Medalu Fieldsa:

L. Ahlfors, Complex Analysis.

T. Tao, Notatki do wykładu, osiągalne pod

`http://www.math.ucla.edu/~tao/resource/general/132.1.00w/`

[1] Plik .pdf osiągalny pod `http://matwbn.icm.edu.pl/ksspis.php?wyd=10`

I PRZENIESIENIE NA $\mathbb{C}$ WSTĘPNYCH POJĘĆ ANALIZY

1 Ciało $\mathbb{C}$ liczb zespolonych (przypomnienie).

Element (x, y) płaszczyzny $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ oznaczamy przez $x + y\mathrm{i}$. Wprowadzamy działania:

$$(x + y\mathrm{i}) \pm (x' + y'\mathrm{i}) \stackrel{def}{=} (x + x') \pm (y + y')\mathrm{i}$$

$$(x + y\mathrm{i})(x' + y'\mathrm{i}) \stackrel{def}{=} (xx' - yy') + (xy' + x'y)\mathrm{i}.$$

Odpowiadają one działaniom na wyrażeniach algebraicznych gdy przyjąć, że $\mathrm{i}^2 = -1$. Zamiast $x + y\mathrm{i}$ możemy pisać x jeśli $y = 0$, zaś $y\mathrm{i}$ jeśli $x = 0$. Przy tych umowach dotyczących zapisu i działań, zbiór $\mathbb{R}^2$ oznaczamy przez $\mathbb{C}$, a jego elementy nazywamy **liczbami zespolonymi**. (Możemy je też nazywać wektorami lub punktami, zależnie od tego, czy $\mathbb{R}^2$ interpretujemy jako przestrzeń wektorową, czy jako afiniczną.)

Dla $z = x + y\mathrm{i}$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$, przyjmujemy

$$\overline{z} := x - y\mathrm{i}, \quad \mathrm{Re}(z) := x = \frac{1}{2}(z + \overline{z}), \quad \mathrm{Im}(z) := \frac{1}{2\mathrm{i}}(z - \overline{z}).$$

Są to **sprzężenie** liczby z oraz jej **część rzeczywista** i **część urojona**, odpowiednio.(Częścią urojoną „czysto urojonej" liczby i nie jest więc i, lecz 1.) Ponieważ

$$z\overline{z} = |z|^2, \quad \text{gdzie } |z| \stackrel{def}{=} \sqrt{x^2 + y^2} \in [0, \infty) \text{ jest } \textbf{modułem} \text{ liczby } z,$$

więc $\frac{1}{|z|^2}\overline{z}$ jest odwrotnością liczby $z \neq 0$. Stąd już wynika łatwo, że $\mathbb{C}$ jest ciałem.

Dzięki utożsamieniu każdej liczby $x \in \mathbb{R}$ z liczbą $x + 0\mathrm{i}$, możemy $\mathbb{R}$ traktować jako podzbiór (i podciało) ciała $\mathbb{C}$. Przedział $\{x + 0i : x \leq a\} \subset \mathbb{C}$, gdzie $a \in \mathbb{R}$, będziemy jednak oznaczać $(-\infty, a]_{\mathbb{R}}$, a nie $(-\infty, a]$; podobnie wprowadzamy oznaczenia $[a, \infty)_{\mathbb{R}}$, $(-\infty, a)_{\mathbb{R}}$ i $(a, \infty)_{\mathbb{R}}$. Ta drobiazgowość spowodowana jest tym, że dołączymy niebawem do $\mathbb{C}$ punkt ∞, ale nie punkt $-\infty$; ponadto, analogiczne przedziały nie będą wprowadzane gdy $\mathrm{Im}(a) \neq 0$. W $\mathbb{C}$ <u>nie</u> definiujemy bowiem relacji nierówności poza tymi, które dotyczą liczb rzeczywistych (czyli leżących na osi $\mathrm{Im}\, z = 0$) ! Dla $a, b \in \mathbb{C}$ możemy jednak rozważać **odcinek domknięty** $[a, b] = \{tb + (1 - t)a : 0 \leq t \leq 1\}$ i odcinki, otwarte z jednej czy obu stron.

Punkt $z = x + y\mathrm{i}$ płaszczyzny $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ można też zapisać w postaci biegunowej:

$$z = |z|(\cos(\alpha) + \mathrm{i}\sin(\alpha)), \quad \text{gdzie } \alpha \in \mathbb{R}. \tag{0}$$

(Dlaczego?) Gdy zachodzi (0) piszemy $\alpha = \arg(z)$ i liczbę α nazywamy **argumentem** liczby zespolonej z. Argumentów tych jest nieskończenie wiele, i dla $z \neq 0$ każde dwa różnią się o wielokrotność 2π. By dla $z \neq 0$ uzyskać jednoznaczność, możemy obrać dowolny przedział $J \subset \mathbb{R}$, długości 2π i otwarty z jednej strony, a domknięty z drugiej, i oznaczyć przez $\mathrm{Arg}_J(z)$ jedyny argument, należący do J. Często spotykane wybory przedziału J to $[0, 2\pi)$, $(0, 2\pi]$, $[-\pi, \pi)$ lub $(-\pi, \pi]$.

Zapiszmy najważniejsze własności modułu, sprzężenia i argumentu:

1. $|\mathrm{Re}(z)| \leqslant |z|, \quad |\mathrm{Im}(z)| \leqslant |z|, \quad |\overline{z}| = |z|$

2. $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}, \qquad \overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$

3. $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

4. $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$, $\arg(z_1/z_2) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$ gdy $z_2 \neq 0$
   (Oznacza to: gdy $\alpha_i = \arg(z_i)$ dla $i = 1, 2$, to $\alpha_1 + \alpha_2$ jest argumentem liczby $z_1 z_2$, zaś gdy ponadto $z_2 \neq 0$, to $\alpha_1 - \alpha_2$ jest argumentem liczby z_1/z_2.)

5. $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\overline{z_1}z_2)$

6. $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$ i równość ma miejsce $\Leftrightarrow$ $z_1 = 0$ lub $z_2 = tz_1, t \in [0, \infty)_{\mathbb{R}}$

Zadanie 1. Dla $z_1, ..., z_k \in \mathbb{C}$ jest $|\prod_n (1 + z_n) - 1| \leq \prod_n (1 + |z_n|) - 1 \leq \mathrm{e}^{\sum_n |z_n|} - 1$.

Zadanie 2. a) Gdy $|p| \leq 1$ i $|z| \leq 1$, to $|z - p| \leq |1 - \overline{p}z|$, a przy $|z| = 1$ jest równość.

b) Gdy $|p| = P < 1$ i $|q| = Q < 1$, to $\frac{|P-Q|}{1-PQ} \leq \frac{|p-q|}{|1-\overline{p}q|} \leq \frac{P+Q}{1+PQ}$. (Wskazówka: mnożąc p i q przez liczbę P/p sprowadzić zadanie do przypadku, gdy $p = P$ i $q = Q(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$. W oparciu o 5 wyrazić kwadrat środkowego członu nierówności jako funkcję zmiennej φ i dowieść, że ma ona ekstrema tylko dla tych φ, gdzie $\sin\varphi = 0$.)

Zadanie 3. Funkcja $f(z) = \frac{1}{2}(z + z^{-1})$ przekształca w sposób różnowartościowy zbiory $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$ i $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$ na $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$, zaś zbiór $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$ na $(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}) \cup (-1, 1)$. Ponadto, $f(z) = f(z') \Leftrightarrow (z' = z)$ lub $(z' = 1/z)$. (Wskazówka: wyznaczyć obraz $f(\partial X)$ brzegu ∂X rozważanego zbioru X i dowieść, że dla $w \notin f(\partial X)$ równanie $z + z^{-1} = 2w$ ma dwa rozwiązania z_1, z_2; z nich jedno leży w X, bo $z_1 z_2 = 1$.)

Ważne jest badanie podstawowych przekształceń $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Pewne z nich poznamy później. Na razie odnotujmy (dowód jest pozostawiony jako zadanie):

Stwierdzenie 1. *a) Przekształcenie $z \mapsto \overline{z}$ jest symetrią prostopadłą płaszczyzny względem osi rzeczywistej.*

b) Gdy $a, b \in \mathbb{C}$ i $a \neq 0$, to przekształcenie $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ zadane wzorem $f(z) = az + b$ jest podobieństwem. Ściślej biorąc, jest ono:

i) przesunięciem, gdy $a = 1$,

ii) obrotem wokół 0 o kąt $\arg(a)$, gdy $|a| = 1$ i $b = 0$,

iii) jednokładnością o środku w 0 i skali a, gdy $a \in [0, \infty)_{\mathbb{R}}$ i $b = 0$,

iv) złożeniem obrotu wokół punktu $z_0 = b/(1-a)$ o kąt $\arg(a)$ i jednokładności o środku w tym punkcie i skali $|a|$, gdy $a \neq 1$. Tu, z_0 jest jedynym punktem stałym przekształcenia f. $\boxminus$

Przez **macierz przekształcenia liniowego** $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będziemy rozumieli macierz tego przekształcenia w standardowej bazie $(1, 0), (0, 1)$ przestrzeni $\mathbb{R}^2$. (Liniowość jest nad $\mathbb{R}$.)

Uwaga 1. Dla $a = p+q\mathrm{i}$ przekształcenie $z \mapsto az$ wyznacza, po standardowym utożsamieniu $\mathbb{C}$ z $\mathbb{R}^2$, przekształcenie liniowe $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, którego macierz jest równa $\left(\begin{smallmatrix} p & -q \\ q & p \end{smallmatrix}\right)$ (bo w kolumnach wpisujemy obrazy wektorów $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = 1_{\mathbb{C}}$ oraz $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = \mathrm{i}_{\mathbb{C}}$). Oczywiście, każde $\mathbb{C}$–liniowe przekształcenie $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ jest postaci $z \mapsto az$, gdzie $a \in \mathbb{C}$.

Uwaga 2. Wynika stąd, że nie każde $\mathbb{R}$–liniowe przekształcenie $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ jest $\mathbb{C}$-liniowe. Przykład: funkcja $f(z) = \overline{z}$ nie jest $\mathbb{C}$ – liniowa, bo $f(cz) \neq cf(z)$ gdy $c \notin \mathbb{R}$ i $z \neq 0$. (Jaka jest macierz tego przekształcenia?)

Oznaczenia i nazwy. Na płaszczyźnie $\mathbb{C}$ rozważamy „zwykłą” metrykę euklidesową $(z_1, z_2) \mapsto |z_1 - z_2|$ i wyznaczoną przez nią topologię. Otwarty zbiór spójny $U \subset \mathbb{C}$ nazywamy **obszarem**. Przez $D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$ oznaczamy **koło otwarte** o środku z_0 i promieniu r, zaś przez $\overline{D}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}$ – odpowiednie **koło domknięte**. (Dopuszczamy tu $r = \infty$ i $r = 0$.) Niepuste, ograniczone koło otwarte nazywamy **dyskiem**.

Zadanie 4. Każde podobieństwo $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ jest postaci $z \mapsto az + b$ (gdy zachowuje orientację płaszczyzny $\mathbb{C}$) lub $z \mapsto a\overline{z} + b$ (gdy zmienia orientację), gdzie $a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0$.

Ćwiczenie. Dowieść, że gdy $\operatorname{Re} u < 0$ i $\operatorname{Re} v < 0$, to $|u - v| < |u + \overline{v}|$. (Zaleźć dowód analityczny, oparty na równości 5, i geometryczny, oparty na części a) stwierdzenia.)

Ćwiczenie (na bazie zadania z 53 Olimpiady Matematycznej). Na bokach ab i ac trójkąta abc zbudowano po jego zewnętrznej stronie kwadraty $abde$ i $acfg$. Punkty p i q to środki odcinków dg i ef. Dowieść, że odcinki pq i bc są równoległe i wyznaczyć możliwe wartości stosunku ich długości. Uogólnić to na przypadek, gdy $abde$ jest trapezem, z równoległymi bokami ab i ed, a pewne podobieństwo przeprowadza a na a, b na c, d na f i e na g. (Wskazówka: przyjąć wpierw, że $a = 0$ i $b = 1$ i dowieść, że wówczas $f = c\overline{d}$, $g = c\overline{e}$.)

2 Ciągłość i różniczkowalność funkcji zespolonych.

Dla $z, z_1, z_2 \dots \in \mathbb{C}$ piszemy $\lim_{n\to\infty} z_n = z$, gdy $\lim_{n\to\infty} |z_n - z| = 0$ (równoważnie: $\lim_{n\to\infty} \operatorname{Re} z_n = \operatorname{Re} z$ oraz $\lim_{n\to\infty} \operatorname{Im} z_n = \operatorname{Im} z$). Jest to więc ta sama zbieżność ciągu punktów płaszczyzny, którą badamy na Analizie II. Podobnie, dla $U \subset \mathbb{C}$ możemy funkcję $f : U \to \mathbb{C}$ traktować jako funkcję dwóch zmiennych o wartościach w $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$; pozwala to określić, kiedy ta funkcja jest ciągła na całym zbiorze U lub w danym punkcie $z_0 \in U$.

Zadanie 1. Funkcje $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, określone wzorami $(z_1, z_2) \mapsto z_1 + z_2$ i $(z_1, z_2) \mapsto z_1 z_2$, są ciągłe. Podobnie, ciągłe są funkcje $\mathbb{C} \ni z \mapsto \overline{z} \in \mathbb{C}$ i $\mathbb{C} \setminus \{0\} \ni z \mapsto 1/z \in \mathbb{C}$.

Definicja. a) Gdy $t_0 \in (a, b) \subset \mathbb{R}$, to dla funkcji $f : (a, b) \to \mathbb{C}$ przyjmujemy

$$f'(t_0) \stackrel{def}{=} \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}, \quad \text{gdy ta granica istnieje w przestrzeni } \mathbb{C}.$$

b) Także dla zbioru otwartego $U \subset \mathbb{C}$, funkcji $f : U \to \mathbb{C}$ i $z_0 \in U$:

$$f'(z_0) \stackrel{def}{=} \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}, \quad \text{gdy ta granica istnieje w przestrzeni } \mathbb{C}. \tag{1}$$

Dla funkcji określonych na zbiorach otwartych (w $\mathbb{R}$ lub w $\mathbb{C}$) mają miejsce zwykłe reguły:

1. $(f \pm g)'(z_0) = f'(z_0) \pm g'(z_0)$, gdy $z_0 \in \mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(g)$,
2. $(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$, gdy $z_0 \in \mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(g)$,
3. $\left(\frac{1}{g}\right)'(z_0) = \frac{-g'(z_0)}{g(z_0)^2}$, gdy $z_0 \in \mathrm{dom}(g)$ i $g(z_0) \neq 0$,
4. $(f \circ g)'(z_0) = f'(g(z_0))g'(z_0)$, gdy $z_0 \in \mathrm{dom}(g)$ i $\mathrm{im}(g) \subset \mathrm{dom}(f)$.

Oznaczają one: gdy wyrażenia po prawej są zdefiniowane, to wyrażenia po lewej – też, i są im równe. Z 1 i 2 wynika łatwo wzór na pochodną wielomianu: $(\sum_{k=0}^n c_k z^k)' = \sum_{k=1}^n k c_k z^{k-1}$.

• Przypomnienie z AM II. Gdy f traktować jako funkcję dwóch zmiennych rzeczywistych, to jest ona różniczkowalna (w sensie omawianym na Analizie II) w punkcie $z_0 \in U$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje przekształcenie liniowe $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ spełniające warunek:

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + L(h) + \mathrm{reszta}(h), \text{ gdzie } \lim_{h \to 0} \mathrm{reszta}(h)/|h| = 0. \tag{*}$$

Przekształcenie L, jeśli istnieje, to jest jedyne. Nazywamy je **pochodną rzeczywistą** funkcji f, w punkcie z_0, i oznaczamy przez $\mathrm{d}f(z_0)$. Jego macierz (zwana **macierzą Jacobiego**, oznaczmy ją $[L]$) jest taka:

$$[L] = \begin{pmatrix} u_x(z_0) & u_y(z_0) \\ v_x(z_0) & v_y(z_0) \end{pmatrix}, \quad \text{gdzie } f(z) = (u(z), v(z)) \in \mathbb{R}^2 \text{ dla } z \in U. \tag{**}$$

Warunkiem <u>wystarczającym</u> istnienia pochodnej $L = \mathrm{d}f(z_0)$ jest ciągłość funkcji u, v i pochodnych cząstkowych u_x, u_y, v_x, v_y w pewnym otoczeniu punktu z_0, zaś warunkiem <u>koniecznym</u> – ciągłość u i v w punkcie z_0 i istnienie wymienionych pochodnych cząstkowych w z_0.

Twierdzenie 1. *Dla $p, q \in \mathbb{R}$ i przekształcenia $f : U \to \mathbb{C}$, gdzie $U \subset \mathbb{C}$ jest zbiorem otwartym, równoważne są warunki:*
a) istnieje pochodna $f'(z_0)$ w punkcie z_0, zdefiniowana w (1), przy czym $f'(z_0) = p + q\mathrm{i}$;
b) istnieje pochodna rzeczywista funkcji f w punkcie z_0 i jej macierz jest równa $\left(\begin{smallmatrix} p & -q \\ q & p \end{smallmatrix}\right)$.

Dowód. *b)* $\implies$ *a)*. Niech przekształcenie liniowe L spełnia warunek (*) i niech $[L] = \left(\begin{smallmatrix} p & -q \\ q & p \end{smallmatrix}\right)$. Na mocy uwagi 1 w §1 zachodzi $L(h) = (p + q\mathrm{i}) \cdot h$ dla $h \in \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, wobec czego (*) oznacza, że $\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} = p + q\mathrm{i}$.

a) $\implies$ *b)*. Odwrotnie, gdy $f'(z_0) = p + q\mathrm{i}$, to przekształcenie $L(h) \stackrel{def}{=} (p + q\mathrm{i}) \cdot h$ spełnia na podstawie (1) warunek (*). Istnieje więc pochodna rzeczywista $\mathrm{d}f(z_0)$ i jej macierz jest na mocy uwagi 1 w §1 równa $\left(\begin{smallmatrix} p & -q \\ q & p \end{smallmatrix}\right)$. □

Uwaga 1. Niech $u := \mathrm{Re}\, f$ i $v := \mathrm{Im}\, f$. Na postawie (**), warunek b) można zapisać tak:
b') istnieje pochodna rzeczywista $\mathrm{d}f(z_0)$ i spełnione są **równania Cauchy – Riemanna**:

$$u_x(z_0) = v_y(z_0) \ \text{ i } \ v_x(z_0) = -u_y(z_0) \tag{2}$$

Przy tym twierdzenie orzeka, że gdy warunek b') jest spełniony, to $f'(z_0) = p + q\mathrm{i}$, gdzie $p = u_x(z_0) = v_y(z_0)$ i $q = v_x(z_0) = -u_y(z_0)$.

Uwaga 2. Geometrycznie, warunek b) oznacza, że pochodna rzeczywista $\mathrm{d}f(z_0)$ istnieje i jest podobieństwem zachowującym orientację lub przekształceniem zerowym. (Patrz w §1 uwaga 1 i zadanie 4.) ⊟

Zadanie 2. Gdy istnieje pochodna $f'(z_0)$, to funkcja $g(z){:=}\overline{f(\overline{z})}$ ma w punkcie $\overline{z_0}$ pochodną, równą $\overline{f'(z_0)}$.

Zadanie 3. Niech $U \subset \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ będzie obszarem. Z wykladu Topologii wiadomo, że każde dwa punkty z U można w U połączyć łamaną o krawędziach równoległych do osi $0x$ lub $0y$. Opierając się na tym udowodnić, że gdy funkcja $f : U \to \mathbb{R}$ spełnia warunki $f_x = 0$ i $f_y = 0$, to $f = const$. Podobnie, jeśli $f : U \to \mathbb{C}$ spełnia warunek $f' = 0$, to $f = const$.

Zadanie 4. * Dany jest wielomian zespolony $f(z) = c\prod_{i=1}^{n}(z - z_i)$. Udowodnić, że gdy $f(w) \neq 0$, to $f'(w)/f(w) = \sum_i 1/(w - z_i)$, wobec czego jeśli ponadto $f'(w) = 0$, to $\sum_i (w - z_i)/|w - z_i|^2 = 0$. Wywnioskować, że każde zero w wielomianu f' jest postaci $w = \sum_i t_i z_i$ dla pewnych $t_1, ..., t_n \geq 0$ takich, że $\sum_i t_i = 1$, tzn. w należy do powłoki wypukłej zbioru zer wielomianu f. (Jest to **twierdzenie Gaussa-Lucasa**; z geometrycznego twierdzenia Radona wynika ponadto, że można przyjąć $n \leq 3$.)

3 Ciągi i szeregi funkcji zespolonych.

Niech U będzie zbiorem otwartym w $\mathbb{C}$ i niech funkcja f, określona w U (i być może poza U), ma wartości zespolone. Dla $K \subset U$ określmy jej K–normę wzorem

$$\|f\|_K = \sup\{|f(z)| : z \in K\} \in [0, \infty].$$

O ciągu $f_1, f_2, ...$ takich funkcji powiemy, że jest **w U zbieżny niemal jednostajnie do f**, jeśli każdy punkt $z_0 \in U$ ma otoczenie $D \subset U$ takie, że $||f_n - f||_D \to 0$ gdy $n \to \infty$.

Uwaga 1. Gdy wyżej wszystkie funkcje $f_{n|U}$ są ciągłe, to i funkcja $f_{|U}$ jest ciągła. Istotnie, jest tak dla ciągów jednostajnie zbieżnych, wobec czego każdy punkt $z_0 \in U$ ma otoczenie, na którym funkcja $f_{|U}$ jest ciągła. □

Powiemy też, że **szereg** $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ jest w U **niemal jednostajnie zbieżny** (odpowiednio: jednostajnie zbieżny), jeśli własność tę ma ciąg $(\sum_{k=1}^{n} f_{k|U})_{n=1}^{\infty}$ jego sum częściowych. Zaś szereg $\sum_n f_n$ nazwiemy **niemal normowo zbieżnym w** U, jeśli każdy punkt $z \in U$ ma otoczenie D takie, że $\sum_n ||f_n||_D < \infty$. (Słowo „niemal" bywa zastępowane przez „**lokalnie**").

Zadanie 1. a) Gdy ciąg (f_n) jest zbieżny w U niemal jednostajnie do f, to dla każdego zbioru zwartego $K \subset U$, zbieżność na K jest jednostajna, tzn. $\|f_n - f\|_K \to 0$. Podobnie, gdy szereg $\sum_n f_n$ jest zbieżny niemal normowo w U, to $\sum_n \|f_n\|_K < \infty$ dla każdego zbioru zwartego $K \subset U$.

b) Gdy ciągi (f_n) i (g_n) funkcji ciągłych są zbieżne w U niemal jednostajnie do f i g, odpowiednio, to ciąg $(f_n + g_n)$ jest niemal jednostajnie zbieżny do $f + g$, a ciąg $(f_n \cdot g_n)$ – do $f \cdot g$; ciąg zaś złożeń $f_n \circ h$ z funkcją ciągłą $h : U' \to U$ zbiega niemal jednostajnie do $f \circ h$. Podobnie, gdy szereg $\sum_n f_n$ jest zbieżny niemal normowo, to szereg $\sum_n f_n \circ h$ – też.

Uwaga 2. a) Ma miejsce **kryterium porównawcze Weierstrassa**: szereg funkcyjny $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$, **majoryzowany** w U przez liczbowy szereg zbieżny $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ (tzn. taki, że dla $z \in U$ i $n \geq 0$ spełnione są nierówności $|f_n(z)| \leq c_n$, gdzie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n < \infty$), jest w U zbieżny jednostajnie. Jeśli więc ponadto funkcje f_n są w U ciągłe, to funkcja $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ – też.

b) Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ liczb zespolonych, dla którego $\sum_n |b_n| < \infty$, jest zbieżny, a jego suma nie zależy od porządku sumowania – czego dowodzi się jak na Analizie I. Ponadto, gdy $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest innym takim szeregiem, $\sum_n |b_n| < \infty$, to suma szeregu $\sum_{k,l=1}^{\infty} a_k b_l$ nie zależy od porządku sumowania i jest równa iloczynowi sum $(\sum_n a_k) \cdot (\sum_n b_k)$.

c) Stąd gdy szereg $\sum_n f_n$ jest niemal normowo zbieżny w U, to wraz z szeregiem $\sum_n |f_n|$ jest w U zbieżny niemal jednostajnie, a suma $\sum_n f_{n|U}$ nie zależy od porządku sumowania. Dlatego założenie niemal normowej zbieżności jest poręczne i będzie w badaniu szeregów wykorzystywane nawet wtedy, gdy wystarczające byłyby założenia słabsze.

4 Zespolone szeregi potęgowe.

Przez **szereg potęgowy** zmiennej z, **o środku** w z_0 (lub: **wokół** z_0), rozumiemy szereg funkcyjny $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$, gdzie $z_0, c_0, c_1, \ldots \in \mathbb{C}$.

Uwaga 1. Niekiedy jednak w wyrażeniu $\sum_n c_n (z - z_0)^n$ traktujemy z jako ustaloną liczbę zespoloną, a nie jako zmienną. Nie prowadzi to do nieporozumień, bo odróżnienie tych przypadków jest łatwe.

Twierdzenie 1 (Abel–Cauchy–Hadamard). *Liczba*

$$R = 1/\overline{\lim} \sqrt[n]{|c_n|} \in [0, \infty]$$

ma następujące własności: szereg $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ jest zbieżny normowo na każdym dysku $D(z_0, r)$ dla $r < R$ (bo $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| r^n < \infty$), zaś jest rozbieżny w każdym punkcie spoza $\overline{D}(z_0, R)$ (bo wyrazy szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (w - z_0)^n$ nie dążą do 0 gdy $|w - z_0| > R$). ⊟

Liczbę R nazywamy **promieniem zbieżności** szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$. Gdy $R < \infty$, twierdzenie nie mówi niczego o zbieżności tego szeregu w punktach okręgu $|z - z_0| = R$.

Uwaga 2. Z twierdzenia wynika, że

a) Na dysku $|w - z_0| < R$, szereg $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ zbiega niemal normowo, oraz

b) Jeśli szereg $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ jest zbieżny w punkcie $z = w$, to $|w - z_0| \leq R$.

Twierdzenie 2 (Abela o różniczkowaniu szeregów potęgowych). *a) Szereg $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ ma ten sam promień zbieżności R, co szereg $\sum_{n=1}^{\infty} nc_n(z - z_0)^{n-1}$.*

b) Na dysku $D = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$ pierwszy szereg jest zbieżny do funkcji f, której pochodna jest sumą drugiego szeregu.

Dowód. Część a) łatwo wynika stąd, że $\lim \sqrt[n]{n} = 1$.

Ad b). Można założyć, że $z_0 = 0$. Dla danego punktu $p \in D$ dowiedziemy istnienia pochodnej $f'(p)$ i równości $f'(p) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n p^{n-1}$. W tym celu ustalmy $r \in (|p|, R)$ i zauważmy, że

$$\frac{f(z) - f(p)}{z - p} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{z^n - p^n}{z - p} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(z^{n-1} + z^{n-2}p + \cdots + p^{n-1}) \text{ dla } z \in D(0, r) \setminus \{p\}.$$

Ponieważ $|z| < r$ i $|p| < r$, to ostatni szereg jest majoryzowany przez szereg $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| nr^{n-1}$, zbieżny wobec a) i nierówności $r < R$. Jego suma jest więc na otoczeniu $D(0, r)$ punktu p ciągłą funkcją zmiennej $z \in D(0, r)$, na podstawie uwagi 2 w §3. Stąd istnieje granica $\lim_{z \to p} (f(z) - f(p))/(z - p)$ i jest równa wymienionej sumie dla $z = p$, a tą jest $\sum_{n=1}^{\infty} c_n np^{n-1}$.

Wniosek 1. *Jeśli $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ dla wszystkich z w pewnym otoczeniu punktu z_0, to prawdziwe są* **wzory Taylora***:*

$$c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) \quad \textit{dla } n = 0, 1, \ldots \tag{3}$$

Dla dowodu stosujemy n-krotnie twierdzenie 2. Z twierdzenia tego i uwagi 2 wynika też

Wniosek 2. *Suma szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$, zbieżnego w dysku $D = D(z_0, r)$, ma w D pochodną i funkcję pierwotną, będące sumami szeregów $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)c_{n+1}(z - z_0)^n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{n-1}}{n}(z - z_0)^n$, odpowiednio. Wszystkie te szeregi są niemal normowo zbieżne w D.* ⊟

Przykład. Szereg $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ jest w dysku $D = D(0, 1)$ zbieżny do funkcji $1/(1 - z)$. Szereg $\sum_{n=0}^{\infty} (n + 1)z^n$ jest więc w D niemal normowo zbieżny do funkcji $-(1 - z)^{-2}$, a szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n)z^n$ – do funkcji g takiej, że $g'(z) = 1/(1 - z)$ dla $z \in D$. □

Dla danej funkcji f, mającej wszystkie pochodne w z_0, szereg $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ wyznaczony wzorami (3) nazywamy jej **szeregiem Taylora wokół** z_0. Szereg Taylora wokół $z_0 = 0$ nazywamy **szeregiem Maclaurina**.

Zadanie 1. * (Twierdzenie Abela o ciągłości.) Gdy szereg $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ jest zbieżny, to funkcja $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ jest dla każdej liczby $d > 0$ ciągła w punkcie 1 na zbiorze $K_d := \{z : |z| + d|1 - z| \leq 1\}$. Wywnioskować, że f jest ciągła na każdym trójkącie prostokątnym o przeciwprostokątnej $[0, 1]$. (Wskazówka: przyjąć $f_k(z) := \sum_{n=0}^{k} c_n z^n$, $s_k := f_k(1)$, $s = f(1)$ i gdy $|z| < 1$ dowieść kolejno, że $f(z) = (1-z) \sum_{n=0}^{\infty} s_n z^n$ i $f(z) - s = (1-z) \sum_{n=0}^{\infty} (s_n - s)z^n$. Dla odpowiednio dużego N oszacować $|\sum_{n=N}^{\infty} (s_n - s)z^n|$ przez $\varepsilon/(1 - |z|)$.)

5 Funkcje holomorficzne i funkcje analityczne (definicje).

Definicja. Funkcję f, określoną na zbiorze $\mathrm{dom}(f) \subset \mathbb{C}$ i o wartościach w $\mathbb{C}$, nazywamy:

a) **holomorficzną**, jeśli jej dziedzina $\mathrm{dom}(f)$ jest zbiorem otwartym i pochodna $f'(p)$ istnieje w każdym punkcie $p \in \mathrm{dom}(f)$.

b) **analityczną**, jeśli dla każdego $p \in \mathrm{dom}(f)$ istnieje taki szereg potęgowy $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ i otoczenie $G \subset \mathrm{dom}(f)$ punktu p w $\mathbb{C}$, że $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ dla $z \in G$.

Powiemy, że funkcja f jest **holomorficzna** (odp. **analityczna**) **w zbiorze** U, jeśli istnieje taka funkcja holomorficzna (odp. analityczna) $\widetilde{f}$, że $U \subset \mathrm{dom}(\widetilde{f})$ i $\widetilde{f}_{|U} = f$.

Zbiór wszystkich funkcji z U do $\mathbb{C}$, holomorficznych w U, oznaczamy przez $H(U)$.

Uwaga 1. i) Okaże się, że w (b) można wziąć $z_0 = p$, na razie jednak nie jest to istotne.

ii)* Jeśli zastąpić $\mathbb{C}$ przez $\mathbb{R}$ i w (b) żądać, by $c_n \in \mathbb{R}$ dla $n = 0, 1 \ldots$, to otrzymamy definicję **funkcji $\mathbb{R}$-analitycznej**.

Uwaga 2. Z reguł podanych w §2 wynika, że gdy $f, g \in H(U)$, to $f \pm g \in H(U)$ i $f \cdot g \in H(U)$, jak również, że $f/g \in H(U)$ jeśli $0 \notin g(U)$. Podobnie złożenie funkcji holomorficznych, jeśli jest określone, to jest funkcją holomorficzną.

Wniosek 1. *a) Funkcja analityczna jest zarazem funkcją holomorficzną.*
b) Pochodna funkcji analitycznej jest funkcją analityczną.

Dowód. Obie części wynikają natychmiast z wniosku 2 w §4. □

Wniosek 2 (i definicja). *Gdy funkcja f jest analityczna w zbiorze otwartym $U \subset \mathbb{C}$, to $u := \mathrm{Re}\, f$ jest* **funkcją harmoniczną** *w U, tzn. $u_{|U}$ jest klasy C^2 i spełnia* **równanie Laplace'a** *$u_{xx}(z) + u_{yy}(z) = 0$ dla $z \in U$. Tak jest samo dla części urojonej $v := \mathrm{Im}\, f$.*

Dowód. Z wniosku 1 wynika istnienie i ciągłość (w U) drugiej pochodnej f'', a więc też istnienie i ciągłość drugich pochodnych cząstkowych funkcji u i v. (Dlaczego?) Jak wiemy z Analizy II, zapewnia to równości $u_{xy} = u_{yx}$ i $v_{xy} = v_{yx}$, które w połączeniu ze wzorami Cauchy–Riemanna prowadzą do tezy wniosku. ⊟

Ćwiczenie 1. Gdy f jest jak we wniosku 2 i $0 \notin \mathrm{im}(f)$, to funkcja $\ln |f|$ jest harmoniczna.

Uwaga 3. Prawdziwe jest znacznie głębsze „odwrócenie" części a) wniosku 1: funkcja, holomorficzna w zbiorze U, rozwija się na każdym dysku $D(z_0, r) \subset U$ w szereg Taylora o środku w z_0. Oczywiście, z tego ważnego twierdzenia nie będziemy korzystać do chwili udowodnienia go w rozdziale V – poza jednak poniższą uwagą, mającą na celu przedstawienie sposobów znajdywania współczynników szeregu Maclaurina pewnych funkcji analitycznych. (Podobne wyniki o szeregach mogą być znane z AM I.)

Uwaga 4. Niech funkcje f, g, h będą analityczne w otoczeniu zera i rozwijają się w nim w szeregi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, odpowiednio. Opiszemy związek między tymi szeregami w następujących trzech sytuacjach:

a) $h = f \cdot g$
Wtedy $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ dla $k = 0, 1, 2, ...$, tzn. $\sum_{n=0}^\infty c_n z^n$ jest **iloczynem Cauchy'ego szeregów** $\sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ i $\sum_{n=0}^\infty b_n z^n$. Wynika to z równości $c_n = (fg)^{(n)}(0)/n!$ i formuły Leibniza $(fg)^{(n)}(0) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(0) g^{(n-k)}(0)$.

b) $h = f/g$, przy czym $b_0 \neq 0$ (inaczej $f(0)/g(0)$ nie ma sensu w $\mathbb{C}$).
Wówczas $f = gh$ w otoczeniu zera, co prowadzi do równości $a_0 = b_0 c_0$, $a_1 = b_0 c_1 + b_1 c_0$, $a_2 = b_0 c_2 + b_1 c_1 + b_2 c_0$ itd, pozwalających kolejno wyznaczać $c_0, c_1, c_2, ...$ (Prostszy sposób postępowania przedstawimy w Przykładzie.)

c) $h = f \circ g$, przy czym $g(0) = 0$ (równoważnie: $b_0 = 0$).
(Założenie $g(0) = 0$ zapewnia określoność i holomorficzność funkcji h w otoczeniu zera.) Twierdzimy, że współczynniki $c_0, ..., c_k$ są takie same, jak początkowe (o indeksach $0, 1, ..., k$) współczynniki szeregu Maclaurina funkcji $h_k := a_0 + a_1 g + ... + a_k g^k$ – a te umiemy znaleźć, bo w sposób opisany w a) umiemy to zrobić dla każdej z funkcji $g^2 = g \cdot g, g^3 = g^2 \cdot g, ..., g^k$.

Dla uzasadnienia odnotujmy, że na otoczeniu zera zachodzi równość $f = f_k + z^{k+1} r$, gdzie $f_k = \sum_{i=0}^k a_i z^i$ i $r = \sum_{i=0}^\infty a_{k+i+1} z^i$, a także $g = z g_1$ dla $g_1 = \sum_{i=0}^\infty b_{i+1} z^i$. Zatem na tym otoczeniu, $f \circ g = h_k + z^{k+1} R$, gdzie $R := g_1^{k+1} \cdot (r \circ g)$. Funkcja R jest holomorficzna w otoczeniu zera, na podstawie uwagi 2, więc można ją zgodnie z uwagą 3 rozwinąć w szereg Maclaurina. Stąd i $z^{k+1} R$ rozwija się w szereg Maclaurina, którego współczynniki przy z^n są niezerowe tylko dla $n > k$ – co wraz z równością $h = h_k + z^{k+1} R$ dowodzi tezy.

Uwaga 5. We wszystkich trzech przypadkach, każdy współczynnik c_k zależy tylko od $a_0, ..., a_k$, $b_0, ..., b_k$. (Sprawdzamy to kolejno dla a), b) i c).)

Przykład. Niech funkcja f ma szereg Maclaurina, zaczynający się od $1 - \frac{1}{12} z^2 + 0 z^3$. Obliczymy współczynnik przy z^3 szeregu Maclaurina funkcji $g = (z - c)/f^2$, gdzie $c \in \mathbb{C}$. W tym celu piszmy $F \equiv G$ dla zaznaczenia, że funkcje F i G mają identyczne szeregi Maclaurina do stopnia 3 włącznie. Ponieważ $(1 - \frac{1}{12} z^2)^2 = 1 - \frac{1}{6} z^2 + \frac{1}{144} z^4 \equiv 1 - \frac{1}{6} z^2$, więc $g \equiv (z - c)/(1 - \frac{1}{6} z^2)$; patrz uwaga 5. Możemy dalej rachunek przeprowadzać jak w b), a można i prościej: wobec tożsamości $1/(1 - w) = \sum_{n=0}^\infty w^n$ gdy $|w| < 1$, na otoczeniu zera zachodzi $1/(1 - \frac{1}{6} z^2) = 1 + \frac{1}{6} z^2 + \frac{1}{36} z^4 + ... \equiv 1 + \frac{1}{6} z^2$, skąd $f \equiv (z - c)(1 + \frac{1}{6} z^2) = -c + z - \frac{c}{6} z^2 + \frac{1}{6} z^3$. Szukany współczynnik jest więc równy $1/6$ i nie zależy od c. □

Ćwiczenie 2. Niech $f(z) = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} z + \frac{1}{3!} z^2 + ...$ Funkcję $1/f$ rozwijamy w szereg $\sum_{n=0}^\infty \frac{B_n}{n!} z^n$. Wyznaczyć B_0, B_1 i dla $n \geq 2$ dowieść zależności rekurencyjnej $B_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k$.

6 Szeregi Laurenta.

Funkcję analityczną można w otoczeniu każdego punktu rozwijać w szereg potęgowy. Na różnych otoczeniach uzyskujemy jednak różne szeregi i na ogół trzeba użyć nieskończenie wielu szeregów, by opisać funkcję. Jest tak i w ważnym przypadku funkcji określonej na dysku, z którego usunięto środek. W ślad za P. Laurentem, wygodnie jest wtedy użyć szeregów nieco ogólniejszych od potęgowych.

Definicja. Szeregiem Laurenta o środku w punkcie $p \in \mathbb{C}$ (lub: **wokół** tego punktu) nazywamy szereg funkcyjny

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}\left(\frac{1}{z-p}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-p)^n \tag{4}$$

Pierwszy z szeregów w (3) nazywamy **częścią główną** lub **osobliwą**, a drugi – **częścią regularną** szeregu (3). Szereg (3) nazywamy zbieżnym w danym punkcie, czy też (niemal) jednostajnie wzgl. (niemal) normowo zbieżnym w danym zbiorze, jeśli takie są obie te części.

Zwięźlejszy zapis szeregu (3) to $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-p)^n$ lub $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(z-p)^n$. Przyjmijmy

$$\rho = 1/\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_{-n}|}, \qquad R = 1/\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} \quad \text{oraz} \tag{5}$$

$P_{\max} := D(p,R)$ gdy $c_n = 0\,\forall n < 0$, zaś $P_{\max} := D(p,R) \setminus \overline{D}(p, 1/\rho)$ w przeciwnym razie.

Twierdzenie 1. *a) Część główna (odp. regularna) szeregu (4) jest zbieżna niemal normowo w zbiorze* $\mathbb{C} \setminus \overline{D}(p, \frac{1}{\rho})$ *(odp. w dysku* $D(p,R)$*), a jej suma jest w nim funkcją holomorficzną.*

b) Szereg (4) jest rozbieżny poza $\overline{P_{\max}}$*, zaś niemal normowo zbieżny w* $P_{\max}$*.*

c) Suma f *szeregu (4) jest w* $P_{\max}$ *funkcją holomorficzną, której pochodna jest sumą szeregu* $\sum_{n\in\mathbb{Z}} nc_n(z-p)^{n-1}$*, też niemal normowo zbieżnego w* $P_{\max}$*.*

Zbiór $P_{\max}$ nazywamy **pierścieniem zbieżności** szeregu (4). Gdy $\rho, R \neq \infty$ i $1/\rho < R$, jest on „prawdziwym" pierścieniem; jednak może też być zbiorem pustym (gdy $1/\rho \geq R$), płaszczyzną bez punktu p (gdy $\rho = R = \infty$), dyskiem $D(p,R)$ bez swego środka (gdy $\rho = \infty, R < \infty$), zewnętrzem koła $\overline{D}(p, 1/\rho)$ (gdy $R = \infty$ i $0 < \rho < \infty$) czy też dyskiem $D(p,R)$ lub płaszczyzną $\mathbb{C}$ (gdy $c_n = 0$ dla $n < 0$ i $R > 0$).

Dowód twierdzenia 1. Dla prostoty przyjmijmy, że $p = 0$ (co można). Z własności liczb ρ i R wynika, że szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}z^n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ są niemal normowo zbieżne na dyskach $D(0,\rho)$ i $D(0,R)$, odpowiednio, zaś rozbieżne poza ich domknięciami. (Patrz §4.) Sumy tych szeregów, które oznaczmy przez g i h, są więc funkcjami holomorficznymi w wymienionych dyskach; przy tym $g'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_{-n}z^{n-1}$ i $h'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} nc_n z^{n-1}$ i oba te szeregi też są niemal normowo zbieżne na odpowiadających im dyskach. A że funkcja $z \mapsto 1/z$ przeprowadza zbiór $\mathbb{C} \setminus \overline{D}(0, 1/\rho)$ w $D(0,\rho)$, to wynikają stąd tezy a) i b), jak również niemal normowa zbieżność w $\mathbb{C} \setminus \overline{D}(0, 1/\rho)$ szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} nc_{-n}z^{-n+1}$ (co po podzieleniu przez z^2 daje takąż zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} nc_{-n}z^{-n-1}$).

Ponadto, dla $z \in P$ zachodzi równość $f(z) = g(1/z) + h(z)$ i wobec tego $f'(z) = -\frac{1}{z^2}g'(1/z) + h'(z)$. Gdy za $g'(1/z)$ i $h'(z)$ wpiszemy sumy wymienionych szeregów, to otrzymamy brakującą równość $f'(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} nc_n z^{n-1}$. ⊟

Wniosek 1. *Niech* f *będzie sumą szeregu Laurenta* $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(z-p)^n$*. Wówczas w pierścieniu* $P_{\max}$ *zbieżności tego szeregu, funkcja* $f(z) - \frac{c_{-1}}{z-p}$ *ma funkcję pierwotną.*

Dowód. Szereg $\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{-1\}} \frac{c_n}{n+1}(z-p)^{n+1}$ ma ten sam pierścień zbieżności $P_{\max}$, bo $\lim \sqrt[n]{n} = 1$. Suma tego szeregu jest szukaną funkcją pierwotną. $\boxminus$

Uwaga 1. W §III.3 przekonamy się, że w żadnym pierścieniu o środku w p nie istnieje funkcja pierwotna dla $\frac{1}{z-p}$. Odjęcie $\frac{c_{-1}}{z-p}$ jest więc we wniosku konieczne.

Uwaga 2. Gdy $f(z) = \sum c_n(z-p)^n$ w pierścieniu P o środku w p, to $f(z+p) = \sum_n c_n z^n$ w pierścieniu $P' := \{z - p : z \in P\}$ o środku w 0, i vice versa. Tak więc rozwijanie funkcji w szereg Laurenta można zawsze sprowadzić do przypadku, gdy środkiem pierścienia jest 0. (Funkcja zostanie zastąpiona przez swe „przesunięcie" $z \mapsto f(z+p)$.)

Przykład. Niech $p, q \in \mathbb{C}$, przy czym $p \neq q$. Rozwiniemy funkcję $f(z) = 1/(z-q)^k$ w szereg Laurenta na maksymalnych pierścieniach o środku w p, zawartych w dziedzinie funkcji; są nimi $P_0 := D(p, |q-p|)$ i $P_1 := \mathbb{C} \setminus \overline{D}(p, |q-p|)$. Rozpatrzymy oddzielnie 3 przypadki:

a) Niech wpierw $k = 1$ i $p = 0$. Wtedy, ze wzoru na sumę postępu geometrycznego, $\frac{1}{z-q} = -\frac{1}{q} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{q}} = -\frac{1}{q}\sum_{n=0}^{\infty}(z/q)^n = -\sum_{n\geq 0} q^{-n-1}z^n$ gdy $|z| < |q|$, i podobnie $\frac{1}{z-q} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{q}{z}} = \sum_{n<0} q^{-n-1}z^n$ gdy $|z| > |q|$. Są to szukane rozwinięcia na P_0 i P_1, odpowiednio.

b) Niech $k = 1$, lecz $p \neq 0$. Na podstawie a) i uwagi 2, $\frac{1}{z-q} = -\sum_{n\geq 0}(q-p)^{-n-1}(z-p)^n$ gdy $|z-p| < |q-p|$ (tzn. dla $z \in P_0$) i $\frac{1}{z-q} = \sum_{n<0}(q-p)^{-n-1}(z-p)^n$ dla $z \in P_1$.

c) $k > 1$. Szukane rozwinięcia otrzymujemy, różniczkując poprzednie: $-1/(z-q)^2 = -\sum_{n\geq 0} \frac{n+1}{(q-p)^{n+2}}(z-p)^n$ dla $z \in P_0$ i $-1/(z-q)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)}{(q-p)^n}(z-p)^{n+2}$ dla $z \in P_1$, i t.d.

Uwaga 3. Przykład ten wskazuje, jak daną funkcję wymierną $f = g/h$, gdzie g i h są wielomianami, rozwinąć w szereg Laurenta na pierścieniu otwartym, zawartym w jej dziedzinie. Możemy bowiem f przedstawić w postaci skończonej sumy tzw. ułamków prostych, patrz dalej twierdzenie 3 w §V.5, a każdy z nich rozwinąć jak w przykładzie.

Gdy $\mathrm{NWD}(g, h) = 1$, to maksymalnymi takimi pierścieniami są składowe zbioru, powstałego z $\mathbb{C}$ przez usunięcie okręgów, zatoczonych z p i przechodzących przez zera wielomianu h.

II ELEMENTARNE FUNKCJE ANALITYCZNE

1 Funkcje wymierne i sfera Riemanna.

Niech $\widetilde{\mathbb{C}} \stackrel{def}{=} \{\infty\} \cup \mathbb{C}$, gdzie ∞ to punkt nie należący do płaszczyzny. Można $\widetilde{\mathbb{C}}$ dogodnie zamienić w przestrzeń topologiczną, homeomorficzną ze sferą. Jawny wzór na (pewną) metrykę d, zadającą topologię w $\widetilde{\mathbb{C}}$, można uzyskać następująco. Niech $S = \{(z,t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} : |z|^2 + t^2 = 1\}$ będzie sferą jednostkową w $\mathbb{C} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$, niech $n = (0_\mathbb{C}, 1_\mathbb{R}) \in S$ i niech $F : S \to \widetilde{\mathbb{C}} \times \{0_\mathbb{R}\}$ oznacza **rzut stereograficzny**, tzn. $F(p)$ jest punktem przecięcia prostej np z płaszczyzną $\mathbb{C} \times \{0_\mathbb{R}\}$ gdy $p \in S \setminus \{n\}$, zaś punktem $(\infty, 0_\mathbb{R})$ gdy $p = n$. Przyjmujemy

$$d(z_1, z_2) = \|F^{-1}(z_1, 0_\mathbb{R}) - F^{-1}(z_2, 0_\mathbb{R})\| \quad \text{dla} \quad z_1, z_2 \in \widetilde{\mathbb{C}}, \tag{*}$$

gdzie $\|(z,t)\| = \sqrt{|z|^2 + t^2}$ oznacza normę euklidesową w $\mathbb{R}^3 = \mathbb{C} \times \mathbb{R}$. Przestrzeń $\widetilde{\mathbb{C}}$ nazywana jest **płaszczyzną rozszerzoną** lub **sferą Riemanna**. Z powyższą **metryką sferyczną** d, jest ona izometryczna ze sferą S: izometrią jest rzut F. Jest to więc zwarta przestrzeń metryczna, przy czym ε–dysk w metryce d wokół ∞ jest postaci $\{\infty\} \cup \{z \in \mathbb{C} : |z| > R(\varepsilon)\}$, gdzie $\lim_{\varepsilon \to 0} R(\varepsilon) = \infty$. Ponieważ ponadto $F_{|S \setminus \{n\}}$ jest homeomorfizmem $S \setminus \{n\}$ na $\mathbb{C} \times \{0_\mathbb{R}\}$, więc wynika stąd, że dla $z, z_1, z_2, \dots \in \widetilde{\mathbb{C}}$ zachodzi w metryce d:

$$(z_n \to z) \Leftrightarrow [(z \in \mathbb{C} \quad \text{i} \quad |z_n - z| \to 0) \;\; \text{lub} \;\; (z = \infty \;\; \text{i} \;\; |z_n| \to \infty)]. \tag{**}$$

Nietrudno jest wyliczyć $F^{-1}(z, 0)$ i nadać wzorowi (*) bardziej jawną postać. Jednak w żadnej postaci wzór ten nie będzie wykorzystany, a istotna będzie tylko charakteryzacja zbieżności (**). Oznacza ona, że na $\mathbb{C}$ topologia przestrzeni $\widetilde{\mathbb{C}}$ jest identyczna z wyjściową i $\widetilde{\mathbb{C}}$ jest tzw. **uzwarceniem jednopunktowym** (inaczej: **Aleksandrowa**) płaszczyzny $\mathbb{C}$.

Z (**) wynika, że gdy $a_n, b_n \in \mathbb{C}$ i $a_n \to \infty$, to $\overline{a_n} \to \infty$ oraz $a_n/b_n \to \infty$, $a_n \pm b_n \to \infty$ i $b_n/a_n \to 0$ <u>o ile ciąg b_n jest ograniczony</u>. (Inaczej konkluzja może być fałszywa.) Uzasadnia to stosowanie równości $\overline{\infty} = \infty$ oraz $a \cdot \infty = a \pm \infty = \infty$ dla $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Niech teraz f i $g \neq 0$ będą wielomianami zespolonymi. Funkcja $u(z) = f(z)/g(z)$ jest poprawnie określona dla wielu wartości z – lecz nie dla z ze skończonego zbioru $g^{-1}(0)$ pierwiastków wielomianu g. W punktach tego zbioru, a także w nieskończoności, ma ona jednak granicę (patr poniższe zadanie). Przyjmując dodatkowo $u(z_0) := \lim_{z \to z_0} u(z)$ dla $z_0 \in \{\infty\} \cup g^{-1}(0)$, czynimy funkcję u określoną na całej sferze $\widetilde{\mathbb{C}}$. Oznaczamy ją nadal $u = f/g$ i nazywamy **funkcją wymierną**. Jest to więc ciągła funkcja z $\widetilde{\mathbb{C}}$ w $\widetilde{\mathbb{C}}$, przy czym z własności 1,2,3 w §I.2 wynika, że jest ona holomorficzna w zbiorze otwartym $\mathbb{C} \setminus u^{-1}(\infty)$. Można udowodnić (co nie jest łatwe), że tylko funkcje wymierne mają te własności.

Zadanie 1. Udowodnić, że w $\widetilde{\mathbb{C}}$ istnieje granica $\lim_{z \to \infty} f(z)/g(z)$, równa 0 jeśli $\deg(f) < \deg(g)$, równa ∞ jeśli $\deg(f) > \deg(g)$, zaś równa ilorazowi współczynników kierunkowych obu wielomianów, jeśli $\deg(f) = \deg(g)$. Podobnie, gdy $g(z_0) = 0$ i $f(z_0) \neq 0$, to $\lim_{z \to z_0} f(z)/g(z) = \infty$. Granica $\lim_{z \to z_0} f(z)/g(z)$ istnieje w $\widetilde{\mathbb{C}}$ też jeśli $f(z_0) = g(z_0) = 0$.

2 Homografie i antyhomografie.

Homografie są to funkcje wymierne zadane wzorem

$$h_A(z) = \frac{az+b}{cz+d}\,, \qquad \text{gdzie } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \det(A) \neq 0. \tag{1a}$$

Wzór ten ma sens, gdy z należy do płaszczyzny $\mathbb{C}$ **nakłutej** w punkcie $-\frac{d}{c}$ (tzn. punkt ten usuwamy). Wygodniej jednak jest przestrzeni $\mathbb{C}$ nie nakłuwać, lecz rozszerzyć ją do sfery $\widetilde{\mathbb{C}}$ i traktować h_A jako ciągłe przekształcenie z $\widetilde{\mathbb{C}}$ w $\widetilde{\mathbb{C}}$. Wtedy, jak wyjaśniono w §1,

$$h_A(-d/c) = \infty \;\text{ oraz }\; h_A(\infty) = a/c \tag{1b}$$

Twierdzimy, że dla nieosobliwych 2×2 macierzy zespolonych A, B ma miejsce równość

$$h_{AB} = h_A \circ h_B \tag{2}$$

Istotnie, ponieważ funkcje ciągłe są równe, jeśli są równe na zbiorze gęstym, więc równości $h_{AB}(z) = h_A(h_B(z))$ wystarcza dowieść gdy każdy z punktów z, $h_B(z), h_{AB}(z)$ jest różny od ∞ – a wtedy otrzymujemy ją z (1a) przez łatwy rachunek.

Z (2) wynika, że *homografie tworzą grupę przekształceń przestrzeni* $\widetilde{\mathbb{C}}$, przy czym odwrotnością homografii h_A jest homografia $h_{A^{-1}}$. Dla zaznajomionych z elementami geometrii rzutowej odnotujmy, że można $\widetilde{\mathbb{C}}$ traktować jako model zespolonej prostej rzutowej, w którym homografie grają rolę przekształceń rzutowych. (Wynika to stąd, że przekształcenie rzutowe, które we współrzędnych jednorodych ma postać $[(z_1, z_2)] \mapsto [(az_1 + bz_2, cz_1 + dz_2)]$, we wspólrzędnych niejednorodnych zapisuje się wzorem $z \mapsto (az + b)/(cz + d)$. Można tej obserwacji użyć, by uzasadnić wzór (2).)

Oprócz homografii wyróżnimy **antyhomografie**, tzn. <u>nieholomorficzne</u> przekształcenia postaci $h \circ s$, gdzie h jest homografią, a s sprzężeniem: $s(z) = \overline{z}$ dla $z \in \mathbb{C}$ i $s(\infty) = \infty$. **Ogólnym przekształceniem Möbiusa** nazwiemy każde przekształcenie $\widetilde{\mathbb{C}} \to \widetilde{\mathbb{C}}$, będące homografią lub antyhomografią. [2]. Przekształcenia te mają wiele interesujących własności, z których niektóre ujęte są w poniższych zadaniach. Grają one istotną rolę w „hiperbolicznej geometrii płaszczyzny". (Wspomnimy o niej w Dodatku 1 do §VIII.2.)

<u>Ogólne przekształcenia Möbiusa: zadania z ćwiczeń.</u> (Pomijam polecenia „dowieść" itp.)

1. a) Ogólne przekształcenia Möbiusa są ciągłe (jako przekształcenia z $\widetilde{\mathbb{C}}$ do $\widetilde{\mathbb{C}}$).

b) Złożenie homografii i antyhomografii (w dowolnej kolejności) jest antyhomografią, podobnie jak odwrotność antyhomografii, a złożenie dwóch antyhomografii jest homografią. (Wskazówka: gdy f jest antyhomografią, to $f = s \circ h$, gdzie h jest homografią.)

b) Żadna homografia nie jest antyhomografią, a antyhomografia – homografią.

2. Każde ogólne przekształcenie Möbiusa jest złożeniem kilku przekształceń, wśród których występują tylko podobieństwa płaszczyzny (przedłużone na $\widetilde{\mathbb{C}}$) i homografia $z \mapsto 1/z$.

[2]Słowo „ogólnym" niekiedy pomijam –choć u większości autorów „przekształcenie Möbiusa" jest synonimem homografii.

Definicja. Okręgiem w $\widetilde{\mathbb{C}}$ nazywamy każdy okrąg w $\mathbb{C}$, o dodatnim promieniu, i każdy zbiór postaci $L \cup \{\infty\}$, gdzie L jest prostą w $\mathbb{C}$.

3. a) W $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$, każdy okrąg i każdą prostą można zadać równaniem $kx^2+ky^2+px+qy+c = 0$, gdzie $k, p, q, c \in \mathbb{R}$. Odwrotnie, niepusty zbiór zadany takim równaniem jest prostą, okręgiem, punktem lub płaszczyzną. Gdy $k \neq 0$, jaki jest promień i środek okręgu?

b) Homografia $h(z) = 1/z$ przeprowadza każdy okrąg w $\widetilde{\mathbb{C}}$ na okrąg w $\widetilde{\mathbb{C}}$. lniony.

c) Ogólne przekształcenie Möbiusa przeprowadza okręgi w $\widetilde{\mathbb{C}}$ na okręgi w $\widetilde{\mathbb{C}}$.

d) Każdy okrąg w $\widetilde{\mathbb{C}}$ można homografią przeprowadzić na oś $\{z : \operatorname{Im} z = 0\} \cup \{\infty\}$.

Definicja. Dla przekształcenia $f : \widetilde{\mathbb{C}} \to \widetilde{\mathbb{C}}$ przyjmijmy $\operatorname{Fix}(f) \overset{def}{=} \{p \in \widetilde{\mathbb{C}} : f(p) = p\}$. **Symetrią** względem okręgu $T \subset \widetilde{\mathbb{C}}$ nazywamy ogólne przekształcenie Möbiusa s_T, którego T jest zbiorem punktów stałych (tzn. $T = \operatorname{Fix}(s_T)$).

4. Dowieść, że symetria s_T istnieje i jest jedyna,[3] na następującej drodze:

a) Gdy $T = \{\infty\} \cup \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = 0\}$, to za s_T można przyjąć tylko odbicie $z \mapsto \overline{z}$ względem osi T, a gdy $T = \{z : |z| = 1\}$, to $z \mapsto 1/\overline{z}$ spełnia żądany warunek. (Oba przekształcenia przedłużamy na ∞.)

b) Gdy f i h są bijekcjami zbioru $\widetilde{\mathbb{C}}$ na $\widetilde{\mathbb{C}}$, to $\operatorname{Fix}(h \circ f \circ h^{-1}) = h(\operatorname{Fix}(f))$.

c) Gdy ogólne przekształcenie Möbiusa f przeprowadza okrąg T_1 na T_2 i s_2 jest symetrią względem T_2, to $f^{-1} \circ s_2 \circ f$ jest nią względem T_1. Stąd i z a) uzyskać tezę w oparciu o **3**d).

d) Dowieść też, że s_T jest **inwolucją**, tzn. złożenie $s_T \circ s_T$ jest identycznością.

e)* Na koniec wywnioskować z a) i c), że gdy $T = L \cup \{\infty\}$, gdzie L jest prostą, to s_T jest symetrią ortogonalną względem L (przedłużoną na ∞); gdy zaś $T = \partial D(o, r)$, to

$$s_T(z) = o + \frac{r^2}{\overline{z} - \overline{o}} \text{ dla } z \in \mathbb{C} \setminus \{o\},\ s_T(o) = \infty \text{ i } s_T(\infty) = o. \tag{3}$$

(Tak więc w ostatnim przypadku $z' := s_T(z)$ jest dla $z \in \mathbb{C} \setminus \{o\}$ jedynym takim punktem prostej oz, że $|z' - o||z - o| = r^2$ i $o \notin [z, z']$.)

Uwaga 1. Dla okręgu T w $\widetilde{\mathbb{C}}$, punkty p, q naziemy **symetrycznymi** względem T, jeśli $s_T(p) = q$; zbiór zaś X nazwijmy **symetrycznym względem** T, jeśli $s_T(X) = X$. Część c) zadania **4** oznacza, że *ogólne przekształcenie Möbiusa f przeprowadza pary punktów, symetryczne względem okręgu $T \subset \widetilde{\mathbb{C}}$, na symetryczne względem okręgu $f(T)$* (więc przeprowadza też zbiory, symetryczne względem T, na symetryczne względem $f(T)$).

5. Niech $D = \{z : |z| < 1\}$ i $\Pi_+ = \{z : \operatorname{Im}(z) > 0\}$.

a) Gdy homografia h przeprowadza Π_+ na D, to $h(z) = k(z - a)/(z - \overline{a})$, gdzie $a \in \Pi_+$ i $|k| = 1$. (Wskazówka: jeśli h ma wymaganą własność i $a = h^{-1}(0)$, to $h(\overline{a}) = \infty$ na podstawie uwagi 1.)

---

[3] W geometrii, s_T nazywane jest **inwersją względem** T, lecz w analizie zespolonej ten termin miewa inne znaczenie.

b) Gdy homografia h przeprowadza D na D, to $h(z) = k\frac{z-a}{1-z\overline{a}}$, gdzie $a \in D$ i $|k| = 1$. (Wskazówka: jak wyżej, lecz tym razem $h(1/\overline{a}) = \infty$.)

c) Odwrotnie, gdy homografia h jest opisana jednym z tych wzorów, to spełnia warunek $h(\Pi_+) = D$ czy $h(D) = D$, odpowiednio. (Wskazówka do przypadku, gdy wzór jest jak w b): z zadania w §1 wynika, że $h(\partial D) = \partial D$ i $h(D) \subset D$.)

d)* Jaka jest postać homografii przeprowadzających Π_+ na Π_+?

6. Niech s_1 i s_2 oznaczają symetrie względem okręgów T_1 i T_2, odpowiednio. Dowieść, że jeśli funkcja $f : U \to \mathbb{C}$, gdzie zbiór $U \subset \mathbb{C}$ jest otwarty, ma pochodną w punkcie z i $s_1(z) \neq \infty \neq s_2(f(s_1(z)))$, to funkcja $s_2 \circ f \circ s_{1|s_1(U)}$ ma ją w punkcie $s_1(z)$. (Wskazówka: gdy $T_1 = T_2 = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ jest zadanie 2 z §3. W ogólnym przypadku skorzystać z **3**d) i uwagi 1.)

7. a) Homografia h_A ma pewien punkt stały, a jeśli ma ich więcej niż 2 to jest identycznością, zaś macierz A jest postaci λI ($\lambda \in \mathbb{C}$).

b) Gdy homografie h_A i h_B w są równe w 3 punktach, to macierze A i B są proporcjonalne i $h_A = h_B$. (Wskazówka: przy $B = I$ wynika to z b); wykorzystać (2).)

c) Gdy h jest homografią i $\mathrm{Fix}(h) = \{\infty\}$, to $h(z) = z + b$ dla pewnego $b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

d) Gdy h jest homografią i $\mathrm{Fix}(h) = \{0, \infty\}$, to $h(z) = az$ dla pewnego $a \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$.

8. Niech p_1, p_2, p_3 i q_1, q_2, q_3 będą trójkami różnych liczb zespolonych. Wówczas:

a) Istnieje jedyna homografia g taka, że $g(p_1) = 0, g(p_2) = \infty$ i $g(p_3) = 1$; jest nią $g(z) = k(z - p_1)/(z - p_2)$, gdzie $k = (p_3 - p_2)/(p_3 - p_1)$.

b) Istnieje jedyna homografia h taka, że $h(p_i) = q_i$ dla $i = 1, 2, 3$. (Wskazówka: $h = g_2^{-1} \circ g_1$, gdzie g_1 i g_2 konstruuje się w oparciu o a).)

c) Gdy w jest obrazem danego punktu z przy powyższej homografii h, to $\frac{p_3-p_2}{p_3-p_1} \cdot \frac{z-p_1}{z-p_2} = \frac{q_3-q_2}{q_3-q_1} \cdot \frac{w-q_1}{w-q_2}$. (Wskazówka: $g_2 \circ h = g_1$.)

d)* Homografia zachowuje **dwustosunek** $[p_1, p_2, p_3, p_4] \overset{def}{=} \frac{p_3-p_1}{p_3-p_2} : \frac{p_4-p_1}{p_4-p_2}$ czwórki punktów.

9. * a) (Denjoy, Wolff.) Nazwijmy przekształcenia $f, g : \widetilde{\mathbb{C}} \to \widetilde{\mathbb{C}}$ **homograficznie sprzężonymi**, jeśli $g = h \circ f \circ h^{-1}$ dla pewnej homografii h. Dowieść, że każda homografia jest tak sprzężona bądź z przesunięciem, bądź z przekształceniem, będącym złożeniem obrotu wokół 0 i jednokładności o środku w 0. (Wskazówka: **7** a),c),d) – lub tw. Jordana z GAL-u.)

b) Wywnioskować, że gdy homografia f nie jest (homograficznie) sprzężona z obrotem, to istnieją punkty $p, q \in \widetilde{C}$ takie, że $\lim_{n\to\infty} f^n(z) = p$ i $\lim_{n\to\infty} f^{-n}(z) = q$ dla każdego $z \in \widetilde{\mathbb{C}}$; jeśli przy tym $p = q$, to jest ona sprzężona z przesunięciem i vice versa. Jak scharakteryzować przypadek obrotu? (Tu, f^n i f^{-n} to n–te iteracje przekształceń f i f^{-1}, odpowiednio.)

10. a) Ogólne przekształcenie Möbiusa f przeprowadza dany okrąg $T \subset \mathbb{C} \setminus \{f^{-1}(\infty)\}$ na okrąg o średnicy $[f(a), f(b)]$, gdzie $[a, b]$ to średnica okręgu T, na przedłużeniu której leży punkt $f^{-1}(\infty)$. (Środek okręgu $f(T)$ na ogół nie jest obrazem, przy f, środka okręgu T.)

b) Jaki jest odpowiednik części a), gdy $f^{-1}(\infty) \in T$?

* Zadania, dotyczące rzutu stereograficznego i inwersji przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

Definicja. * a) Przez **inwersję przestrzeni** $\widetilde{\mathbb{R}^k} := \mathbb{R}^k \cup \{\infty\}$, o skali $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ i środku $o \in \mathbb{R}^k$, rozumiemy przekształcenie określone wzorem

$$s(z) = o + \frac{\lambda}{\|z-o\|^2}(z-o) \text{ dla } z \in \mathbb{R}^k \setminus \{o\},\ s(o) = \infty \text{ i } s(\infty) = o. \tag{4}$$

Powyżej, $\| \ \|$ to norma euklidesowa przestrzeni $\mathbb{R}^k$. (Porównaj z (3).)

b) Niech S będzie sferą w $\mathbb{R}^3$ o środku w o, niech $n \in S$ i niech płaszczyzna Π będzie prostopadła do prostej on i nie przechodzi przez n. Rzut stereograficzny sfery S na $\widetilde{\Pi} := \Pi \cup \{\infty\}$, z bieguna n, definiujemy jak w §2. Gdy rozpatrujemy go na $S \setminus \{n\}$, to mówimy o **rzucie stereograficznym sfery nakłutej** (w biegunie) na płaszczyznę Π.

11.* a) Inwersja przestrzeni $\widetilde{\mathbb{R}^k}$ jest złożeniem podobieństw i inwersji $x \mapsto x/\|x\|^2$.

b) Inwersja przestrzeni $\widetilde{\mathbb{R}^3}$ przeprowadza sfery w $\widetilde{\mathbb{R}^3}$ (tzn. płaszczyzny z dołączonym punktem ∞ lub sfery w $\mathbb{R}^3$) na sfery w $\widetilde{\mathbb{R}^3}$.

c) Wywnioskować, że inwersja przeprowadza okręgi w $\widetilde{\mathbb{R}^3}$ (tzn. proste z dołączonym punktem $\{\infty\}$ i okręgi w $\mathbb{R}^3$) na okręgi w $\widetilde{\mathbb{R}^3}$.

12.* Niech F oznacza rzut stereograficzny sfery S na płaszczyznę $\widetilde{\Pi}$, z bieguna n.

a) Obierzmy inwersję J o środku n i takiej skali λ, by punkt $J(o)$ był spodkiem prostopadłym punktu n na Π. Wówczas $J_{|S} = F$. (Wskazówka: zbiór $J(S)$ jest płaszczyzną, bo $n \in S$. Dowieść, że $J(S) = \widetilde{\Pi}$ i punkt $J(z)$ spełnia warunki definicji punktu $F(z)$.)

b) Wywnioskować, że F i F^{-1} przeprowadzają okręgi na okręgi. (Oczywiście, w S rozważamy „prawdziwe" okręgi, a w $\widetilde{\Pi}$ – okręgi zdefiniowane w **11** c).)

3 Funkcja exp i funkcje trygonometryczne.

Promień zbieżności szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$ jest równy ∞. Zatem suma tego szeregu określa pewną funkcję analityczną $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, oznaczaną przez exp lub przez $z \mapsto \mathrm{e}^z$. Tak samo, istnieją funkcje **cosinus** i **sinus**, wyznaczone dla $z \in \mathbb{C}$ wzorami:

$$\cos z := 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots, \qquad \sin z := z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ldots$$

Wzory te rozszerzają na $\mathbb{C}$ rozwinięcia w szeregi, znane z wykładu AM I. Oczywiście, funkcja cos jest parzysta, a sin nieparzysta; bez trudu otrzymujemy też **wzory Eulera**

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = \cos z + \mathrm{i}\sin z, \quad \cos z = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}\right), \quad \sin z = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}\right) \tag{5}$$

Natomiast z twierdzenia 2 w §I.4 wynikają zależności

$$\exp' = \exp, \qquad \sin' = \cos, \qquad \cos' = -\sin. \tag{6}$$

Dalej, dla $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ mamy:

$$\mathrm{e}^{z_1+z_2} = \mathrm{e}^{z_1}\mathrm{e}^{z_2}, \text{ skąd } \mathrm{e}^z \neq 0 \ \text{ i } \ \mathrm{e}^{-z} = 1/\mathrm{e}^z \tag{7a}$$
$$\cos(z_1 + z_2) = \cos(z_1)\cos(z_2) - \sin(z_1)\sin(z_2) \tag{7b}$$
$$\sin(z_1 + z_2) = \cos(z_1)\sin(z_2) + \sin(z_1)\cos(z_2) \tag{7c}$$
$$\cos z = \sin(z + \frac{\pi}{2}), \ \sin z = -\cos(z + \frac{\pi}{2}), \ (\cos z)^2 + (\sin z)^2 = 1 \tag{7d}$$

Pierwszej z tych czterech równości najłatwiej dowieść tak: pochodna funkcji $z \mapsto \mathrm{e}^{z+z_1}\mathrm{e}^{-z}$ jest równa 0, na mocy (6) i wzoru na pochodną iloczynu; funkcja ta jest więc stała i równa swej wartości w zerze, tzn. e^{z_1}. To daje $\mathrm{e}^z\mathrm{e}^{-z} = \mathrm{e}^0$ i $\mathrm{e}^{z+z_1} = \mathrm{e}^z\mathrm{e}^{z_1}, \forall z \in \mathbb{C}$. Kolejne dwie tożsamości, których (7d) jest przypadkiem szczególnym, wynikają z (7a) i wzorów Eulera.

Funkcje $\exp, \cos, \sin$ wyrazić można jako funkcje zmiennych $x = \mathrm{Re}(z)$ i $y = \mathrm{Im}(z)$:

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y), \tag{8a}$$
$$\cos z = \cos x \,\mathrm{ch}\, y - \mathrm{i}\sin x \,\mathrm{sh}\, y, \tag{8b}$$
$$\sin z = \sin x \,\mathrm{ch}\, y + \mathrm{i}\cos x \,\mathrm{sh}\, y. \tag{8c}$$

gdzie **cosinus hiperboliczny** ch i **sinus hiperboliczny** sh to funkcje określone tak:

$$\mathrm{ch}\, z := \frac{\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z}}{2}, \quad \mathrm{sh}\, z := \frac{\mathrm{e}^z - \mathrm{e}^{-z}}{2} \quad \text{dla } z \in \mathbb{C}. \tag{9a}$$

Istotnie, zależności (8a,b,c) wynikają z (5) i własności (7a) funkcji exp. (Gra tylko rolę to, że $z = x + \mathrm{i}y$; nie jest konieczne, by $x, y \in \mathbb{R}$). Oczywiście zachodzi też

$$\cos z = \mathrm{ch}(\mathrm{i}z), \quad \sin z = -\mathrm{i}\,\mathrm{sh}(\mathrm{i}z). \tag{9b}$$

Wynikają stąd tożsamości dla ch i sh, odpowiadające tożsamościom (7b), (7c), (7d).

Dla $a, b \in \mathbb{C}$ przyjmijmy $a + b\mathbb{Z} := \{a + bn : n \in \mathbb{Z}\}$, gdzie $\mathbb{Z}$ to zbiór liczb całkowitych. Twierdzimy, że

$$\exp(z_1) = \exp(z_2) \Leftrightarrow z_1 - z_2 \in 2\pi\mathrm{i}\mathbb{Z} \tag{10a}$$
$$\cos(z_1) = \cos(z_2) \Leftrightarrow (z_1 - z_2 \in 2\pi\mathbb{Z} \ \text{ lub } z_1 + z_2 \in 2\pi\mathbb{Z}) \tag{10b}$$
$$\sin(z_1) = \sin(z_2) \Leftrightarrow (z_1 - z_2 \in 2\pi\mathbb{Z} \ \text{ lub } \ z_1 + z_2 \in \pi + 2\pi\mathbb{Z}) \tag{10c}$$

Istotnie, $\exp(z_1) = \exp(z_2) \Leftrightarrow \exp(z_1 - z_2) = 1$, wobec czego (10a) wynika stąd, że $\exp(x + iy) = 1 \Leftrightarrow (x = 0 \text{ i } y \in 2\pi\mathbb{Z})$. (Korzystamy z (4a).) A że $W + \frac{1}{W} = w + \frac{1}{w} \Leftrightarrow W = w$ lub $W = 1/w$ (równanie jest kwadratowe względem W), więc z (10a) i (5) łatwo otrzymujemy (10b). Natomiast (10c) jest konsekwencją (10b) i (7d).

Nazwijmy liczbę z_0 **okresem** funkcji $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, jeśli $f(z_0 + z) = f(z)$ dla wszystkich $z \in \mathbb{C}$. Z (10) wynika, że *zbiorem okresów funkcji* cos *i funkcji* sin *jest* $2\pi\mathbb{Z}$, *zaś zbiorem okresów funkcji* exp *jest* $2\pi\mathrm{i}\mathbb{Z}$. *Ponadto,* $\sin^{-1}(0) = \pi\mathbb{Z}$ *i* $\cos^{-1}(0) = \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$.

By wyobrazić sobie, jak omawiane trzy funkcje przekształcają płaszczyznę $\mathbb{C}$, rozważmy na niej siatkę prostych K_x i L_y $(x, y \in \mathbb{R})$, równoległych do osi współrzędnych:

$$K_x = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) = x\}, \quad L_y = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) = y\}$$

Z (8a) wynika, że obrazem prostej K_x przy przekształceniu exp jest okrąg $\{z' : |z'| = \mathrm{e}^x\}$, a obrazem prostej L_y jest półprosta otwarta $\{z' \in \mathbb{C}\backslash\{0\} : \arg(z') = y\}$. Otrzymane rodziny półprostych i okręgów wypełniają oczywiście zbiór $\mathbb{C}\backslash\{0\}$, skąd ten jest obrazem płaszczyzny $\mathbb{C}$ przy funkcji exp.

Natomiast przekształcenie cos przeprowadza prostą $L_y\,(y \neq 0)$ na zbiór punktów $z' = x' + y'\mathrm{i}$, który na mocy (8b) zadany jest równaniem:

$$\left(\frac{x'}{\operatorname{ch} y}\right)^2 + \left(\frac{y'}{\operatorname{sh} y}\right)^2 = 1$$

Przedstawia ono elipsę o środku w 0 i półosiach długości $\operatorname{ch} y$ i $|\operatorname{sh} y|$.

Pytanie: Czym jest obraz prostej K_x przy funkcji cos, gdy $x \notin (\pi/2)\mathbb{Z}$? (Odp.: jest on tym ramieniem hiperboli $(x'/\cos x)^2 - (y'/\sin x)^2 = 1$, które położone jest w półpłaszczyźnie $\operatorname{sgn} x' = \operatorname{sgn}(\cos x)$.)

Odnotujmy też, że przeliczalnie wiele prostych K_x i prosta L_0 są przez $f = \cos$ przeprowadzane w wyjątkowy sposób: obrazem prostej L_0 jest odcinek $[-1, 1]$, a obrazem prostej K_x – półprosta $[1, \infty)_{\mathbb{R}}$ gdy $x \in 2\pi\mathbb{Z}$, półprosta $(-\infty, -1]_{\mathbb{R}}$ gdy $x \in \pi + 2\pi\mathbb{Z}$, zaś prosta $\mathrm{i}\mathbb{R}$ gdy $x \in \pi/2 + \pi\mathbb{Z}$. (Dlaczego?) Kto pamięta własności stożkowych, wywnioskuje z równości $\operatorname{ch}^2 y - \operatorname{sh}^2 y = 1$ i $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, że -1 i 1 są ogniskami każdej z elips $f(L_y)$ i (ramion) hiperbol $f(K_x)$. Wynika stąd, a ogólniejszą przyczynę poznamy w rozdziale V, że każda z hiperbol jest prostopadła do każdej z elips. Prosta $\mathrm{i}\mathbb{R}$, obie półproste i opisana rodzina ramion hiperbol wypełniają w sposób rozłączny całą płaszczyznę, co wynika z poniższego zadania. (Można zamiast niego użyć pierwszego z zadań z §I.1, jeśli przedstawić cos jako złożenie $j \circ \exp \circ g$, gdzie $g(z) = \mathrm{i}z$ i $j(z) = \frac{1}{2}(z + z^{-1})$.) To samo tyczy się opisanej rodziny elips i odcinka $[-1, 1]$. Dla każdej z tych przyczyn, obrazem funkcji cos jest cała płaszczyzna $\mathbb{C}$.

Zadanie 1. Dla danych liczb $X, Y > 0$ istnieje dokładnie jedna para liczb $a, b > 0$ takich, że $a + b = 1$ i $X/a - Y/b = 1$. (Wskazówka: rozważyć funkcję $a \mapsto X/a - Y/(1-a)$. W zastosowaniu, rolę X i Y grają kwadraty współrzędnych punktu płaszczyzny.)

[RYSUNKI] Zagubiłem rysunki z 2004r, więc odsyłam do istniejących teraz w sieci, np.
`http://www.matematicasvisuales.com/english/html/complex/functions/cosine.html`
`http://math.stackexchange.com/questions/54713/complex-cosine-and-sine`

Na rysunkach (gdy je wzbogacić) dostrzec można też ślady okresowości funkcji exp i cos. Płaszczyzna $\mathbb{C}$ jest bowiem podzielona prostymi $K_{n\pi}, n \in \mathbb{Z}$, na pasy

$$V_n = \{z \in \mathbb{C} : n\pi < \mathrm{Re}(z) < (n+1)\pi\}.$$

Każdy pas V_n jest przez funkcję $f = \cos$ przeprowadzany w sposób różnowartościowy na zbiór $\bigcup\{f(K_x) : n\pi < x < (n+1)\pi\}$, równy $(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}) \cup (-1, 1)$. (Korzystamy z (6b) oraz, ponownie, z zadania i wcześniejszego opisu zbiorów $f(K_x)$.) Na sąsiadujących pasach V_{n-1} i V_n przekształcenie cos przeprowadza pary punktów, symetryczne względem rozdzielającej pasy prostej $K_{n\pi}$, na pary symetryczne względem osi rzeczywistej, co wynika z 4b).

Podobnie, płaszczyzna jest podzielona prostymi $L_{2n\pi}, n \in \mathbb{Z}$, na pasy

$$H_n = \{z \in \mathbb{C} : 2n\pi < \operatorname{Im}(z) < 2(n+1)\pi\},$$

z których każdy jet przez funkcję exp przeprowadzany są w sposób różnowartościowy na $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)_{\mathbb{R}}$. (Korzystamy z (6a).)

Jeśli rolę pasów zamienić, to odnotujemy, że funkcja exp nawija pasy V_n na pierścienie $\mathrm{e}^{n\pi} < |z| < \mathrm{e}^{(n+1)\pi}$, natomiast funkcja cos nawija pasy H_n na zdeformowane pierścienie, ograniczone parą elips. Użycie słowa „nawija" wiąże się z cyklicznością przekształcenia: w obu bowiem przypadkach i dla dowolnych punktów p, q jak zaznaczono na rysunkach, domknięty prostokąt o kolejnych wierzchołkach $p, q, q+d, p+d$, gdzie d jest okresem funkcji cos czy exp, przeprowadzany jest na odpowiedni pierścień–i to w analogiczny sposób, jak przylegający prostokąt o wierzchołkach $p, q, q-d$ i $p-d$. (Przypomnijmy, że $d = 2\pi$ gdy $f = \cos$ i $d = 2\pi\mathrm{i}$ gdy $f = \exp$.)

Pytania. Czym jest obraz półpłaszczyzny $\operatorname{Im} z > 0$ przy funkcji cos? Kiedy $\cos z \in \mathbb{R}$? Jaki jest zbiór wartości funkcji $\operatorname{tg} := \sin / \cos$, określonej na $\mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z}$?

Uwaga 1. Ponieważ $\sin(z) = \cos(z - \pi/2)$, więc rysunki dla funkcji sin są analogiczne, jak dla funkcji cos. Co to oznacza jest kolejnym pytaniem. ⊟

Uwaga 2. Z (10a) wynika, że funkcja exp jest różnowartościowa na podzbiorze płaszczyzny, przecinającym każdą prostą pionową K_x wzdłuż zbioru o średnicy mniejszej niż 2π. Dla przykładu, jest ona różnowartościowa na pasie $|\operatorname{Im} z - \operatorname{Re} z| < 1$. Czytelnik zechce zbadać, czy funkcja cos jest na tym pasie różnowartościowa.

Uwaga 3. * Zatem zdanie „funkcja f jest różnowartościowa na pewnym otoczeniu punktu p" jest prawdziwe przy $f = \exp$ i dowolnym $p \in \mathbb{C}$, zaś przy $f = \cos$ jest ono prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy $p \notin \pi\mathbb{Z}$. (Wynika to z (10b).) Czytelnik zaznajomiony z pojęciem nakrycia stwierdzi bez trudu (zwłaszcza gdy prócz (6a) wykorzysta dowód twierdzenia 1 w przyszłym §5), że funkcja $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ jest nakryciem – jest to jej ważna własność. Czy jest nakryciem funkcja $\cos_{|\mathbb{C}\setminus\pi\mathbb{Z}} : \mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z} \to \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$? ⊟

Uwaga 4. * Ponieważ $\cos = j \circ \exp \circ g$, gdzie $j(z) := \frac{1}{2}(z + z^{-1})$ i przekształcenie $g(z) := \mathrm{i}z$ jest obrotem wokół 0, więc z porównania własności funkcji exp i cos wynika, że j przeprowadza okręgi $|z| = r$ na elipsy, a półproste $\{tw : t > 0\}$ na gałęzie hiperbol – jednak poza przypadkami, gdy $r = 1$ lub $w \in \{\pm 1, \pm \mathrm{i}\}$. (Dlaczego?) Bezpośrednią analizę **funkcji Żukowskiego** j znaleźć można w książce Szabata.

Zadanie 2. a) Gdy $f \in \{\exp, \cos, \sin\}$, to $|f(z)| \le \mathrm{e}^{|z|}$ i w $\widetilde{\mathbb{C}}$ nie istnieje $\lim_{z\to\infty} f(z)$.

b) Dla $z = x + \mathrm{i}y$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$, zachodzą równości $|\sin z|^2 = \sin^2 x + \mathrm{sh}^2\, y = \mathrm{ch}^2\, y - \cos^2 x$ oraz $|\cos z|^2 = \mathrm{sh}^2\, y + \cos^2 x = \mathrm{ch}^2\, y - \sin^2 x$.

c)* Każdy dysk o promieniu $\pi\sqrt{2}$ zawiera punkt z taki, że $\cos z \in \mathbb{Z}$. (Wskazówka: $\cos^{-1}(\mathbb{Z}) \supset \mathrm{i}A + \pi\mathbb{Z}$ dla pewnego zbioru $A \subset \mathbb{R}$ takiego, że $\mathrm{dist}(t, A) < 1\, \forall t \in \mathbb{R}$.)

Zadanie 3. Dowieść, że na każdej prostej $\mathrm{Re}\, z = \pi(n + \frac{1}{2})$, gdzie $n \in \mathbb{Z}$, funkcje $|\mathrm{ctg}|$ i $|1/\sin|$ są ograniczone przez 1, a na każdej prostej $\mathrm{Im}\, z = \pi(n + \frac{1}{2})$ – przez $\frac{\mathrm{e}^\pi + 1}{\mathrm{e}^\pi - 1}$.

Zadanie 4. Niech $E_n(z) := (1 - z)\exp(z + \frac{1}{2}z^2 + ... + \frac{1}{n}z^n)$ dla $z \in \mathbb{C}$ i $n \in \mathbb{N}$. Dowieść, że

a) $E_n'(z) = -z^n \exp(z + \frac{1}{2}z^2 + ... + \frac{1}{n}z^n)$.

b) Gdy $|z| < 1$, to $|E_n(z) - 1| \le |z|^{n+1}$. (Wskazówka: z a) wywnioskować, że wszystkie współczniki szeregu Maclaurina funkcji $-E_n'$ są nieujemne; dalej dowieść tego o $1 - E_n$ i o $\varphi(z) := (1 - E_n(z))/z^{n+1}$, co da $|\varphi(z)| \le \varphi(1) = 1$ gdy $|z| \le 1$.)

4 Logarytmy i potęgi liczb zespolonych.

Gdy $\mathrm{e}^w = z$, to w nazywamy **logarytmem** liczby zespolonej z i piszemy $w = \log(z)$. Logarytmów liczby $z \ne 0$ jest nieskończenie wiele. Twierdzimy bowiem, że

$$w = \log(z) \Leftrightarrow \big(\mathrm{Re}(w) = \ln|z| \;\text{ i }\; \mathrm{Im}(w) = \arg(z)\big). \tag{11}$$

(Powyżej, ln to logarytm naturalny liczby dodatniej.) Istotnie, gdy $\mathrm{e}^{x+iy} = z$, to $\mathrm{e}^x = |z|$ i $y = \arg(z/e^x) = \arg(z)$; patrz wzór (8a) w §3. Stąd gdy w jest logarytmem liczby z, to $w \pm 2\pi\mathrm{i}$ też nim jest.

Logarytmy pozwalają zdefiniować potęgi z^s liczby zespolonej z o wykładniku s będącym liczbą zespoloną.

Definicja. Dla $z, s \in \mathbb{C}$, $z \ne 0$, oznaczamy przez z^s każdą liczbę e^{sw}, gdzie $w = \log(z)$.

Zadanie 1. Gdy a i b są liczbami postaci z^s, gdzie s i $z \ne 0$ są ustalone, to $b/a = \mathrm{e}^c$ dla pewnego $c \in 2\pi\mathrm{i}s\mathbb{Z}$. Istnieje więc tylko jedna liczba z^s gdy $s \in \mathbb{Z}$, zaś k takich liczb, gdy s jest ułamkiem nieskracalnym o mianowniku $k > 0$; a gdy s nie jest liczbą wymierną, to istnieje ich nieskończenie (lecz przeliczalnie) wiele.

Niejednoznaczności logarytmu $\log z$ czy potęgi z^s można starać się zapobiec przez określenie występującego w (11) argumentu $\arg z$ liczby z. Dla przedziału $J \subset \mathbb{R}$, wybranego jak na początku str. 3, będziemy więc pisać $\mathrm{Log}_J(z) := \ln|z| + \mathrm{i}\,\mathrm{Arg}_J(z)$.

Uwaga 1. Tak Arg_J, jak i Log_J jest poprawnie określoną funkcją z $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ do $\mathbb{C}$. Jednak obie te funkcje są nieciągłe (tylko) w punktach należących do półprostej $\{t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} : t > 0\}$, gdzie φ jest początkiem przedziału J.

Uwaga 2. Niech $J = [0, 2\pi)$, zaś P oznacza pas $P = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \mathrm{Im}(z) < 2\pi\}$. Z definicji i (8a) wynika, że gdy $z \in P$ i $w \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty)_{\mathbb{R}}$, to

$$\mathrm{e}^z \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty)_{\mathbb{R}} \ , \ \mathrm{Log}_J(w) \in P \text{ oraz } \ \mathrm{Log}_J(\mathrm{e}^z) = z \ , \ \ \mathrm{e}^{\mathrm{Log}_J(w)} = w.$$

Zatem obcięcia, do P i do $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)_{\mathbb{R}}$, funkcji exp i Log_J są wzajemnie odwrotnymi homeomorfizmami pomiędzy tymi zbiorami. W szczególności, funkcja Log_J przekształca homeomorficznie (i holomorficznie, czego dowiedziemy w następnym paragrafie) zbiór $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)_{\mathbb{R}}$ na pas P, zaś półpłaszczyznę $\mathrm{Im}\, z > 0$ na pas $0 < \mathrm{Im}\, z < \pi$. □

W związku z uwagą 1 istotne staje się pytanie, kiedy na danym zbiorze $U \subset \mathbb{C}$ zdefiniować można ciągłą funkcję $h : U \to \mathbb{C}$, spełniającą dla $z \in U$ warunek $h(z) = \log z$ (odpowiednio: warunek $h(z) = \arg z$ czy $h(z) = z^s$, gdzie $s \in \mathbb{C}$ jest ustalone). Funkcję taką, jeśli istnieje, nazwiemy **gałęzią logarytmu** (odp. **argumentu** czy **s-tej potęgi**) na zbiorze U. Nieco ogólniej, **gałęzią logarytmu** danej **funkcji** $f : T \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$, gdzie T jest przestrzenią topologiczną, nazywamy funkcję ciągłą $h : T \to \mathbb{C}$ taką, że $h(t) = \log(f(t))$ dla wszystkich $t \in T$. Analogicznie definiujemy gałąź argumentu i gałąź s–tej potęgi funkcji f.

Uwaga 3. Na podstawie (11) i definicji s–tej potęgi,

a) gdy l jest gałęzią logarytmu funkcji f, to $\mathrm{Im}(l)$ jest gałęzią argumentu, a $\exp(s \cdot l)$ gałęzią s–tej potęgi tej funkcji;

b) gdy σ jest gałęzią argumentu ciągłej funkcji f, to $\ln|f| + \mathrm{i}\sigma$ jest jej gałęzią logarytmu.

Stwierdzenie 1. *Gdy dziedzina T funkcji $f : T \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ jest zbiorem spójnym, to każde dwie gałęzie argumentu tej funkcji różnią się o stałą, będącą całkowitą wielokrotnością liczby 2π. Podobnie, każde dwie gałęzie logarytmu funkcji f różnią się wtedy o całkowitą wielokrotność liczby $2\pi\mathrm{i}$.*

Dowód. Różnica $h_1 - h_2$ dwóch gałęzi argumentu funkcji f przyjmuje wartości w dyskretnym zbiorze $2\pi\mathbb{Z}$. Ponieważ funkcja $h_1 - h_2$ jest ciągła na zbiorze spójnym T, więc jest ona stała. To samo stosuje się do gałęzi logarytmu (korzystamy z (10a)). □

Przykład. a) Na okręgu $S = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ nie istnieje gałąź argumentu (równoważnie: logarytmu). Istotnie, jeśli A jest gałęzią argumentu na S to, na podstawie stwierdzenia 1, funkcja $A - \mathrm{Arg}_{[0,2\pi)}$ jest stała na $S \setminus \{1\}$. Jest to niemożliwe, bo funkcja $\mathrm{Arg}_{[0,2\pi)}$ nie ma granicy w punkcie 1, zaś funkcja A ma.

b) Gdy $L = \{t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} : t \geq 0\}$ jest dowolną półprostą domkniętą, wychodzącą z 0, to gałęzią argumentu na $\mathbb{C} \setminus L$ jest obcięcie funkcji Arg_J, dla $J := [\varphi, \varphi + 2\pi)$, a galęzią logarytmu – obcięcie funkcji Log_J. W szczególności, *gałęzie logarytmu, argumentu i s-tej potęgi istnieją na każdym dysku $D \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$* (bo $D \subset \mathbb{C} \setminus L$, dla pewnej takiej półprostej L). ⊟

Uwaga 4. (i definicja). Niech zbiór $T \subset \mathbb{C}$ będzie spójny i $1 \in T$. Ze stwierdzenia 1 wynika, że jeśli na T istnieją gałęzie logarytmu, to jedyna spośród nich przyjmuje w 1 wartość 0, a także jedyna gałąź argumentu przyjmuje w 1 wartość 0. Gałęzie te oznaczamy Log i Arg i nazywamy **głównymi**; oczywiście, $\mathrm{Log}(z) = \ln|z| + \mathrm{i}\,\mathrm{Arg}(z)$. Jeśli nie powiedziano inaczej, dla $z \in T$ przyjmujemy też wtedy $z^s = \exp(s\,\mathrm{Log}(z))$ (jest to **gałąź główna s–tej potęgi**).

5 Różniczkowalność gałęzi logarytmu i gałęzi s–tej potęgi.

Lemat 1. *Niech l będzie gałęzią logarytmu, określoną w otoczeniu punktu w_0. Wówczas pochodna $l'(w_0)$ istnieje i jest równa $1/w_0$.*

Dowód. Gdy dla $w \in \mathrm{dom}(l)$ przyjąć $z_w \overset{def}{=} l(w)$, to $\exp(z_w) = w$, skąd

$$\frac{l(w) - l(w_0)}{w - w_0} = \frac{z_w - z_{w_0}}{\exp(z_w) - \exp(z_{w_0}).} \tag{*}$$

Z ciągłości l wynika, że $z_w \to z_{w_0}$ gdy $w \to w_0$. A że $\exp'(z_{w_0}) = \exp(z_{w_0}) = w_0$, to prawa strona w (*) ma dla $w \to w_0$ granicę, równą $1/w_0$. □

Uwaga 1. Ogólniej, niech funkcje zespolone f i l, określone w otoczeniu punktów z_0 i w_0, odpowiednio, będą takie, że $l(w_0) = z_0$ i $f \circ l(w) = w$ dla w dostatecznie bliskich w_0. Jeśli l jest ciągła, a f ma pochodną $f'(z_0) \neq 0$, to pochodna $l'(w_0)$ istnieje i jest równa $1/f'(z_0)$.

Twierdzenie 1. *Niech T będzie otwartym i spójnym podzbiorem przestrzeni $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$ i niech funkcja $f : T \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ma pochodną w każdym punkcie.*

a) Każda gałąź logarytmu funkcji f jest różniczkowalna, a jej pochodna jest równa f'/f.

b) Gdy, odwrotnie, pochodna g' funkcji $g : T \to \mathbb{C}$ jest równa **pochodnej logarytmicznej** *f'/f funkcji f, to $g + c$ jest dla pewnej stałej $c \in \mathbb{C}$ gałęzią logarytmu funkcji f.*

c) Podobnie do a), każda gałąź h s–tej potęgi funkcji f jest różniczkowalna i $h' = shf'/f$. Ponadto, każdy punkt $t \in T$ ma takie otoczenie V, że $h_{|V} = \mathrm{e}^{sg}$, gdzie g jest gałęzią logarytmu funkcji $f_{|V}$.

Dowód. Ad a). Niech $t \in T$ i niech l będzie gałęzią logarytmu, określoną na pewnym otoczeniu U punktu $f(t)$. (Patrz część b) przykładu w §4.) Dalej, niech V będzie spójnym otoczeniem punktu t, takim, że $f(V) \subset U$. Na V, badana gałąź h logarytmu funkcji f różni się od $l \circ (f_{|V})$ o stałą, bo są to gałęzie logarytmu tej samej funkcji $f_{|V}$. (Por. stwierdzenie 1 w §4.) Równość $h'(t) = f'(t)/f(t)$ wynika więc z lematu 1 i wzoru na $(l \circ f_{|V})'$.

Ad b). Ponieważ $(f\mathrm{e}^{-g})' = f'\mathrm{e}^{-g} - fg'\mathrm{e}^{-g} = 0$, więc funkcja $f\mathrm{e}^{-g}$ jest stała; a że jest niezerowa, to jest równa e^c dla pewnej stałej $c \in \mathbb{C}$. Stąd $f = \mathrm{e}^{g+c}$.

Ad c). Ustalmy $t \in T$ i obierzmy l, U i V jak w a). Na V, wzór $h_0 = \mathrm{e}^{s \cdot l \circ (f_{|V})}$ zadaje pewną gałąź funkcji $(f_{|V})^s$. Funkcja $h_{|V} : h_0$ jest więc stała, bo jest ciągła i przyjmuje wartości w przeliczalnym zbiorze $\{\mathrm{e}^{sc} : c \in 2\pi\mathrm{i}\mathbb{Z}\}$. (Patrz zadanie 1 w §4.) Gdy jej wartość oznaczyć przez sc, gdzie $c \in 2\pi\mathrm{i}\mathbb{Z}$, to $g := c + l \circ (f_{|V})$ jest taką gałęzią logarytmu funkcji $f_{|V}$, że $h_{|V} = \mathrm{e}^{sg}$. Stąd i z b) wynika łatwo, że $h'(t) = sh(t)f'(t)/f(t)$. □

Wniosek 1. *a) n–ta pochodna w punkcie $w_0 \neq 0$ gałęzi logarytmu, określonej w otoczeniu tego punktu, istnieje i jest równa $(-1)^{n-1}(n-1)!/w_0^n$.*

b) gdy gałąź h funkcji z^s jest określona w otoczeniu punktu $w_0 \neq 0$, to jej n–ta pochodna $h^{(n)}(w_0)$ istnieje i jest równa $\frac{h(w_0)}{w_0^n}\prod_{j=0}^{n-1}(s-j)$.

Dowód. Dla $n = 1$ korzystamy z twierdzenia (przy $f(z) = z$), a dla $n > 1$ – z indukcji. ⊟

Przykład. Niech $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Jak wiemy, na dysku $D = D(z_0, |z_0|)$ istnieją gałęzie logarytmu i s-tej potęgi. W oparciu o wniosek 1 możemy wyznaczyć szeregi Taylora tych gałęzi o środku w z_0.

a) Dla galęzi logarytmu log otrzymujemy szereg $\log(z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{nz_0^n}(z-z_0)^n$; w szczególności, przy $z_0 = 1$, szeregiem Taylora gałęzi głównej logarytmu jest $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(z-1)^n$.

b) Dla gałęzi g s–tej potęgi otrzymujemy szereg $g(z_0)(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{s}{n}\frac{1}{z_0^n}(z-z_0)^n)$, gdzie $\binom{s}{n} := \frac{1}{n!}\prod_{j=0}^{n-1}(s-j)$. Przy $z_0 = 1$ daje to **szereg Newtona** $1 + \sum_{n=1}^{\infty}\binom{s}{n}(z-1)^n$ dla gałęzi głównej s–tej potęgi na $D(1, 1)$.

c) Oddzielne jest pytanie, czy powyższe funkcje rozwijają się w te szeregi na wymienionych dyskach, tzn. czy dla $|z| < 1$ mają miejsce tożsamości $\mathrm{Log}(1 + z) = z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3...$ i $(1 + z)^s = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\binom{s}{n}z^n$ dla gałęzi głównych logarytmu i s–tej potęgi, odpowiednio. W obu przypadkach odpowiedź pozytywną da zapowiedziane już w §I.5 twierdzenie z §V.1 o rozwijaniu funkcji holomorficznych w szeregi Taylora. Jednak w przypadku gałęzi logarytmu, nie musimy na to twierdzenie czekać: w oparciu o twierdzenie Abela stwierdzamy, że przy $g(z) := z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3...$ (gdzie $|z| < 1$) zachodzi $g'(z) = 1/(1+z)$, skąd g jest gałęzią główną logarytmu funkcji $1 + z$ na podstawie twierdzenia 1 i równości $g(0) = 0$. □

Uwaga 2. * Choć istnieje wiele gałęzi logarytmu, mających różne dziedziny, to naturalne jest chcieć wszystkie je traktować łącznie, jako samodzielny obiekt. Tak samo jest z gałęziami s–ej potęgi, dla $s \notin \mathbb{Z}$. Jest to ważna przyczyna wprowadzenia „wieloznacznych” czy „ogólnych” funkcji analitycznych, obecnych we wielu podręcznikach. Tu jednak nie będziemy ich rozpatrywać i zakładamy zawsze jednoznaczość funkcji. Dlatego też nie będziemy mówić o „funkcji logarytmicznej” czy „funkcji s–tej potęgi”, a jedynie o ich gałęziach. Gdy nie powiedziano inaczej i spełnione są warunki uwagi 4 z §4, domyślnie wybieramy gałęzie główne.

Ćwiczenie.* Z zadania 3 w §I.1 wiemy, że funkcja $u(z) = \frac{1}{2}(z + z^{-1})$ przekształca w sposób różnowartościowy zbiór $\Pi_+ = \{z : \mathrm{Im}(z) > 0\}$ na $(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}) \cup (-1, 1)_{\mathbb{R}}$. Wyrazić $(u_{|\Pi_+})^{-1}$ jawnym wzorem i wyjaśnić jego poprawność i to, że określa on funkcję holomorficzną.

III CAŁKA FUNKCJI HOLOMORFICZNEJ WZDŁUŻ DROGI

1 Wstępne definicje

Definicja. Gdy funkcja zespolona φ jest zdefiniowana, ograniczona i ciągła na odcinku $[a,b]$, z którego usunięto być może skończenie wiele punktów, to przyjmujemy:

$$\int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t \stackrel{def}{=} \int_a^b \mathrm{Re}\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{i}\int_a^b \mathrm{Im}\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t. \tag{1}$$

(Po prawej bierzemy całki Riemanna funkcji rzeczywistych.)

Jeśli funkcje $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$ mają wymienione własności i $a < s < b$, $z \in \mathbb{C}$, to

$$\int_a^b (\varphi_1(t) + \varphi_2(t))\,\mathrm{d}t = \int_a^b \varphi_1(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b \varphi_2(t)\,\mathrm{d}t \tag{2}$$

$$\int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^s \varphi(t)\,\mathrm{d}t + \int_s^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{i} \quad \int_a^b z\varphi(t)\,\mathrm{d}t = z\int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t \tag{3}$$

$$\left|\int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |\varphi(t)|\,\mathrm{d}t \tag{4}$$

By dowieść (4) obierzmy taką liczbę z o module 1, że $z\int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t \in [0,\infty)_{\mathbb{R}}$. Zastąpienie w (4) funkcji φ przez $z\varphi$ nie zmieni na mocy (3) wartości żadnej ze stron i sprowadzi dowód do przypadku, gdy $\int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t \in [0,\infty)_{\mathbb{R}}$. Wtedy jednak wynika on stąd, że $|\int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t| = \mathrm{Re}(\int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t) = \int_a^b \mathrm{Re}(\varphi(t))\,\mathrm{d}t \le \int_a^b |\varphi(t)|\,\mathrm{d}t$.

Definicja. a) **Ścieżka** to funkcja ciągła $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$, gdzie $a,b \in \mathbb{R}$ i $a < b$. Jej **nośnik** lub **obraz** to zbiór $\gamma^* := \gamma([a,b])$. **Krańce** ścieżki γ to jej **początek** $\gamma(a)$ i **koniec** $\gamma(b)$. Gdy $\gamma(a) = \gamma(b)$, mówimy o **ścieżce zamkniętej** lub **pętli**.

b) Ścieżka $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ jest **gładka**, gdy jej pochodna w każdym punkcie $t \in [a,b]$ jest różna od zera i w sposób ciągły zależy od t. (W punktach a,b bierzemy pochodne jednostronne.) Ścieżkę γ nazwiemy **drogą** [4] jeśli jest **kawałkami gładka**, tzn. istnieją punkty $a = t_0 < \ldots < t_n = b$ takie, że każda ze ścieżek $\gamma_{|[t_{i-1},t_i]}$ jest gładka.

c) Gdy $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ jest drogą, zaś $f : \gamma([a,b]) \to \mathbb{C}$ jest funkcją ciągłą, to

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z \stackrel{def}{=} \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t.$$

(Funkcja $\varphi := f(\gamma(t))\gamma'(t)$ spełnia warunki początkowej definicji – dlaczego?) Zamiast $\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z$ piszemy też $\int_\gamma f$ gdy jest jasne, jaka jest zmienna całkowania. [5]

[4] w wielu podręcznikach, nazw „droga” i „ścieżka” używa się wymiennie.

[5] Ten skrót zwiększa przejrzystość zapisu całki, lecz ma swą wadę: ukrywa to, że w istocie całkujemy nie funkcję, a formę $f(z)\mathrm{d}z$. Nie definiujemy tu nawet pojęcia formy różniczkowej, a przed Czytelnikami zaznajomionymi z nim usprawiedliwiamy przyjęty zapis umową, by w wyrażeniu $\int_\gamma f$ utożsamiać funkcję f z formą $f(z)\mathrm{d}z$.

Uwaga 1. Gdy $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ jest drogą, a f funkcją ciągłą na $\gamma^* = \mathrm{im}(\gamma)$, to

$$\left|\int_\gamma f\right| \leqslant M \cdot \ell(\gamma), \quad \text{gdzie} \quad M \overset{def}{=} \sup_{z\in\gamma^*} |f(z)| = \|f\|_{\gamma*} \ \text{ i } \ \ell(\gamma) \overset{def}{=} \int_a^b |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t. \qquad (5)$$

Istotnie, $|\int_\gamma f| \leqslant \int_a^b |f(\gamma(t))||\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b M|\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t$. Z nierówności (5) będziemy wielokrotnie korzystać, na ogół nie przywołując jej.

Liczbę $\ell(\gamma)$ nazywamy **długością drogi** γ. Podobnie jak niżej w stwierdzeniu 1 dowodzi się, że $\ell(\gamma) = \ell(\gamma \circ \tau)$ dla każdego homeomorfizmu kawałkami gładkiego $\tau : [a',b'] \to [a,b]$.

Wniosek 1. *Gdy ciąg funkcji ciągłych $f_n : U \to \mathbb{C}$ jest niemal jednostajnie zbieżny do funkcji $f : U \to \mathbb{C}$, to $\int_\gamma f_n \to \int_\gamma f$ dla każdej drogi γ w U.*

Dowód. Ustalmy drogę γ. Zbiór $\gamma^* := \mathrm{im}(\gamma)$ jest zwarty, jako ciągły obraz odcinka. Zatem, na podstawie uwagi i założenia, $|\int_\gamma f_n - \int_\gamma f| \le \ell(\gamma)\|f_n - f\|_{\gamma^*} \to 0$. □

Stwierdzenie 1. *Niech $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ i $\lambda : [c,d] \to \mathbb{C}$ będą drogami, a $f : \gamma^* \to \mathbb{C}$ funkcją ciągłą. Wówczas:*

a) Gdy $\tau : [c,d] \to [a,b]$ jest kawałkami gładkim homeomorfizmem, to $\int_{\gamma\circ\tau} f = \varepsilon \cdot \int_\gamma f$, gdzie $\varepsilon = 1$ gdy homeomorfizm τ jest rosnący, zaś $\varepsilon = -1$ gdy jest malejący.

b) Jeśli $\gamma^* = \lambda^*$ i obie drogi γ i λ są różnowartościowe, to $\lambda(c) = \gamma(a)$ i $\int_\lambda f = \int_\gamma f$, albo też $\lambda(c) = \gamma(b)$ i $\int_\lambda f = -\int_\gamma f$.

Dowód. Ad a). $\int_{\gamma\circ\tau} f = \int_c^d f(\gamma\circ\tau(t))(\gamma\circ\tau)'(t)\,\mathrm{d}t = \int_c^d f(\gamma(\tau(t)))\gamma'(\tau(t))\tau'(t)\,\mathrm{d}t$, zaś podstawienie $\tau(t) = s$ pokazuje, że ostatnia całka jest równa $\varepsilon \cdot \int_a^b f(\gamma(s))\gamma'(s)\,\mathrm{d}s$.

Ad b). Niech $\tau := \gamma^{-1} \circ \lambda$. Jest to kawałkami gładki homeomorfizm odcinka $[c,d]$ na $[a,b]$. Jeśli jest on rosnący, to $\tau(c) = a$, a jeśli malejący, to $\tau(c) = b$. Ponieważ $\lambda = \gamma \circ \tau$, więc teza wynika z a). □

Zadanie 1. a) Dla gładkiej fukcji $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ i $p,q,t_0 \in [a,b]$ dowieść, że $|\gamma(p) - \gamma(q)| \le |p-q| \cdot \sup_{t\in[p,q]}|\gamma'(t|$ i $|\gamma(p) - \gamma(q) - \gamma'(t_0)(p-q)| \le |p-q| \cdot \sup_{t\in[p,q]}|\gamma'(t) - \gamma'(t_0)|$. (Wskazówka: nierówność (5), zastosowana do γ'; drugą nierówność uzyskać z pierwszej, odniesionej do funkcji $z \mapsto \gamma(z) - \gamma'(t_0)(t-t_0)$.)

b) Wywnioskować, że $|\gamma(p) - \gamma(q)| \ge |p-q|\big(|\gamma'(t_0)| - \sup_{t\in[p,q]}|\gamma'(t) - \gamma'(t_0)|\big)$, skąd jeśli $\gamma'(t) \ne 0\, \forall t \in [a,b]$, to dla pewnego $\delta > 0$ funkcja γ jest różnowartościowa na każdym przedziale $[t_1,t_2] \subset [a,b]$ takim, że $t_2 - t_1 < \delta$.

c) Dowieść, że gdy $f \in H(U)$ i $[p,q] \subset U$, to $|f(p) - f(q)| \le |p-q| \cdot \sup_{z\in[p,q]}|f'(z|$, skąd $|f(p) - f(q) - f'(z_0)(p-q)| \le |p-q| \cdot \sup_{z\in[p,q]}|f'(z) - f'(z_0)|$ dla $z_0 \in U$.

Zadanie 2. * Niech zbiory $U, W \subset \mathbb{C}$ będą otwarte, zaś $[a,b]$ będzie przedziałem w $\mathbb{R}$.
i) Dowieść, że gdy funkcja $h : U \times [a,b] \to \mathbb{C}$ jest ciągła, to $U \ni z \mapsto \int_a^b h(z,t)\,\mathrm{d}t$ też.
ii) Dowieść, że gdy $\gamma : [a,b] \to W$ jest drogą, zaś funkcja $f : U \times W \to \mathbb{C}$ ma w każdym punkcie $(z_0,w_0) \in U \times W$ pochodną cząstkową $\frac{\partial f}{\partial z}(z_0,w_0)$, zależną w sposób ciągły

od pary (z_0, w_0), to funkcja $F(z) = \int_\gamma f(z,w)\mathrm{d}w$ jest holomorficzna w U oraz $F'(z_0) = \int_\gamma \frac{\partial f}{\partial z}(z_0,w)\,\mathrm{d}w$ dla $z_0 \in U$. (Wskazówka: zastosować i) do funkcji $h(z,t) = g(z,\gamma(t))\gamma'(t)$, gdzie $g(z,w) = (f(z,w) - f(z_0,w))/(z - z_0)$ gdy $z \neq z_0$ i $g(z_0,w) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0,w)$.)

Uwaga: Można dowieść, że jeśli funkcja $\frac{\partial f}{\partial z}$ jest określona na $U \times W$, to jest ciągła.

2 Drogi a kontury

Podkreślmy, że nazwy „droga" i „ścieżka" są mylące. Nie oznaczają one bowiem podzbioru płaszczyzny, lecz coś, co potocznie nazwalibyśmy „harmonogramem przejazdu", przekazującym informację tak o odwiedzanych punktach płaszczyzny (tworzących obraz ścieżki), jak i o chwilach, w których się w każdym z tych punktów znajdziemy. W szczególności, „drogi" –jak została przez nas zdefinowana– nie możemy, w odróżnieniu od jej obrazu, narysować na płaszczyźnie. Określimy teraz „kontury", o których informację można przekazać rysunkiem.

Definicja. a) **Łuk kawałkami gładki** to obraz różnowartościowej drogi. Gdy droga jest gładka, łuk też nazwiemy **gładkim**. Łuk L ma dwa **krańce** – punkty $x \in L$ takie, że zbiór $L \setminus \{x\}$ jest spójny. Łuk jest **zorientowany**, gdy jeden jego kraniec nazwano **początkiem**, a drugi **końcem**. **Zmiana orientacji** takiego łuku polega na zamianie początku z końcem.

b) **Konturem** nazwiemy taki ciąg $\Lambda = (L_1, ..., L_n)$ zorientowanych łuków kawałkami gładkich, że koniec L_j jest początkiem L_{j+1}, dla $j = 1, ..., n-1$. Jego **parametryzacją** jest każda droga $\lambda : [a,b] \to \mathbb{C}$ taka, że dla pewnych $t_0 = a < t_1 ... < t_n = b$ i $j = 1, ..., n$, droga $\lambda_{|[t_{j-1},t_j]}$ różnowartościowo przeprowadza $[t_{j-1}, t_j]$ na łuk L_j, a t_{j-1} na jego początek. Początek łuku L_1 i koniec łuku L_n to, odpowiednio, **początek** i **koniec** konturu Λ. Kontur jest **zamknięty**, gdy jego początek jest równy końcowi. **Kontur prosty** (lub: **zwykły**) to taki, którego pewna parametryzacja $\lambda : [a,b] \to \mathbb{C}$ jest różnowartościowa na $[a,b)$ i na $(a,b]$.

Zauważmy, że niezależne od wyboru parametryzacji λ konturu Λ są:

- obraz $\mathrm{im}(\lambda)$ tej parametryzacji, który oznaczymy Λ^*, oraz
- całka $\int_\lambda f$ danej funkcji ciągłej $f : \Lambda^* \to \mathbb{C}$, którą to całkę oznaczymy $\int_\Lambda f$.

Nazywamy je **nośnikiem** konturu Λ i **całką funkcji** f **wzdłuż konturu** Λ, odpowiednio. Ponadto, przy powyższych oznaczeniach jest $\int_\Lambda f = \sum_j \int_{L_j} f$. (Niezależności wystarczy dowieść dla każdego z łuków L_j, gdzie wynika ona ze stwierdzenia 1b) w §1 – jak?)

Okazuje się, że każda droga $\lambda : [a,b] \to \mathbb{C}$ wyznacza pewien kontur, tzn. można $[a,b]$ podzielić na odcinki punktami $a = t_0 < \cdots < t_n = b$ tak, by droga λ była różnowartościowa na $[t_{i-1}, t_i]$, dla $i = 1, ..., n$. Wynika to łatwo z zadania 1 b) w §1 – z którego jednak nigdy nie skorzystamy, bo podział będzie dany warunkami rozważanych zagadnień. Informację o całkowaniu wzdłuż drogi można więc przekazać *rysując* wszystkie łuki L_j pewnego konturu $\Lambda = (L_j)_{j=1}^n$ i opatrując je strzałkami, wskazującymi kierunek wzrostu parametru $t \in [a,b]$. Gdy kontur Λ jest prosty, wystarczy wskazać tylko zbiór Λ^* i orientację dowolnego łuku $L \subset \Lambda^*$, zgodną z orientacją konturu Λ. (Co to znaczy i dlaczego tak jest?)

Uwaga 1. (i defincje). Dla konturu $\Lambda = (L_1, ..., L_n)$ możemy utworzyć **kontur przeciwny** $\Lambda^{\leftarrow} := (K_1, ..., K_n)$, gdzie K_j oznacza łuk, powstały z L_{n-j+1} przez zmianę orientacji. Gdy dany jest inny jeszcze kontur Λ_1, którego początkiem jest koniec konturu Λ, to można utworzyć **konkatenację** (lub: **zlepienie**) konturów Λ i Λ_1, którą oznaczymy $\Lambda\#\Lambda_1$: jest to kontur, powstały przez wypisanie kolejno wpierw łuków konturu Λ, a następnie konturu Λ_1. Jest widoczne, patrz stwierdzenie 1b) w §1, że gdy funkcje f i g są ciągłe na Λ^* i na $\Lambda^* \cup \Lambda_1^*$, odpowiednio, to

$$\int_{\Lambda^{\leftarrow}} f = -\int_{\Lambda} f, \qquad \int_{\Lambda\#\Lambda_1} g = \int_{\Lambda} g + \int_{\Lambda_1} g$$

Przykład. a) Niech $z_1, z_2, ..., z_n \in \mathbb{C}$. Przez $[z_1, z_2]$ oznaczymy drogę $[0, 1] \ni t \mapsto tz_2 + (1-t)z_1$, a także jej obraz. Ogólniej, przez $[z_1, ..., z_n]$ oznaczymy tak kontur $([z_1, z_2], ..., [z_{n-1}, z_n])$, jak i jego nośnik; i jedno, i drugie nazywamy **łamaną** o kolejnych wierzchołkach $z_1, ..., z_n$. Oczywiście, całka po tej łamanej jest równa sumie całek po $[z_i, z_{i+1}]$.

b) W szczególności, gdy $\triangle$ jest pełnym trójkątem (tzn. $\triangle = \{t_1a + t_2b + t_3c : t_1, t_2, t_3 \geq 0 \text{ i } t_1 + t_2 + t_3 = 1\}$ dla pewnych $a, b, c \in \mathbb{C}$), to przez $\partial\triangle$ oznaczymy łamaną $[a, b, c, a]$, gdzie wierzchołki a, b, c są wzięte w takiej kolejności, by obieg brzegu $\partial\triangle$ był „przeciwny do ruchu wskazówek zegara". Definicja ta ma sens poza przypadkiem, gdy trójkąt $\triangle$ jest zdegenerowany (tzn. jego wierzchołki leżą na prostej) – a wtedy kolejność wierzchołków obieramy dowolnie. Opisaną orientację pętli $\partial\triangle$ nazywamy **dodatnią**.

c) Przez brzeg dysku $D = D(z_0, r)$ rozumiemy kontur $\partial D = \{z : |z - z_0| = r\}$, zorientowany tak, by jego obieg był przeciwny do ruchu wskazówek zegara. Orientacja ta jest zgodna z parametryzacją $[0, 2\pi] \ni t \mapsto z_0 + re^{it}$, skąd $\int_{\partial D} f = \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) ire^{it}\, dt$. W szczególności, $\int_{\partial D} \frac{1}{z-z_0}\, dz = 2\pi i$.

d) Należy jednak wyjaśnić, kiedy to orientacja $\partial\triangle$ czy ∂D jest dodatnia, czyli „wyznacza obieg, przeciwny do ruchu wskazówek zegara". W obu przypadkach, gdy $X = \triangle$ i $X = D$, obierzmy we wnętrzu zbioru X punkt p. Żądaną orientację wyznacza każdy łuk $K \subset \partial X$, którego początkiem jest punkt przecięcia ∂X z półprostą $\operatorname{Im} z = \operatorname{Im} p, \operatorname{Re} z > \operatorname{Re} p$, i który leży w półpłaszczyźnie $\operatorname{Im} z > \operatorname{Im} p$. □

Uwaga 2. Dociekliwy czytelnik zauważy, że uzasadnienia wymaga niezależność ostatniej definicji od wyboru punktu $p \in X$. Możliwość zgodnego wyboru dodatniej orientacji krzywych Jordana jest dość subtelną własnością płaszczyzny $\mathbb{C}$; wrócimy do tego w §VIII.7 *. Własność tę mają też niektóre inne powierzchnie, w tym sfera; jednak wstęga Möbiusa jej nie ma, podobnie jak płaszczyzna rzutowa czy butelka Kleina. ⊟

3 Całka po drodze a funkcja pierwotna

Definicja. Niech $F, f : U \to \mathbb{C}$, gdzie zbiór U jest otwarty w $\mathbb{C}$. Powiemy, że F jest **funkcją pierwotną** funkcji f, jeśli w każdym punkcie $z \in U$ pochodna $F'(z)$ istnieje i jest równa $f(z)$.

Stwierdzenie 1. *Gdy F jest funkcją pierwotną funkcji ciągłej $f : U \to \mathbb{C}$, to*

$$\int_\gamma f = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) \quad \textit{dla każdej drogi } \gamma : [a,b] \to U.$$

Dowód. $\int_\gamma f = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b (F\circ\gamma)'(t)\,\mathrm{d}t = (F\circ\gamma)(b) - (F\circ\gamma)(a)$. □

Przykład. Gdy f jest wielomianem, to f ma w $\mathbb{C}$ funkcję pierwotną, skąd $\int_\gamma f = 0$ dla każdej drogi zamkniętej γ w $\mathbb{C}$. Przy $\mathbb{C}$ zastąpionym przez $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ jest tak i dla $f(z) = 1/z^n$ i $n \geq 2$, z tym samym uzasadnieniem. Natomiast $\int_\gamma \frac{1}{z}\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}$ dla $\gamma = \partial D(0,1)$, wobec czego $1/z$ nie ma w funkcji pierwotnej w żadnym zbiorze, zawierającym okrąg $|z| = 1$. □

Twierdzenie 1. *Niech U będzie zbiorem otwartym w $\mathbb{C}$ i niech funkcja $f : U \to \mathbb{C}$ będzie ciągła. Wówczas równoważne są warunki:*
a) Istnieje funkcja pierwotna funkcji f,
b) $\int_\gamma f = 0$ dla każdej zamkniętej drogi γ w U.

Uwaga 1. Warunek b) jest równoważny następującemu (dlaczego?):
b') Dla każdej drogi $\gamma : [a,b] \to U$, całka $\int_\gamma f$ zależy tylko od $\gamma(a)$ i $\gamma(b)$.

W dowodzie twierdzenia wykorzystamy zadanie, omawiane na zajęciach z Topologii:

Zadanie 1. Składowa zbioru otwartego $U \subset \mathbb{C}$ jest zbiorem otwartym, a każde dwa jej punkty można połączyć łamaną, leżącą w U.

Dowód twierdzenia. Implikacja a)⇒b) wynika ze stwierdzenia 1, bo $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Przypuśćmy teraz, że zachodzi b); skonstruujemy funkcję pierwotną F funkcji f. Możemy zakładać, że zbiór U jest spójny (bo skoro jego składowe są otwarte w $\mathbb{C}$, to F wystarczy zbudować na każdej z nich). Ustalmy $z_0 \in U$. Z zadania wynika, że każdemu punktowi $z \in U$ możemy przyporządkować drogę $\gamma_z : [0,1] \to U$, łączącą z_0 z z. Przyjmujemy

$$F(z) = \int_{\gamma_z} f \quad \text{dla } z \in U.$$

By dowieść, że $F' = f$ ustalmy punkt w i dysk $D(w,r)$ tak mały, by $D(w,r) \subset U$. Dla $u \in D(w,r)$ zachodzi $[w,u] \subset D(w,r) \subset U$, wobec czego droga zamknięta $\lambda \overset{def}{=} \gamma_w \# [w,u] \# \overleftarrow{\gamma_u}$ przyjmuje wartości w U. Z b) otrzymujemy więc $0 = \int_\lambda f = \int_{\gamma_w} f + \int_{[w,u]} f - \int_{\gamma_u} f$, co wraz z deficją funkcji F daje

$$F(u) - F(w) = \int_{[w,u]} f \tag{*}$$

Stąd $|\frac{F(u)-F(w)}{u-w} - f(w)| = |\frac{1}{u-w}\int_{[w,u]}(f(z) - f(w))\mathrm{d}z|$. Wraz z nierównością (5) z §1 i równością $\ell([w,u]) = |u-w|$ daje to $|\frac{F(u)-F(w)}{u-w} - f(w)| \leq \sup_{p\in[w,u]} |f(p) - f(w)|$. A że dla $p \in [w,u]$ jest $|p-w| \leq |u-w|$ i funkcja f jest ciągła w w, to $\lim_{u\to w} \frac{F(u)-F(w)}{u-w} = f(w)$. □

Podobne jest następujące

Twierdzenie 2. *Niech otwarty zbiór $U \subset \mathbb{C}$ będzie* **gwiaździsty***, tzn. niech istnieje punkt $z_0 \in U$ taki, że $[z_0, z] \subset U$ dla $z \in U$. Jeśli ciągła funkcja $f : U \to \mathbb{C}$ spełnia warunek*

$$\int_{\partial\triangle} f = 0 \quad \textit{dla każdego pełnego trójkąta } \triangle \subset U, \tag{6}$$

to f ma funkcję pierwotną.

Dowód. Dla $z \in U$ przyjmijmy $\gamma_z = [z_0, z]$ oraz $F(z) = \int_{\gamma_z} f$. Z założenia, droga γ_z przyjmuje wartości w U. Ponadto powyższy dowód równości $F' = f$ pozostaje słuszny, bo z (6) wynika prawdziwość (*) (wraz z uzasadnieniem). ⊟

Funkcja pierwotna wiąże się z następującym zagadnieniem. Niech U będzie obszarem w $\mathbb{C}$, a funkcja $u : U \to \mathbb{R}$ będzie harmoniczna. Pytamy: kiedy istnieje funkcja holomorficzna $f : U \to \mathbb{C}$, której u jest częścią rzeczywistą?

Twierdzenie 3. *Jeśli funkcja taka istnieje, to jest ona funkcją pierwotną dla $u_x - \mathrm{i}u_y$, więc jest wyznaczona jednoznacznie z dokładnością do stałej addytywnej. Odwrotnie, jeśli $f' = u_x - \mathrm{i}u_y$, to $\mathrm{Re}(f + c) = u$ dla pewnej stałej c.*

Dowód. Jeśli $u = \mathrm{Re}\, f$ i $f \in H(U)$, to $f' = u_x - \mathrm{i}u_y$, patrz uwaga 1 w §I.2. Odwrotnie, jeśli $f' = u_x - \mathrm{i}u_y$ i przyjąć $u^1 := \mathrm{Re}\, f$, to otrzymamy też $f' = u^1_x - \mathrm{i}u^1_y$, wobec czego $u^1_x = u_x$ i $u^1_y = u_y$ –skąd ostatecznie $u^1 - u = \mathrm{const}$. (Patrz zadanie 3 w §I.3.) ⊟

Wniosek 1. *Jeśli obszar $U \subset \mathbb{C}$ jest taki, że każda funkcja $f \in H(U)$ ma funkcję pierwotną, to każda funkcja harmoniczna w U jest częścią rzeczywistą funkcji holomorficznej.*

Dowód. Łatwo sprawdzić, że gdy funkcja $u : U \to \mathbb{R}$ jest harmoniczna, to $g := u_x - \mathrm{i}u_y$ spełnia równania Cauchy'ego–Riemanna. Stąd $g \in H(U)$ i teza wynika z twierdzenia 3. ⊟

W §4 okaże się, że obszary gwiaździste mają żądaną we wniosku własność, a w §.... rozszerzymy to na zefiniowane tam obszary jednospójne.

Zadanie 2. Niech funkcja f rozwija się w $D(p, R) \setminus \{p\}$ w szereg Laurenta $\sum_{n=-1}^{\infty} c_n (z-p)^n$ (tzn. taki, ż $c_n = 0$ dla $n \leq -2$). Dla $r \in (0, R)$, niech L_r będzie dodatnio zorientowanym łukiem okręgu $|z - p| = r$, mającym długość $r\alpha$, gdzie α nie zależy od r. Udowodnić, że $\lim_{r \to 0} \int_{L_r} f = \mathrm{i}\alpha c_{-1}$. (Wskazówka: wniosek 1 w §I.6.)

4 Lemat Goursata.

Twierdzenie 1 (Lemat Goursata). *Funkcja f, holomorficzna w U, spełnia warunek (6).*

Dowód. Połowiąc boki trójkąta $\triangle$, podzielmy go na trójkąty $\triangle', \triangle'', \triangle''', \triangle''''$. Wówczas:

$$\int\limits_{\partial\triangle} f = \int\limits_{\partial\triangle'} f + \int\limits_{\partial\triangle''} f + \int\limits_{\partial\triangle'''} f + \int\limits_{\partial\triangle''''} f.$$

Istnieje zatem trójkąt $\triangle_1 \in \{\triangle', \triangle'', \triangle''', \triangle''''\}$ taki, że $\left|\int_{\partial\triangle} f\right| \leqslant 4\left|\int_{\partial\triangle_1} f\right|$. Jest on podobny do trójkąta Δ, w skali 1:2, więc

$$\ell(\partial\triangle_1) = \frac{1}{2}\ell(\partial\triangle), \quad \mathrm{diam}(\triangle_1) = \frac{1}{2}\,\mathrm{diam}(\triangle)$$

Gdy znamy trójkąt $\triangle_n$, to dzielimy go w analogiczny sposób, otrzymując indukcyjnie trójkąty $\triangle \supset \triangle_1 \supset \triangle_2 \supset \ldots$ takie, że

$$\ell(\partial\triangle_n) = \frac{1}{2^n}\ell(\partial\triangle), \quad \mathrm{diam}(\triangle_n) = \frac{1}{2^n}\,\mathrm{diam}(\triangle) \tag{p}$$

oraz

$$\left|\int_{\partial\triangle} f\right| \leqslant 4^n\left|\int_{\partial\triangle_n} f\right| \tag{q}$$

Ponieważ $\triangle_1 \supset \triangle_2 \supset \ldots$, więc na podstawie twierdzenia Cantora istnieje punkt $p \in \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{\triangle_n} \subset U$. Funkcja f, holomorficzna w U, ma pochodną $f'(p$, wobec czego

$$f(z) = g(z) + (z-p)\varepsilon(z), \quad \text{gdzie } g(z) := f(p) + f'(p)(z-p) \ \text{ i } \ \lim_{z\to p}\varepsilon(z) = 0. \tag{r}$$

Dalej, wielomian g ma funkcję pierwotną, skąd na podstawie (r) i stwierdzenia 1 z §3,

$$\left|\int\limits_{\partial\triangle_n} f\right| \leqslant \left|\int\limits_{\partial\triangle_n} g\right| + \left|\int\limits_{\partial\triangle_n} (z-p)\varepsilon(z)\mathrm{d}z\right| \leqslant 0 + \ell(\partial\triangle_n)\cdot \sup_{z\in\partial\triangle_n} |(z-p)\varepsilon(z)| \text{ dla } n \geq 1.$$

A że $|z-p| \leq \mathrm{diam}(\triangle_n)$ dla $z \in \triangle_n$, to korzystając z (p) i (q) otrzymujemy dalej:

$$\left|\int_{\partial\triangle} f\right| \leqslant 4^n \cdot \frac{1}{2^n}\ell(\partial\triangle)\cdot\frac{1}{2^n}\,\mathrm{diam}(\triangle)\cdot \sup_{z\in\partial\triangle_n}|\varepsilon(z)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

gdzie zbieżność wynika z (r) i (p). Tak więc $\int_{\partial\triangle} f = 0$. □

5 Całka po cyklu i wzór całkowy Cauchy'ego.

Prócz konturów, wygodnie jest rozważać cykle i całki po nich.

Definicja. a) **Cyklem** nazywamy wyrażnie $\Gamma_1 + \cdots + \Gamma_k$, gdzie $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k$ są konturami zamkniętymi. (Obejmuje to **cykl zerowy**, który traktujemy jako sumę pustego konturów dróg.) Zbiór $\bigcup_{i=1}^k \Gamma_i^*$ nazywamy **nośnikiem** cyklu $\Gamma := \sum_{n=1}^k \Gamma_n$ i oznaczamy Γ^*. Gdy $\Gamma^* \subset U$, mówimy, że Γ jest cyklem w zbiorze U. Przy tych oznaczeniach, przyjmujemy

$$\int_\Gamma f := \sum_n \int_{\Gamma_n} f$$

dla każdej funkcji f, ciągłej na nośniku Γ^* cyklu Γ.

b) Cykl Γ ma **własność Cauchy'ego w zbiorze** $U \subset \mathbb{C}$, jeśli $\int_\Gamma f = 0$ dla każdej funkcji $f \in H(U)$. (Ta nazwa jest prowizoryczna i nie jest powszechnie stosowana.)

Twierdzenie 1. *a) Funkcja, holomorficzna w zbiorze gwiaździstym, ma funkcję pierwotną.*
b) Każdy cykl w zbiorze gwiaździstym ma w nim własność Cauchy'ego.

Dowód. a) wynika z lematu Goursata i twierdzenia 2 z §3.

b) Niech Γ będzie cyklem w zbiorze gwiaździstym U i niech $f \in H(U)$. Jak wiemy, istnieje funkcja pierwotna dla f, wobec czego $\int_\gamma f = 0$ dla każdej drogi zamkniętej γ w U. Jednak, z definicji, Γ jest sumą skończenie wielu konturów zamkniętych Γ_j; ich parametryzacje γ_j są zaś drogami zamkniętymi w U. Stąd $\int_\Gamma f = \sum_j \int_{\gamma_j} f = 0$. □

W dalszej części potrzebne nam będą tylko poniższe podstawowe przykłady.

Przykład. Niech dyski D_0, D_ε, D spełniają warunek $\overline{D_0} \cup \overline{D_\varepsilon} \subset D$ i $\overline{D_0} \cap \overline{D_\varepsilon} = \emptyset$, przy czym D i D_0 są współśrodkowe. Każdy z okręgów $\partial D_0, \partial D_\varepsilon, \partial D$ zorientujmy dodatnio.

a) Cykl ∂D ma własność Cauchy'ego w kole $\overline{D}$, bo koło to jest zbiorem gwaździstym.

b) Dla kąta otwartego K, o wierzchołku w środku dysku D_ε, utwórzmy **wachlarz** $W := D \cap K \setminus \overline{D_\varepsilon}$. Jego brzeg Bd$W$ jest sumą dwóch łuków J i J_ε, leżących w ∂D i ∂D_ε, odpowiednio, oraz dwóch odcinków K_1 i K_2, leżących na ramionach kąta K. Kontur $J_\varepsilon \# K_1 \# J \# K_2$, zorientowany przez nadanie łukowi J orientacji zgodnej z dodatnim obiegiem okręgu ∂D, oznaczmy przez ∂W i nazwijmy zorientowanym brzegiem wachlarza W. Twierdzimy, że ∂W ma własność Cauchy'ego w $\overline{W}$. Istotnie, niech $f \in H(\overline{W})$; jeśli miara α kąta K jest dostatecznie mała, to zbiór $\overline{W}$ jest gwiaździsty, więc $\int_{\partial W} f = 0$. (Wystarcza do tego, by $\cos\alpha > r/R$, gdzie r to promień dysku D_ε, a R to odległość środka dysku D_ε od okręgu ∂D; gwiaździstość sprawdzamy względem dowolnego punktu $z_0 \in \overline{W} \cap \partial D$.) A dla większych wartości α możemy kąt K podzielić na wiele równych kątów, uzyskując podział wachlarza W na wachlarze $W_1, ..., W_n$ będące zbiorami gwiaździstymi. Stąd $\int_{\partial W} f = \sum_j \int_{\partial W_j} f = \sum_j 0 = 0$.

c) Utwórzmy **dysk z dziurą** $P = D \setminus \overline{D_\varepsilon}$, a za jego zorientowany brzeg przyjmijmy $\partial P := \partial D + \partial D_\varepsilon^{\leftarrow}$. Znów, ∂P ma własność Cauchy'ego w $\overline{P}$ – bo nadal P można jak wyżej podzielić na wachlarze $W_1, ..., W_n$, po czym w końcowej równości całek zmienić ∂W na ∂P. Zauważmy na przyszłość, że skoro dla $f \in H(\overline{P})$ jest $\int_{\partial P} f = 0$, to też $\int_{\partial D} f = \int_{\partial D_\varepsilon} f$.

d) Tym razem utwórzmy **pierścień z dziurą** $Y := D \setminus (\overline{D_0} \cup \overline{D_\varepsilon})$ i za jego zorientowany brzeg przyjmijmy cykl $\partial Y := \partial D + \partial D_0^{\leftarrow} + \partial D_\varepsilon^{\leftarrow}$; twierdzimy, że ∂Y ma własność Cauchy'ego w $\overline{Y}$. Istotnie, gdy ze środka dysku D_0 poprowadzić półproste, z których dwie są styczne do koła D_ε, a trzecia przechodzi przez jego środek, to podzielą one Y na zbiory, oznaczone na rysunku przez $A_0, ..., A_4$. Z nich, A_0 jest wachlarzem, a pozostałe są gwiaździste. (Względem jakich punktów?) Zatem $\int_{\partial Y} f = \sum_{j=0}^4 \int_{\partial A_j} f = \sum_{j=0}^4 0 = 0$ dla $f \in H(\overline{Y})$.

Twierdzenie 2 (Wzór całkowy Cauchy'ego)**.** *Gdy X jest dyskiem lub ograniczonym pierścieniem otwartym*[6] *i $f \in H(\overline{X})$, to*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\partial X} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w \quad \text{dla } z \in X. \tag{7}$$

[6]tzn. $X = D \setminus \overline{D_0}$, gdzie D_0 i D to dyski takie, że $\overline{D_0} \subset D$. Przypomnijmy, że wtedy $\int_{\partial X} = \int_{\partial D} - \int_{\partial D_0}$.

Dowód. Ustalmy punkt $z \in X$ i niech $g(w) \overset{def}{=} \frac{f(w)-f(z)}{w-z}$; zatoczmy też wokół z mały dysk $D_\varepsilon = D(z,\varepsilon)$ i przyjmijmy $Y \overset{def}{=} X \setminus \overline{D_\varepsilon}$. Na podstawie części c) i d) przykładu, cykl ∂Y ma własność Cauchy'ego w $\overline{Y}$, skąd $\int_{\partial Y} g = 0$; a że $\partial Y = \partial X + \partial D_\varepsilon^{\leftarrow}$, to $\int_{\partial X} g - \int_{\partial D_\varepsilon} g = 0$. Tak samo, całka $\int_{\partial X} \frac{1}{w-z}\,\mathrm{d}w$ jest równa $\int_{\partial D_\varepsilon} \frac{1}{w-z}\,\mathrm{d}w$ –a ta jest równa $2\pi\mathrm{i}$.

Zarazem jednak $|\int_{\partial D_\varepsilon} g| \le 2\pi\varepsilon \cdot \sup_{|w-z|=\varepsilon}|g(w)| = 2\pi \sup_{|w-z|=\varepsilon}|g(w)(w-z)|$, przy czym ostatnie wyrażenie dąży do 0 gdy $\varepsilon \to 0$, bo $g(w)(w-z) = f(w)-f(z)$ i $\lim_{w\to z} f(w) = f(z)$. A że $\int_{\partial X} g(w)\,\mathrm{d}w = \int_{\partial D_\varepsilon} g(w)\,\mathrm{d}w$ dla każdego $\varepsilon > 0$, to $\int_{\partial X} g(w)\,\mathrm{d}w = 0$, co wraz z definicją funkcji g daje $\int_{\partial X} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w = f(z)\int_{\partial X}\frac{1}{w-z}\,\mathrm{d}w = f(z)\cdot 2\pi\mathrm{i}$, patrz wyżej. □

Uwaga 1. a) Tym niemniej, $\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\partial D}\frac{f(w)}{w-z}\mathrm{d}w = 0$ dla dowolnego dysku D, funkcji $f \in H(\overline{D})$ i $z \notin \overline{D}$ –co wynika z twierdzenia 1, przy f zastąpionym przez funcję $w \mapsto \frac{f(w)}{w-z}$.

b) Twierdzenie 2 można znacznie uogólnić, patrz uwaga 1 w §IV.3, lecz powyższy przypadek szczególny jest podstawą dowodu dalszych wyników tego i następnego rozdziału.

Zadanie 1. a) Dowieść, że gdy D jest dyskiem i funkcja $h \in H(\mathbb{C} \setminus D)$ spełnia warunek $\lim_{w\to\infty} wh(w) = 0$, to $\int_{\partial D} f = 0$. (Wskazówka: podobnie jak w dowodzie twierdzenia 2, uzasadnić i wykorzystać to, że $\int_{\partial D} f = \int_{\partial D(p,R)} f$, gdzie p jest środkiem dysku D i $R \to \infty$.)

b) Wywnioskować, że gdy wielomiany f i g spełniają warunek $\deg g > \deg f + 1$, to $\int_{\partial D} f/g = 0$ dla każdego dysku D, zawierającego wszystkie zera wielomianu g.

6 Rozwijalność w szeregi Laurenta i Taylora.

Twierdzenie 1 (Laurenta). *Funkcja f, holomorficzna w pierścieniu $P = D(p,R_1)\setminus\overline{D}(p,R_0)$, jest w nim sumą dokładnie jednego szeregu Laurenta $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(z-p)^n$ o środku w p. Dla dowolnego $r \in (R_0,R_1)$, współczynniki c_n są zadane wzorami Cauchy'ego–Laurenta:*

$$c_n = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_{\partial D(p,r)} \frac{f(w)}{(w-p)^{n+1}}\,\mathrm{d}w \qquad (n \in \mathbb{Z}) \tag{8}$$

Dowód. Udowodnimy wpierw, że jeśli $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(z-p)^n$ dla $z \in P$, to zachodzą równości (8). Jak bowiem wiemy z wniosku 1 w §I.6, istnieje w P funkcja pierwotna dla $g(z) = f(z) - \frac{c_{-1}}{z-p}$, skąd $\int_{\partial D(p,r)} g = 0$. A że $\int_{\partial D(p,r)} \frac{c_{-1}}{z-p}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}c_{-1}$, daje to wzór (8) dla $n = -1$. Dla $n \neq -1$, pozostaje ten wzór odnieść do funkcji $z \mapsto f(z)/(z-p)^{n+1}$.

Ustalmy teraz $r \in (R_0,R_1)$ i punkt $q \in P$; udowodnimy, że $f(q) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(q-p)^n$ dla współczynników c_n zadanych wzorami (8). Wobec dowolności r i q, zakończy to dowód.

W tym celu ustalmy liczby $r_0 < r_1$ tak, by pierścień $\overline{X} := \overline{D}(p,r_1) \setminus D(p,r_0)$ był zawarty w P i zawierał $\{q\} \cup \partial D(p,r)$ w swym wnętrzu. Zastosujemy do X wzór Cauchy'ego (7):

$$f(q) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\Big(\int\limits_{\partial D(p,r_1)} \frac{f(w)}{w-q}\,\mathrm{d}w - \int\limits_{\partial D(p,r_0)} \frac{f(w)}{w-q}\,\mathrm{d}w\Big) \tag{$*$}$$

lecz rozwiniemy zarazem funkcję $\frac{1}{w-q}$ w szereg Laurenta: $\frac{1}{w-q} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(q-p)^n}{(w-p)^{n+1}}$ gdy $|w-p| > |q-p|$ i $\frac{1}{w-q} = -\sum_{n<0} \frac{(q-p)^n}{(w-p)^{n+1}}$ gdy $|w-p| < |q-p|$, por. część b) przykładu w §I.6. Szeregi te są zbieżne niemal normowo na wymienionych zbiorach; a że $r_0 < |q-p| < r_1$, to możemy w pierwszej całce w (*) zastąpić $\frac{f(w)}{w-q}$ przez $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(w)(q-p)^n}{(w-p)^{n+1}}$, a w drugiej – przez $-\sum_{n<0} \frac{f(w)(q-p)^n}{(w-p)^{n+1}}$, po czym przejść z całką pod znak sumy, korzystając z wniosku 1 w §III.1. (Gra też rolę to, że $||f||_{\overline{X}} < \infty$.) Otrzymamy równość $f(q) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} d_n(q-p)^n$, gdzie

$$d_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\partial D(p,r_1)} \frac{f(w)}{(w-p)^{n+1}}\,\mathrm{d}w \text{ dla } n \geq 0 \text{ i } d_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\partial D(p,r_0)} \frac{f(w)}{(w-p)^{n+1}}\,\mathrm{d}w \text{ dla } n < 0.$$

Na koniec, $d_n = c_n$ dla $n \geq 0$ na podstawie części c) Przykładu z §5, bo funkcja $\frac{f(w)}{(w-p)^{n+1}}$ jest holomorficzna w $\overline{D}(p, r_1) \setminus D(p, r)$. Tak samo, $d_n = c_n$ dla $n < 0$, co kończy dowód.

Uwaga 1. Ze wzorów (8) i uwagi 1 w §1 wynikają **nierówności Cauchy'ego–Laurenta**:

$$|c_n| \leq \frac{1}{r^n} \|f\|_{\partial D(p,r)} \quad \text{dla } n \in \mathbb{Z} \text{ i } r \in (R_0, R_1) \tag{9}$$

Twierdzenie 2 (O rozwijaniu w szereg potęgowy). *Funkcja f, holomorficzna w dysku $D(p, R)$, rozwija się w nim w szereg potęgowy $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-p)^n$. Współczynniki c_n są przez f wyznaczone wzorami Cauchy'ego (wzór pierwszy) i Taylora (drugi, patrz §I.4):*

$$c_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial D(p,r)} \frac{f(w)}{(w-p)^{n+1}}\,\mathrm{d}w = \frac{1}{n!} f^{(n)}(p) \qquad \text{dla } n = 0, 1, \ldots \text{ i } r \in (0, R) \tag{10}$$

Dowód. Wobec twierdzenia 1, dla $z \in D(p, R) \setminus \{p\}$ jest $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(z-p)^n$, gdzie c_n są dane wzorami (8), dla $r \in (0, R)$. Jednak $c_n = 0$ dla $n < 0$ na podstawie uwagi 1, bo funkcja f jest ograniczona na pewnym otoczeniu punktu p i $\lim_{r\to 0} 1/r^n = 0$ dla $n < 0$. A że szereg $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-p)^n$ przedstawia funkcję ciągłą w p (bo jest zbieżny, do $f(z)$, dla pewnych $z \neq p$), to równość $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-p)^n$ zachodzi i dla $z = p$. □

Wniosek 1. *Funkcja, holomorficzna w zbiorze otwartym $U \subset \mathbb{C}$, jest w nim analityczna. Co więcej, wokół każdego punktu $p \in U$ rozwija się ona w szereg Taylora na dysku $D(p, R)$ o promieniu $R := \mathrm{dist}(p, \mathbb{C} \setminus U)$.*

Dowód. $D(p, R) \subset U$, więc stosuje się twierdzenie 2. □

Zadanie 1. a) Dla funkcji f, holomorficznej w kole $\overline{D}(z_0, r)$, zachodzi równość Gaussa o wartości średniej: $f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})\mathrm{d}t$.

b) Tak samo jest dla rzeczywistej funkcji u, harmonicznej w $\overline{D}(z_0, r)$. (Wskazówka: $u = \mathrm{Re}\, f$ dla pewnej funkcji $f \in H(\overline{D})$, na podstawie wniosku 1 w §3 i twierdzenia 1a) w §5.)

IV Twierdzenie o residuach i zastosowania.

1 Rola współczynników szeregu Laurenta. Twierdzenie o residuach.

Definicja. Powiemy, że podzbiór V sfery Riemanna $\widetilde{\mathbb{C}}$ jest **nakłutym otoczeniem** punktu $p \in \widetilde{\mathbb{C}}$, jeśli $V \cup \{p\}$ jest otoczeniem tego punktu w $\widetilde{\mathbb{C}}$. (Może więc, ale nie musi zachodzić $p \in V$.) Gdy $p \in \mathbb{C}$ oznacza to istnienie liczby $r > 0$ takiej, że $D(p,r) \setminus \{p\} \subset V$, zaś gdy $p = \infty$ – istnienie liczby $r > 0$ takiej, że $\{z \in \mathbb{C} : |z| > r\} \subset V$.

Niech $f \in H(V)$, gdzie V jest nakłutym otoczeniem punktu $p \neq \infty$. Dla pewnego $R > 0$, pierścień $D(p,R) \setminus \{p\}$ jest wtedy zawarty w V, więc funkcję f można w nim rozwinąć w szereg Laurenta $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(z-p)^n$. Ze względu na wzory Cauchy'ego–Laurenta, współczynniki c_n nie zależą od R.

Definicja. Powyższy szereg nazywamy **szeregiem Laurenta funkcji f, o środku w** p. Sumę $\sum_{n<0} c_n(z-p)^n$ jego części głównej oznaczamy $G_p f$. Natomiast współczynnik c_{-1} nazywany jest **residuum funkcji f w punkcie** p i oznaczany $\mathrm{res}_p f$ lub $\mathrm{res}_{z=p} f(z)$. Znaczenie residuum uwidacznia wniosek 1 w §I.6, zaś znaczenie funkcji $G_p f$ – poniższa uwaga:

Uwaga 1. i) Funkcja $G_p f$ jest określona i holomorficzna w całej płaszczyźnie nakłutej $\mathbb{C} \setminus \{p\}$. (Wynika to z twierdzenia 1 w §I.6.)

ii) Funkcja $f - G_p f_{|V}$ przedłuża się do funkcji, holomorficznej w zbiorze otwartym $V \cup \{p\}$. Dla $z \in D(p,R)$ określimy ją wzorem $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-p)^n$; da to szukane przedłużenie, bo funkcje g i $f - G_p f_{|V}$ są równe na $D(p,R) \setminus \{p\}$ i obie są holomorficzne.

iii) Funkcje f i $G_p f$ mają w punkcie p to samo residuum, którym jest c_{-1}. $\square$

Możemy teraz sformułować centralne twierdzenie tego rozdziału:

Twierdzenie 1 (Cauchy'ego o residuach)**.** *Niech funkcja f będzie holomorficzna w zbiorze $U \subset \mathbb{C}$ poza zbiorem skończonym $S \subset \mathrm{int}\, U$ (tzn., $f \in H(U \setminus S)$), a Γ niech będzie cyklem w U, leżącym w $U \setminus S$ i mającym własność Cauchy'ego w U (czyli takim, że $\int_\Gamma h = 0$ dla każdej funkcji $h \in H(U)$). Wówczas*

$$\int_\Gamma f = 2\pi \mathrm{i} \cdot \sum_{p\in S} (\mathrm{res}_p f) \cdot \mathrm{ind}(\Gamma, p) \tag{1}$$

gdzie $\mathrm{ind}(\Gamma,p)$ *oznacza* **indeks cyklu Γ względem punktu** $p \notin \Gamma^*$*, zdefiniowany wzorem*

$$\mathrm{ind}(\Gamma,p) := \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma \frac{1}{w-p}\, \mathrm{d}w \tag{2}$$

W dowodzie wykorzystamy następujący lemat:

Lemat 1. *Przy oznaczeniach twierdzenia,*

a) Dla każdego punktu $p \in S$ ma miejsce równość $\int_\Gamma G_p f = 2\pi\mathrm{i} \cdot \mathrm{res}_p f \cdot \mathrm{ind}(\Gamma, p)$.

b) Funkcję $h := f - \sum_{p\in S} G_p f_{|U}$ można przedłużyć do funkcji, holomorficznej w U.

Dowód. Ad a). Niech $G_p f(z) = \sum_{n<0} c_n (z-p)^n = \frac{c_{-1}}{z-p} + g(z)$, gdzie $g(z) := \sum_{n\neq -1} c_n (z-p)^n$. Wówczas g ma funkcję pierwotną w $\mathbb{C} \setminus \{p\}$, por. wniosek 1 w §I.6, wobec czego $\int_\Gamma g = 0$, a więc i $\int_\Gamma G_p f \ = \int_\Gamma \frac{c_{-1}}{w-p}\,\mathrm{d}w = 2\pi\mathrm{i} \cdot \mathrm{res}_p f \cdot \mathrm{ind}(\Gamma, p)$.

Ad b) Poniżej, pomijamy już znaki obcięcia $_{|U}$ przy $G_p f_{|U}$. Dla danego punktu $p \in S$ zapiszmy h tak: $h = (f - G_p f) - \sum_{q\in S\setminus\{p\}} G_q f$. Jak wiemy z uwagi 1ii), funkcja $f - G_p f$ holomorficznie przedłuża się na punkt p, zaś funkcje $G_q f$ są w jego otoczeniu holomorficzne. Zatem i funkcja h holomorficznie przedłuża się na (dowolny) punkt $p \in S$. □

Dowód twierdzenia. Ponieważ funkcja $h := f - \sum_{p\in S} G_p f$ jest holomorficzna w U (czy ściślej: przedłuża się do takiej, patrz wyżej), więc $\int_\Gamma h = 0$ z założeń twierdzenia. Wobec tego $\int_\Gamma f = \sum_{p\in S} \int_\Gamma G_p f$ i teza wynika z części a) lematu. □

Uwaga 2. Założenia, dotyczące zbioru S, można nieco osłabić, patrz zadanie .... w §....

2 Przypadek zbiorów regularnych.

Zastosowania twierdzenia o residuach uzależnione są od umiejętności wyliczenia residuum oraz od zrozumienia tego, czym jest indeks $\mathrm{ind}(\Gamma, p)$. Dalszy nasz plan jest taki, by w tym paragrafie sformułować bez dowodu najprostsze własności indeksu i odnotować znaczenie równości (1) w szczególnie ważnym przypadku szczególnym, w następnym wskazać sposoby wyznaczania residuum, a w kolejnym ściśle uzasadnić własności indeksu.

Zasadniczą własnością indeksu jest to, że gdy Γ jest konturem zamkniętym i $p \notin \Gamma^*$, to $\mathrm{ind}(\Gamma, p)$ jest liczbą całkowitą, określającą ile razy kontur Γ okrąża punkt p. Własność ta, którą udowodnimy w §4, często umożliwia natychmiastowe wyznaczenie indeksu.

Przykład. Niech Z będzie jednym ze zbiorów, rozpatrywanych w przykładzie z §III.5. Niech dalej Γ oznacza zorientowany brzeg zbioru Z, określony w tamtym przykładzie. Twierdzimy, że $\mathrm{ind}(\Gamma, p) = 1$ dla $p \in Z$. Istotnie, gdy Z jest dyskiem lub wachlarzem, wynika to bezpośrednio z powyższej interpretacji. Gdy zaś $Z = D \setminus \overline{D_\varepsilon}$ jest dyskiem z dziurą, to $\partial Z = \partial D + \partial D_\varepsilon^{\leftarrow}$, przy czym ∂D okrąża p jednokrotnie, a ∂D_ε – zerokrotnie. Podobnie jest, gdy Z jest pierścieniem z dziurą.

Zbiory omówione wyżej są szczególnymi przypadkami *zbiorów regularnych*:

Definicja. Ograniczony zbiór $U \subset \mathbb{C}$ nazwiemy **regularnym**,[7] jeśli istnieje cykl $\Gamma = \sum_i \Gamma_i$ taki, że:

[7]Obie użyte tu nazwy: „zbiór regularny” i „własność Cauchy'ego”, są prowizoryczne i nie są powszechnie używane.

i) Γ_i są zamkniętymi konturami prostymi, ich nośniki Γ_i^* są parami rozłączne, a nośnik Γ^* cyklu Γ jest brzegiem (topologicznym) zbioru U w $\mathbb{C}$;

ii) cykl Γ ma własność Cauchy'ego w $\overline{U}$, tzn. $\int_\Gamma f = 0$ dla każdej funkcji $f \in H(\overline{U})$;

iii) $\mathrm{ind}(p, \Gamma) = 1$ dla wszystkich $p \in \mathrm{int}U$.

Cykl Γ nazwiemy **zorientowanym brzegiem** zbioru regularnego U i oznaczymy przez ∂U.

Zauważmy, że gdy U i Γ są jak wyżej, to $\mathrm{ind}(\Gamma, p) = 0$ dla $p \in \mathbb{C} \setminus \overline{U}$ – bo ii) stosuje się do funkcji $1/(z-p)$. Okazuje się, że ii) można pominąć, a nawet sam warunek i), przy odpowiedniej orientacji składowych Γ_i, pociąga za sobą ii) oraz iii). Taki opis zbiorów regularnych, a także pełną charakteryzację cykli z własnością Cauchy'ego, podamy w materiale uzupełniającym w rozdziale VII. Dla dalszej części wystarczająca jednak będzie

Uwaga 1. Dysk, wachlarz, dysk z dziurą i pierścień z dziurą są zbiorami regularnymi. (Uzasadnienie dane jest w przykładach z tego paragrafu i z §III.5.) Również każdy wielokąt wypukły jest zbiorem regularnym, podobnie jak wycinek koła –dowód jest taki, jak dla dysku.

Uwaga 2. Twierdzenie o residuach będzie szczególnie często wykorzystywane, gdy U jest zwartym zbiorem regularnym, a ∂U jego zorientowanym brzegiem. W tym przypadku $\mathrm{ind}(\Gamma, p) = 1$ dla $p \in \mathrm{Int}(U)$, wobec czego wzór (1) przybiera postać

$$\int_{\partial U} f = 2\pi \mathrm{i} \cdot \sum_{p \in S} \mathrm{res}_p f \quad (\text{nadal, } f \in H(U \setminus S) \text{ i zbiór } S \subset \mathrm{Int}(U) \text{ jest skończony}). \tag{3}$$

3 „Uogólnione zera" i ich krotności. Wyznaczanie residuów.

Oznaczenie. Nadal, $f \in H(V)$ i V jest nakłutym otoczeniem punktu p. Mówimy wtedy, że f ma w p **osobliwość izolowaną**. Rozwińmy f wokół p w szereg Laurenta $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(z-p)^n$ i przyjmjmy

$$k(p) := \inf\{i \in \mathbb{Z} : c_i \neq 0\}$$

Czasem będziemy pisać $k_f(p)$ zamiast $k(p)$, by uwidocznić zależność od funkcji f.

Może się zdarzyć, że $k(p) = -\infty$; jednak $k(p) = \infty$ tylko gdy f jest funkcją zerową na pewnym nakłutym otoczeniu punktu p.

Definicja. W zależności od wartości $k = k_f(p)$, osobliwość funkcji f w p nazwiemy

istotną, gdy $k = -\infty$ (tzn., część główna $\sum_{n<0} c_n(z-p)^n$ ma nieskończenie wiele składników niezerowych);

usuwalną (inaczej: **pozorną**), gdy $k \geq 0$ (tzn., część główna jest szeregiem zerowym);

biegunem, gdy $k < 0$, lecz $k \neq -\infty$; liczbę $|k|$ nazywamy **rzędem** tego bieguna. (Wówczas część główna jest wielomianem od $\frac{1}{z-p}$, stopnia $|k| > 0$.)

Gdy $k \neq \pm\infty$, to powiemy też, że p jest **uogólnionym zerem k-krotnym** funkcji f. [8]

[8]Nazwa ta nie jest ogólnie przyjęta. Motywuję ją wnioskiem 1, z którego wynika, że przy $k > 0$ można p uważać za „prawdziwe" zero krotności k. Natomiast nazwę „osobliwość usuwalna" wyjaśnia lemat 1b).

Lemat 1. *a) Warunek $k_f(p) = n$ jest równoważny temu, by funkcja $V \ni z \mapsto f(z)/(z-p)^n$ przedłużała się do funkcji $g \in H(V \cup \{p\})$ takiej, że $g(p) \neq 0$.*

b) Osobliwość w punkcie p jest pozorna (tzn.$k_f(p) \geq 0$) wtedy i tylko wtedy, gdy f przedłuża się do funkcji $g \in H(V \cup \{p\})$.

c) (N) Gdy $k_f(p) \geq 0$, to przy oznaczeniach z b) zachodzi $k_f(p) = \inf\{n : g^{(n)}(p) \neq 0\}$.

Dowód. Tak w a), jak w b), implikacja $\Longrightarrow$ wynika łatwo z definicji liczby $k_f(p)$ (por. uwaga 1ii) w §1), zaś odwrotna – z możliwości rozwinięcia g w szereg Taylora wokół p. Natomiast c) wynika ze wzorów Taylora. ⊟

Wniosek 1. *Gdy p jest uogólnionym zerem funkcji f i g, krotności k i l, odpowiednio, to jest uogólnionym zerem funkcji $f \cdot g$ i f/g, krotności $k+l$ i $k-l$, odpowiednio.* ⊟

Przykład 1. Funkcja $f(z) = (z - \pi/2)/(\sin z - 1)^2$ ma osobliwości izolowane w punktach $p_n = 2\pi n + \pi/2$. W p_n, pierwsza pochodna funkcji $\sin z - 1$ zeruje się, a druga – nie, skąd p_n jest zerem dwukrotnym tej funkcji, a czterokrotnym funkcji $(\sin z - 1)^2$. Zarazem p_n jest zerem zerokrotnym funkcji $z - \pi/2$ gdy $n \neq 0$, a jednokrotnym gdy $n = 0$. Wynika stąd, że f ma w punkcie $p_0 = \pi/2$ biegun rzędu trzy, a w punkcie p_n dla $n \neq 0$ – rzędu cztery. □

Wyznaczanie residuum (przykłady).

a) Oczywiście $\mathrm{res}_p(f_1 + f_2) = \mathrm{res}_p f_1 + \mathrm{res}_p f_2$. Również, gdy ciąg (f_n) funkcji holomorficznych jest w pewnym otoczeniu nakłutym punktu p niemal jednostajnie zbieżny do f, to $\mathrm{res}_p f = \lim_n \mathrm{res}_p f_n$. (Korzystamy z wniosku 1 w §III.1.)

b) Najskuteczniejsze wydaje się wyznaczanie residuum w oparciu o definicję: $\mathrm{res}_p f$ jest współczynnikiem przy z^{-1} rozwinięcia Laurenta funkcji $z \mapsto f(z+p)$ wokół zera. Dla przykładu, niech $f(z) = z^2 e^{1/z}$. Rozwinięcie funkcji exp w szereg prowadzi do równości $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^{-k+2}$. Funkcja f ma więc w punkcie 0 osobliwość istotną i $\mathrm{res}_0 f = \frac{1}{6}$.

c) Oto inny przykład wykorzystania definicji. Niech $f(z) = (z - \pi/2)/(\sin z - 1)^2$. Funkcja ta nie jest określona w punktach $p_n = 2\pi n + \pi/2$, $n \in \mathbb{Z}$, będących zerami funkcji $\sin -1$, zaś w nakłutym otoczeniu każdego z tych punktów jest holomorficzna. By wyznaczyć $\mathrm{res}_{p_n} f$ zauważamy, że $\sin(p_n + z) - 1 = \cos z - 1 = -\frac{z^2}{2} h(z)$, gdzie $h(z) = 1 - \frac{1}{12} z^2 + 0z^3 + \ldots$. Tak więc $\mathrm{res}_{p_n} f$ jest współczynnikiem przy $1/z$ rozwinięcia Laurenta (wokół zera) funkcji $\frac{4}{z^4}(z + p_n - \pi/2)/h^2(z)$ – a więc współczynnikiem przy z^3 rozwinięcia Maclaurina funkcji $4(z + p_n - \pi/2)/h^2(z)$. Korzystając z Przykładu z §I.5 stwierdzamy, że $\mathrm{res}_{p_n} f = 2/3$. (Wyznaczanie $\mathrm{res}_{p_n} f$ w oparciu o przkład 1 i dalsze wzory, patrz e) poniżej i reguła de L'Hospitala z zadania 1, byłoby bardziej zawiłe.)

d) Gdy $f(z) = g(z)/(z-p)^k$, gdzie $k > 0$, $g(p) \neq 0$ i funkcja g jest holomorficzna w otoczeniu punktu p, to $\mathrm{res}_p f = \frac{1}{(k-1)!} g^{(k-1)}(p)$. Dla dowodu rozwińmy g w szereg Taylora: $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n (z-p)^n$. Podzielenie tej równości stronami przez $(z-p)^k$ wykazuje, że $\mathrm{res}_p f = d_{k-1} = \frac{1}{(k-1)!} g^{(k-1)}(p)$. (Ostatnia równość to wzór Taylora.) Dla przykładu, gdy $f(z) = \mathrm{e}^z/(z^2+1)^2$, to $\mathrm{res}_{\mathrm{i}} f = -(\cos 1 + \mathrm{i} \sin 1)(1 + \mathrm{i})/4$ – dlaczego?

e) Gdy f ma w p osobliwość usuwalną, to $\mathrm{res}_p f = 0$, a gdy biegun rzędu k, to

$$\mathrm{res}_p f = \frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to p} g^{(k-1)}(z), \quad \text{gdzie } g(z) = (z-p)^k f(z). \tag{4}$$

Powyższa funkcja g przedłuża się bowiem do funkcji $\widetilde{g}$, holomorficznej i niezerowej w otoczeniu punktu p. Stosując do funkcji $f(z) = \widetilde{g}(z)/(z-p)^k$ wzór z d) i wykorzystując ciągłość pochodnych funkcji holomorficznej, otrzymujemy żądaną równość.

f) W szczególności, gdy f ma w p biegun rzędu 1, to $\mathrm{res}_p f = \lim_{z\to p}(z-p)f(z)$.

g) Niech funkcja g będzie holomorficzna w otoczeniu punktu p, przy czym $g(p) \neq 0$. Z e) i f) wynika, że gdy p jest **biegunem prostym** (tzn. rzędu jeden) funkcji h, to $\mathrm{res}_p(g\cdot h) = \lim_{z\to p} g(z)(z-p)h(z) = g(p)\cdot \mathrm{res}_p h$. Gdy zaś p jest zerem jednokrotnym funkcji h, to $\mathrm{res}_p(g/h) = \lim_{z\to p} g(z)\frac{z-p}{h(z)} = g(p)/h'(p)$. Poczynione założenia są istotne!

Przykład 2. Dla dalszych potrzeb udowodnimy, że jeśli p jest uogólnionym zerem krotności k funkcji f, to $\mathrm{res}_p(\frac{f'}{f}h) = k\cdot h(p)$ dla każdej funkcji h, holomorficznej w otoczeniu punktu p i spełniającej warunek $h(p)\neq 0$. (Ponadto, funkcja $\frac{f'}{f}h$ ma w p biegun prosty.)

Istotnie, zachodzi $f = (z-p)^k f_1$, gdzie funkcja f_1 jest holomorficzna w otoczeniu punktu punktu p i $f_1(p)\neq 0$. To daje $\frac{f'}{f} = \frac{1}{z-p}k + \frac{f_1'}{f_1}$; a że funkcje $\frac{f_1'h}{f_1}$ i kh są holomorficzne w otoczeniu punktu p, to $\mathrm{res}_0(\frac{f'}{f}h) = k\cdot \mathrm{res}_0(\frac{1}{z-p}h) = k\cdot h(p)$; patrz a) i g) powyżej. □

Uwaga 1. Z d) i uwagi 2 w §2 wynikają ogólne **wzory całkowe Cauchy'ego**: gdy X jest ograniczonym zbiorem regularnym i $g\in H(\overline{X})$, to

$$g^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi \mathrm{i}}\int_{\partial X}\frac{g(w)}{(w-z)^{k+1}}\,\mathrm{d}w \quad \text{dla } \ z\in X\setminus\partial X \text{ i } \ k\geq 0. \tag{5}$$

Zadanie 1. (**reguła de L'Hospitala**) Niech punkt p będzie uogólnionym zerem tak funkcji g, jak i funkcji h, przy czym jego krotność jest w obu przypadkach dodatnia lub w obu ujemna. Wówczas w $\widetilde{\mathbb{C}}$ granica $\lim_{z\to p} g(z)/h(z)$ istnieje i jest równa $\lim_{z\to p} g'(z)/h'(z)$.

Zadanie 2. a) Dowieść, że gdy funkcja h jest holomorficzna w otoczeniu zera i $k\geq 1$, to $\mathrm{res}_{w=0}\frac{z^k h(w)}{w^k(z-w)} = (M_k h)(z)$ dla $z\neq 0$, gdzie $(M_k h)(z) := \sum_{j=0}^{k-1}\frac{h^{(j)}(0)}{j!}z^j$.

b)* Przy oznaczeniach uwagi 2 z §2 dowieść, że gdy $0\in \mathrm{Int}U\setminus S$ i $k\geq 1$, to funkcja $\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{\partial U}\frac{z^k f(w)}{w^k(z-w)}dw$, zmiennej $z\in \mathrm{Int}U\setminus S$, jest równa $h - M_k h$ dla $h := f - \sum_{p\in S} G_p f$. (Wskazówka: korzystając z zadania ??? zastąpić w wyrażeniu podcałkowym f przez h.)

4 Indeks pętli względem punktu.

Każdy cykl Γ jest skończoną sumą pętli γ_i, przy czym $\mathrm{ind}(\Gamma,p) = \sum_i \mathrm{ind}(\gamma_i,p)$. Szczególnie ważne jest więc zrozumienie własności indeksu $\mathrm{ind}(\Gamma,p)$, gdy Γ jest pojedyńczą drogą zamkniętą $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$. W tym przypadku, dla p spoza jej obrazu γ^*,

$$\operatorname{ind}(\gamma,p) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{1}{w-p}\,\mathrm{d}w = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-p}\mathrm{d}t \tag{6}$$

Twierdzenie 1. *Gdy $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ jest drogą zamkniętą i $p \notin \gamma^*$, to:*
a) istnieje gałąź argumentu funkcji $\gamma - p : [a,b] \to \mathbb{C}$ i dla każdej takiej gałęzi σ zachodzi równość $\operatorname{ind}(\gamma,p) = \frac{1}{2\pi}(\sigma(b) - \sigma(a))$.
b) $\operatorname{ind}(\gamma,p)$ *jest liczbą całkowitą.*

Uwaga 1. Z twierdzenia wynika geometryczna interpretacja liczby $2\pi \cdot \operatorname{ind}(\gamma,p)$, jako przyrostu argumentu punktu $\gamma(t) - p$, gdy t zmienia się od a do b. Gdy $\operatorname{ind}(\gamma,p) = n$ powiemy więc, że γ **okrąża** $|n|$**–krotnie punkt** p, przy czym w kierunku **dodatnim** (lub: **przeciwnym do ruchu wskazówek zegara**) gdy $n > 0$, a **ujemnym** gdy $n < 0$.

W dowodzie twierdzenia wykorzystamy

Lemat 1. *Niech $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ będzie drogą. Wówczas:*
i) $\gamma = \mathrm{e}^\lambda$ dla pewnej drogi $\lambda : [a,b] \to \mathbb{C}$,
ii) Gdy λ jest taką drogą, to $\int_\gamma \frac{1}{w}\,\mathrm{d}w = \lambda(b) - \lambda(a)$.

Dowód. Ad i). Dla gładkiej drogi γ, teza ta wynika z twierdzenia 1 w §II.5, bo γ'/γ ma funkcję pierwotną (jak każda funkcja ciągła, określona na przedziale). Przypadek ogólny (znany z wykładu Topologii I) pomijamy, pozostawiając go jako zadanie uzupełniające.
Ad ii). Z definicji, $\int_\gamma \frac{1}{w}\,\mathrm{d}w = \int_a^b \frac{1}{\mathrm{e}^{\lambda(t)}}\mathrm{e}^{\lambda(t)}\lambda'(t)\,\mathrm{d}t = \lambda(b) - \lambda(a)$. ⊟

Dowód twierdzenia 1. Możemy zakładać, że $p = 0$, bo

$$\operatorname{ind}(\gamma,p) = \operatorname{ind}(\gamma - p, 0) \tag{7}$$

Na podstawie lematu, $\mathrm{e}^\lambda = \gamma$ dla pewnej drogi $\lambda : [a,b] \to \mathbb{C}$, co oznacza, że $\lambda = \ln|\gamma| + \mathrm{i}\sigma$ dla pewnej gałęzi argumentu σ drogi γ. Korzystając z części ii) lematu 1 i (dwukrotnie) z równości $\gamma(b) = \gamma(a)$, otrzymujemy $2\pi \cdot \operatorname{ind}(\gamma,0) = \frac{1}{\mathrm{i}}(\lambda(b) - \lambda(a)) = \sigma(b) - \sigma(a) \in 2\pi\mathbb{Z}$. Jest tak i dla innych gałęzi argumentu funkcji γ, bo różnią się one od σ o stałą. □

Wniosek 1. *Dla zadanej drogi zamkniętej γ, funkcja $p \mapsto$* $\operatorname{ind}(\gamma,p)$ *jest stała na składowych zbioru $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$, a na składowej nieograniczonej jest równa 0.*

Dowód. Gdy ciąg (p_n) punktów z $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ jest zbieżny do $p \notin \gamma^*$, to ciąg funkcji $w - p_n$ jest zbieżny jednostajnie do $w - p$, a ciąg funkcji $\frac{1}{w-p_n}$ – niemal jednostajnie do $\frac{1}{w-p}$; patrz zadanie 1 w §I.3. Tym samym $\operatorname{ind}(\gamma,p_n) \to \operatorname{ind}(\gamma,p)$ na podstawie wzoru (6) i wniosku 1 w §III.1. Funkcja $p \mapsto \operatorname{ind}(\gamma,p)$ jest więc ciągła; a że przyjmuje wartości w $\mathbb{Z}$, to jest stała na każdej składowej swej dziedziny $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$.

By zbadać wartość funkcji w punkcie p ze składowej nieograniczonej, możemy więc założyć, że p leży poza pewnym dyskiem D, zawierającym obraz pętli γ. Wtedy jednak żądana równość $\mathrm{ind}(\gamma, p) = 0$ wynika z twierdzenia 1 w §III.5 i wzoru (6), bo funkcja $\frac{1}{w-p}$ jest holomorficzna w dysku D, a ten jest zbiorem gwiaździstym. □

Uwaga 2. Z wykładu topologii I wiadomo, że indeks $\mathrm{ind}(\gamma, p)$ można zdefiniować bez założenia, by pętla γ była kawałkami gładka – i to tak, by zachować prawdziwość tez twierdzenia 1. Indeks ten odgrywa istotną rolę w topologii płaszczyzny, ze względu na następujące twierdzenie, znane w wykładu topologii:

Twierdzenie 2. *Pętle $\lambda, \mu : [a, b] \to \mathbb{C} \setminus \{p\}$ wtedy i tylko wtedy mają ten sam indeks względem p, gdy są swobodnie homotopijne w $\mathbb{C} \setminus \{p\}$ jako pętle.*

Przypomnijmy, że pętle $\lambda, \mu : [a, b] \to \mathbb{C}$ są w zbiorze $U \subset \mathbb{C}$ **swobodnie homotopijne jako pętle**, jeśli istnieje rodzina pętli $(\gamma_s : [a, b] \to U)_{s\in[0,1]}$ taka, że $\gamma_0 = \lambda, \gamma_1 = \mu$ i równość

$$G(s, t) = \gamma_s(t) \quad \text{dla } s \in [0, 1], t \in [a, b] \tag{8}$$

wyznacza ciągłą funkcję $G : [0, 1] \times [a, b] \to \mathbb{C}$. Zwrot „jako pętle" odnosi się tu do wymogu, by γ_s były pętlami, tzn. by $\gamma_s(a) = \gamma_s(b)$ dla $s \in [0, 1]$, zaś „swobodnie" – do tego, że <u>nie</u> żądamy, by punkt $\gamma_s(a) = \gamma_s(b)$ był niezależny od s. (Określenia te często są pomijane.)

Zadanie 1. * Dowieść równości $\mathrm{ind}(\lambda \cdot \mu, 0) = \mathrm{ind}(\lambda, 0) + \mathrm{ind}(\mu, 0)$ dla dróg zamkniętych $\lambda, \mu : [a, b] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$. (Wskazówka: lemat 1.)

5 Wyznaczanie indeksu.

Choć liczba $\mathrm{ind}(\gamma, p)$ ma jasną interpretację geometryczną, to nie jest widoczne, jak wyznaczyć ją w przypadku skomplikowanej drogi zamkniętej γ. Poniższy sposób umożliwia porównanie $\mathrm{ind}(\gamma, p)$ z $\mathrm{ind}(\gamma, q)$ przy następującym bardzo ogólnym założeniu:

$$p, q \notin \mathrm{im}(\gamma) \text{ i zbiór } \gamma^{-1}([p, q]) \text{ jest skończony.} \tag{*}$$

Oznaczmy punkty zbioru $\gamma^{-1}([p, q])$ przez $t_1, \ldots, t_n$; zakładamy, że nie ma wśród nich krańców a, b odcinka, na którym określona jest pętla γ. (Gdy jest inaczej, zastąpimy γ przez pętlę $t \mapsto \gamma(t)$ dla $t \in [a_1, b]$ i $t \mapsto \gamma(t-b+a)$ dla $t \in [b, b+a_1-a]$, gdzie $a_1 \in (a, b) \setminus \gamma^{-1}([p, q])$.)

Niech L^+ oznacza półprostą o początku w p, na której leży punkt q; zawierająca ją prosta dzieli $\mathbb{C}$ na dwie półpłaszczyzny. Za „lewą" przyjmiemy tę z nich, która jest po lewej stronie prostej, gdy patrzeć od p do q; pozostałą nazwiemy „prawą". Ponieważ $\gamma(a) = \gamma(b) \notin [p, q]$, więc dla każdej z liczb t_i istnieją $s_i^- \in (a, t_i)$, $s_i^+ \in (t_i, b)$ takie, że obraz $\gamma((s_i^-, t_i))$ przedziału

(s_i^-, t_i) (odp. obraz przedziału (t_i, s_i^+)) jest zawarty w jednej z tych półpłaszczyzn. Niech

$$\varepsilon_i = \begin{cases} 0 & \text{gdy } \gamma(s_i^-) \text{ i } \gamma(s_i^+) \text{ leżą w tej samej półpłaszczyźnie,} \\ 1 & \text{gdy } \gamma(s_i^-) \text{ leży w lewej półpłaszczyźnie, a } \gamma(s_i^+) \text{ w prawej,} \\ -1 & \text{gdy } \gamma(s_i^-) \text{ leży w prawej półpłaszczyźnie, a } \gamma(s_i^+) \text{ w lewej.} \end{cases}$$

(Jeśli myśleć o „moim" przejeździe od p do q i przejeździe „pojazdu" $\gamma(t)$, to $\varepsilon_i = 0$ gdy do kolizji w punkcie $\gamma(t_i)$ nie może dojść, bo pojazd wycofuje się skąd nadjechał, $\varepsilon_i = 1$ gdy może do niej dojść, lecz ja mam pierszeństwo przejazdu, zaś $\varepsilon_i = -1$ w pozostałym razie.)

Twierdzenie 1. *Przy tych oznaczeniach,* $\operatorname{ind}(\gamma, q) - \operatorname{ind}(\gamma, p) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i$.

Dowód. * Możemy zakładać, że $q = 0$ i $L^+ = \mathbb{R}^+$, bo obie strony dowodzonej równości nie zmienią się, gdy γ, q i p poddamy temu samemu przesunięciu i obrotowi. Rozpatrzymy wpierw przypadek, gdy $\gamma^{-1}(L^+) = \gamma^{-1}([0,p))$; wtedy też $\operatorname{ind}(\gamma,p) = 0$, bo p leży w nieograniczonej składowej zbioru $\mathbb{C} \setminus \operatorname{im}(\gamma)$.

Niech $\tau : [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie podzieloną przez 2π gałęzią argumentu funkcji γ; wówczas $\tau(b) - \tau(a) = \operatorname{ind}(\gamma, 0) \in \mathbb{Z}$ i $\{t_1, \ldots, t_n\} = \tau^{-1}(\mathbb{Z})$. Nazwijmy funkcję τ **rosnącą** (odp. **malejącą**) **w punkcie** t_i, jeśli w pewnym jego otoczeniu funkcje $t - t_i$ i $\tau(t) - \tau(t_i)$ są zgodnego (odp.: przeciwnego) znaku –a więc, gdy $\varepsilon_i = 1$ (odp. $\varepsilon_i = -1$). Teza wynika wtedy z następującego po dowodzie zadania, pozostawionego jako łamigłówka.

Gdy dodatkowe założenie o $\gamma^{-1}(L^+)$ nie jest spełnione, to obierzmy na L^+ punkt p' tak daleko położony, by $[q, p') \supset L^+ \cap \operatorname{im}(\gamma)$. Powyższy przypadek szczególny pozwala (z zastrzeżeniem, o którym za chwilę) wyznaczyć $\operatorname{ind}(\gamma, q) - \operatorname{ind}(\gamma, p')$ i $\operatorname{ind}(\gamma,p) - \operatorname{ind}(\gamma, p')$, a odjęcie stronami otrzymanych równości daje tezę.

Rozumowanie to wymaga, by zbiór $\gamma^{-1}([q,p'] = \gamma^{-1}(L^+)$ był skończony. Można je jednak wykorzystać przy γ zmienionym na drogę zamkniętą $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{C}$ spełniającą ten warunek, równą γ na $T := \bigcup_{i=1}^n [s_i^-, s_i^+]$ i tak bliską γ, by $\operatorname{ind}(\gamma, z) = \operatorname{ind}(\gamma_1, z)$ dla $z = q, p$ – którą znajdujemy bez trudu, zastępując γ na zbiorze $[a,b] \setminus T$ przez łamaną, bliską $\gamma_{|[a,b]\setminus T}$. ⊟

Zadanie 1. Niech funkcja $\tau : [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie ciągła, zaś zbiór $\tau^{-1}(\mathbb{Z})$ – skończony i zawarty w (a,b). Dowieść, że jeśli liczba $\tau(b) - \tau(a)$ jest całkowita, to jest ona równa różnicy między liczbą tych punktów $t_i \in \tau^{-1}(\mathbb{Z})$, w których funkcja τ jest rosnąca, a liczbą tych $t_j \in \tau^{-1}(\mathbb{Z})$, w których funkcja τ jest malejąca.

Ćwiczenie. Przy $p = -2$ i $\gamma(t) = e^{7it}$ $(t \in [0, 2\pi])$, czy twierdzenie da $\operatorname{ind}(\gamma, 0) = 7$?

6 Twierdzenie o residuach a całki (w tym niewłaściwe) i szeregi

Poniższy materiał omawiany będzie przede wszystkim na ćwiczeniach.

Gdy funkcja zespolona f jest określona i ciągła na zorientowanym odcinku $J = (p,q) \subset \mathbb{C}$, to przez **całkę niewłaściwą** $\int_J f$ rozumiemy granicę $\lim \int_{[p',q']} f$ przy $p' \to p, q' \to q$ i $p', q' \in (p,q)$ – jeśli taka granica istnieje.[9] Podobna definicja stosuje się, gdy J jest zorientowaną półprostą lub prostą. Tu zajmiemy się całką niewłaściwą $\int_{-\infty}^{\infty}$, gdy $J = (-\infty, \infty)_{\mathbb{R}}$.

Uwaga 1. Istnienie granicy $I = \lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} f$ to warunek konieczny istnienia całki $\int_{-\infty}^{\infty} f$. Jest on też wystarczający gdy funkcja f jest symetryczna (dlaczego?), lecz już dla $f(z) = z$ granica $\lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} f$ istnieje, a całka $\int_{-\infty}^{\infty} f$ – nie. Jednak gdy całka $\int_{-\infty}^{\infty} f$ istnieje (co często wymaga dodatkowego uzasadnienia), to jest równa I. $\square$

Poniżej wpierw podamy dwa naturalne warunki, umożliwiające wyznaczenie powyższej granicy I, a następnie dowiedziemy, że zapewniają one też istnienie całki. Przyjmujemy, że:

- Π_+ to otwarta półpłaszczyzna $\operatorname{Im} z > 0$, a $\overline{\Pi_+}$ to jej domknięcie $\operatorname{Im} z \geq 0$,
- Γ_r to półokrąg $\{re^{\mathrm{i}t} : t \in [0,\pi]\}$, traktowany jako zorientowany łuk o początku w r,
- $f \in H(\overline{\Pi_+} \setminus S)$ dla pewnego skończonego zbioru $S \subset \Pi_+$,
- s to (skończona) suma $\sum_{p\in S} \operatorname{res}_p f$ residuów funkcji f w punktach zbioru S.

Uwaga 2. Jeśli $\lim_{r\to\infty} \int_{\Gamma_r} f = c$, to granica $I = \lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} f$ istnieje i wynosi $2\pi\mathrm{i}s - c$. Istotnie, gdy liczba r jest większa niż moduł każdego z rozważanych wyżej punktów osobliwych, to na podstawie równości (3) w §2, liczba $\int_{-r}^{r} f + \int_{\Gamma_r} f$ jest równa $2\pi\mathrm{i}s$, skąd wynika teza. (Wykorzystaliśmy to, że półkole $\{z : |z| \leq r, \operatorname{Im}(z) \geq 0\}$ jest zbiorem regularnym).

O istnieniu granicy $\lim_{r\to\infty} \int_{\Gamma_r} f$ wnosić będziemy na ogół w oparciu o

Twierdzenie 1. *Jeśli spełniony jest któryś z poniższych dwóch warunków, to* $\lim_{r\to\infty} \int_{\Lambda_r} f = 0$ *dla dowolnych łuków* Λ_r *takich, że* $\Lambda_r^* \subset \Gamma_r^*$*:*

i) Istnieje stała $M > 0$ *taka, że* $|f(z)| \leq M/|z|^2$ *dla* $z \in \overline{\Pi_+} \setminus D(0,M)$*.*

ii) $\lim_{z\to\infty, z\in\overline{\Pi_+}} f(z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}az} = 0$ *dla pewnej liczby dodatniej* a*.*

Dowód. Ad i). Dla $r > M$ mamy $|\int_{\Lambda_r} f| \leq \pi r \sup_{z\in\Lambda_r} |f(z)| \leq \pi r M/r^2 \xrightarrow[r\to\infty]{} 0$.

Ad ii). Podobnie, $|\int_{\Lambda_r} f| \leq r \int_0^{\pi} |f(re^{\mathrm{i}t})| \mathrm{d}t$. Niech

$$\varphi(r) = \sup\{|f(z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}az}| : z \in \Gamma_r\}$$

Dla $z = re^{it} \in \Lambda_r^*$ otrzymujemy $|f(z)| \leq \varphi(r)|\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}| = \varphi(r)\mathrm{e}^{-ar\sin t}$, bo $\mathrm{i}az = \mathrm{i}ar\cos t - ar\sin t$. Stąd $|\int_{\Lambda_r} f| \leq r \int_0^{\pi} \varphi(r)\mathrm{e}^{-ar\sin t}\,\mathrm{d}t$; a że dla $t \in [0,\pi/2]$ punkt $(t, \sin t)$ wykresu funkcji sin leży nad prostą przechodzącą przez punkty $(0,0)$ i $(\pi/2, 1)$, to $\sin t \geq \frac{2}{\pi} t$ i dalej

$$r \int_0^{\pi} \varphi(r)\mathrm{e}^{-ar\sin t}\,\mathrm{d}t = 2r\varphi(r) \int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{-ar\sin t}\,\mathrm{d}t \leq 2r\varphi(r) \int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{-\frac{2}{\pi}art}\,\mathrm{d}t.$$

Ostatnie wyrażenie jest równe $\frac{\pi}{a}\varphi(r)(1 - \mathrm{e}^{-ar})$ – co kończy dowód, bo $\lim_{r\to\infty} \varphi(r) = 0$.

[9] Całka niewłaściwa $\int_J f$ może istnieć i gdy $\int_J |f| = \infty$. Dla jasności, należałoby całkę niewłasciwą oznaczać inaczej, niż całkę Lebesgue'a. U nas zawsze $\int_{(p,q)} = \int_p^q$ oznacza całkę niewłaściwą.

Twierdzenie 2. *Jeśli spełniony jest któryś z warunków i) lub ii), to całka $\int_{-\infty}^{\infty} f$ istnieje.*

Dowód. Dla i) teza wynika z ciągłości funkcji $f_{|[-M,M]}$ i zbieżności całki $\int_M^\infty \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$.

Niech teraz zachodzi ii). Oznaczmy przez Λ_r łuk $\{re^{it} : t \in [0, \pi/2]\}$, a przez r_0 pewną liczbę większą niż moduł każdego z punktów osobliwych funkcji f. Dla $r > r_0$ otrzymujemy na podstawie twierdzenia o residuach

$$\int_{[r_0,r]} f = \int_{\Lambda_{r_0}} f + \int_{[\mathrm{i}r_0,\mathrm{i}r]} f + \int_{\Lambda_r^{\leftarrow}} f \tag{9}$$

Jak wiemy z twierdzenia 1, ostatnia całka w (9) dąży do 0 gdy $r \to \infty$. Ponadto z warunku ii) wynika ograniczoność funkcji $f(\mathrm{i}t)\mathrm{e}^{at}$ dla $t \geq r_0$, a tym samym istnienie całki funkcji $|f|$ na półprostej $J = \{\mathrm{i}t : t \geq r_0\}$. Istnieje więc granica $\lim_{r\to\infty} \int_{r_0}^r f$, równa $\int_{\Lambda_{r_0}} f + \int_J f$, i podobnie istnieje całka $\int_{-\infty}^{-r_0} f$. Zatem całka $\int_{-\infty}^{\infty} f$ też istnieje. □

Uwaga 3. Części twierdzeń 1 i 2, odpowiadające warunkowi ii), nazywane są **lematem Jordana**. Lemat ten umożliwia wyznaczenie tzw. **transformaty Fouriera** $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}\mathrm{d}x$ pewnych funkcji g. Jest on też użyteczny przy badaniu całek $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\cos(ax)\mathrm{d}x$ lub $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\sin(ax)\mathrm{d}x$, gdzie $a > 0$ (czy ogólniej $a \neq 0$), a funkcja g przyjmuje na $\mathbb{R}$ wartości rzeczywiste i rozszerza się do funkcji $\widetilde{g}$, holomorficznej w $\overline{\Pi_+}$ poza zbiorem skończonym. Ponieważ bowiem $\cos(ax) = \operatorname{Re}\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}$, $\sin(ax) = \operatorname{Im}\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}$, więc rzecz sprowadza się do wyznaczenia całki $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\mathrm{e}^{iax}\mathrm{d}x$, a to – dzięki lematowi Jordana – do wyznaczenia sumy pewnych residuów, o ile tylko $\widetilde{g}$ spełnia założenia lematu. („Naturalniejsze" całkowanie funkcji $\widetilde{g}(z)\cos(az)$ wzgl. $\widetilde{g}(z)\sin(az)$ w miejsce $\widetilde{g}(z)\mathrm{e}^{iaz}$ okazuje się mniej dogodne.) □

Użyjemy szacowania Jordana do wyznaczenia całek nieco innego typu.

Przykład. Udowodnimy, że $\int_0^\infty \exp(\mathrm{i}z^2)\mathrm{d}z = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$, lub równoważnie, że tzw. **całki Fresnela** $\int_0^\infty \cos(z^2)\mathrm{d}z$ i $\int_0^\infty \sin(z^2)\mathrm{d}z$ są równe $\sqrt{\pi/8}$. W tym celu oznaczmy przez Λ_r łuk $\{re^{\mathrm{i}t} : t \in [0, \pi/4]\}$, zaś przez p_r punkt $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$. Przy $f(z) = \exp(\mathrm{i}z^2)$ otrzymujemy $|\int_{\Lambda_r} f| \to 0$ gdy $r \to \infty$. (Uzasadnienie, podobne jak dla ii) w twierdzeniu 1, pozostawione jest jako zadanie.) Ponadto, całka z f po konturze $\Gamma := [0, r]\#\Lambda_r\#[p_r, 0]$ znika (bo $\Gamma = \partial U$ i $f \in H(U)$ dla pewnego wycinka koła U), więc $|\int_0^r f - \int_{[p_r,0]} f| \to 0$ gdy $r \to \infty$. A że $\int_{[p_r,0]} f = \int_0^r \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}\mathrm{d}t$ i tzw. **całka Gaussa** $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ istnieje i wynosi $\sqrt{\pi}/2$, to wynika stąd teza. □

Gdy funkcja f ma osobliwość w pewnym punkcie $p \in \mathbb{R}$, to celowe może być użycie małych półokręgów wokół p, pozwalających ominąć punkt osobliwy.

Przykład. Całkując funkcję $f(z) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}$ po drodze $[-R, -r]\#(-\Gamma_r)\#[r, R]\#\Gamma_R$ stwierdzamy, że $\int_{-R}^{-r} f + \int_r^R f = \int_{\Gamma_r} f - \int_{\Gamma_R} f$. Ponadto, funkcja $F(z) = f(z) - \frac{1}{z}$ przedłuża się holomorficznie na punkt 0, skąd $\int_{\Gamma_r} f = \int_{\Gamma_r} F + \int_{\Gamma_r} \frac{1}{z}\mathrm{d}z \to \pi\mathrm{i}$ gdy $r \to 0$ (bo $\int_{\Gamma_r} F \to 0$ gdy $r \to 0$ i $\int_{\Gamma_r} \frac{1}{z}\mathrm{d}z = \pi\mathrm{i}$). Wobec tego $\mathrm{Im}\left(\int_{-R}^{-r} f + \int_r^R f\right) \to \pi$ gdy $r \to 0$ i $R \to \infty$, na podstawie twierdzenia 1ii), z $a = 1$. Po uwzględnieniu symetrii funkcji $\mathrm{Im}(f_{|\mathbb{R}})$, równej $\sin x/x$, daje to równość $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \pi/2$.

Twierdzenie o residuach jest pomocne nie tylko przy wyznaczaniu całek niewłaściwych, ale i całek funkcji okresowych. Przekonuje o tym proste

Twierdzenie 3. *Gdy f jest funkcją dwóch zmiennych rzeczywistych, ciągłą na brzegu koła jednostkowego $D = \{z : |z| = 1\}$, to*

$$\int_0^{2\pi} f(\cos t, \sin t)\,\mathrm{d}t = \int_{\partial D} g, \quad \text{gdzie } g(z) := \tfrac{1}{\mathrm{i}z} f(\tfrac{1}{2}(z + \tfrac{1}{z}), \tfrac{1}{2\mathrm{i}}(z - \tfrac{1}{z})) \text{ dla } z \in \partial D. \tag{10}$$

Jeśli więc powyższa funkcja g przedłuża się do funkcji $\widetilde{g}$, holomorficznej w $\overline{D}$ poza zbiorem skończonym $S \subset D$, to $\int_0^{2\pi} f(\cos t, \sin t)dt = 2\pi\mathrm{i}\sum_{p\in S} \mathrm{res}_p\widetilde{g}$.

Dowód. Równość (10) wynika z definicji całki $\int_{\partial D} g$ i wzorów Eulera z §II.3. ⊟
(Można wzór (10) łatwo zapamiętać: dla $z \in \partial D$ piszemy $z = \mathrm{e}^{it} = \cos t + \mathrm{i}\sin t$, co da $\frac{1}{z} = \mathrm{e}^{-it} = \cos t - \mathrm{i}\sin t$, skąd $\cos t = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$, $\sin t = \frac{1}{2\mathrm{i}}(z - \frac{1}{z})$ i $\mathrm{d}z = \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\mathrm{d}t = \mathrm{i}z\mathrm{d}t$.)

Dalsze sposoby wykorzystania twierdzenia o residuach do wyznaczania całek wskazane są w §XVI.4 trzeciego tomu „Analizy" K. Maurina. Tu podamy jeszcze pewne zastosowania do sumowania szeregów.

Twierdzenie 4. *Niech funkcja h będzie holomorficzna w $\mathbb{C}$ poza skończonym zbiorem S i spełnia warunek $|h(z)| \le C/|z|^2$ dla dostatecznie dużych $|z|$, gdzie $C > 0$ jest stałą. Wówczas $\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus S} h(n) = -\pi \sum_{p\in S} \mathrm{res}_p g$, gdzie $g(z) := h(z)\,\mathrm{ctg}(\pi z)$.*

Dowód. Zbieżność (bezwzględna) szeregu $\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus S} h(n)$ wynika z założenia.

Rozważmy teraz kwadraty $K_N = \{x + \mathrm{i}y : |x|, |y| < N + \frac{1}{2}\}$, tak duże, by zawierały skończony zbiór S. Na podstawie zadania 3 z §II.3, funkcja $|\mathrm{ctg}(\pi z)|$ jest na ich brzegu ograniczona przez 2, skąd $|\int_{\partial K_N} g| \le 4(2N + 1)\cdot 2\sup\{|h(z)| : z \in \partial K_N\}$. A że $|z| \ge N$ gdy $z \in \partial K_N$, to $|\int_{\partial K_N} g| \le (16N + 8)C/N^2 \le 17C/N \to 0$ gdy $N \to \infty$.

Z drugiej strony, $\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\partial K_N} g = \sum_{p\in S\cup\mathbb{Z}\cap K_N} \mathrm{res}_p g$, na podstawie równości (3) z twierdzenia o residuach, zastosowanej przy $U = K_N$. Ponadto, $\mathrm{res}_n g = \frac{1}{\pi}h(n)$ dla $n \in \mathbb{Z}\setminus S$, patrz przykład 2 w §IV.3, przy $f(z) = \sin(\pi z)$. Stąd $|\sum_{p\in S} \mathrm{res}_p g + \frac{1}{\pi}\sum_{n\in K_N\setminus S} h(n)| \to 0$ (Literą n oznaczamy wyłącznie liczby całkowite.) A że $n \in K_N \Leftrightarrow |n| \le N$, to wobec skończoności zbioru S i sumowalności szeregu $\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus S} h(n)$, jego sumą jest $-\pi\sum_{p\in S} \mathrm{res}_p g$. □

Zadanie 1. Dowieść, powtarzając powyższe rozumowanie, że przy założeniach twierdzenia 4 ma miejsce równość $\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus S}(-1)^n h(n) = -\pi\sum_{p\in S} \mathrm{res}_p f$, gdzie $f(z) := h(z)/\sin(\pi z)$.

Zadanie 2. Zastosować twierdzenie 4, gdy a) $h(z) = z^{-2}$; b) $h(z) = z^{-4}$; c)* $h(z) = z^{-6}$; d) $h(z) = 1/(z-w)^2$; e) $h(z) = 1/(w^2 - z^2)$, gdzie liczba $w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ jest ustalona.

Części d) i e) zadania 2 dają przedstawienie sumy pewnych szeregów funkcji wymiernych w postaci jawnej funkcji h. W poniższym materiale uzupełniającym zajmiemy się odwróceniem tej procedury, tzn. rozwinięciem funkcji w szereg funkcji wymiernych **metodą Cauchy'ego**.

Twierdzenie 5. * *Niech funkcja f będzie holomorficzna w $\mathbb{C} \setminus S$, gdzie zbiór S jest dyskretny w $\mathbb{C}$ (tzn., nie ma w $\mathbb{C}$ punktów skupienia; więcej o tym w następnym rozdziale). Niech dalej $U_1 \subset U_2 \subset ...$ będą zwartymi zbiorami regularnymi, których brzegi spełniają warunek* $\operatorname{dist}(0, \partial U_n) \to \infty$ *i są rozłączne z S. Jeśli $\ell(\partial U_n) \cdot \sup_{w \in \partial U_n} |f(w)|/|w|^2 \to 0$ i $0 \notin S$, to $f = f(0) + \sum_n g_n$ (zbieżność niemal jednostajna w $\mathbb{C} \setminus S$), gdzie*

$$g_n := \sum_{p \in S \cap U_n \setminus U_{n-1}} (G_p f - (G_p f)(0)) \quad dla\ n = 1, 2, ... \tag{11}$$

Dowód. Stosując wzór z zadania 2a) z §3 przy $k = 1$ wnosimy, że liczba $f(z) - f(0) - \sum_{n=1}^{l} g_n(z)$ jest dla $z \in U_l$ równa całce $I_l(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U_l} f(w)(\frac{1}{w-z} - \frac{1}{w}) dw$. Teza wynika wiec stąd, że $|I_l(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \ell(\partial U_l) \cdot \sup_{w \in \partial U_l} |f(w)|/|w||w-z| \to 0$, przy czym gdy zbiór $K \subset \mathbb{C} \setminus S$ jest zwarty, to zbieżność jest jednostajna ze względu na $z \in K$. (To ostatnie zaś wynika z założeń; szczegóły są pozostawione jako ćwiczenie.) $\boxminus$

Uwaga 4. * a) Każdy ze zbiorów $S \cap U_n$ jest skończony, wobec zwartości U_n i dyskretności S.

b) Gdy $0 \in S$, to można od f odjąć $G_0 f$ i zastosować twierdzenie do zmienionej funkcji.

c) Można w założeniu twierdzenia 5 zastąpić $|f(w)/w^2|$ przez $|f(w)/w^{k+2}|$, przy $k \geq 0$, jeśli w tezie zastąpić $f(0)$ przez $M_k f$ i $(G_p f)(0)$ przez $M_k G_p f$, gdzie M_k jest „operatorem Maclaurina", zdefiniowanym w zadaniu 2 z §3. (Dowód nie zmieni się.)

d)* Jeszcze ogólniej, można zakładać tylko, że $\ell(\partial U_n) \cdot \sup_{w \in \partial U_n} |f(w)/w^{k_n+2}| \to 0$, dla pewnych $k_n \geq 0$, a w tezie zastąpić $f(0)$ przez $M_{k_n} f$ i $(G_p f)(0)$ przez $M_{k_n} G_p f$.

Zadanie 3. * Rozwinąć metodą Cauchy'ego $\frac{\pi}{\sin(\pi z)}$ w szereg funkcji wymiernych.

V Funkcje mające dyskretny zbiór punktów osobliwych.

1 Definicje i zasada identyczności.

Niech f będzie funkcją zespoloną, określoną na podzbiorze otwartego zbioru $U \subset \mathbb{C}$.

Zadanie 1. Przy tych oznaczeniach, równoważne są warunki:

i) Dla każdego punktu $p \in U$, funkcja f jest określona i holomorficzna w pewnym jego nakłutym otoczeniu.

ii) Istnieje zbiór $S(f) \subset U$, który jest **dyskretny w** U (tzn., nie ma w U punktów skupienia) i taki, że funkcja f jest określona i holomorficzna w $U \setminus S(f)$.

Definicja. Gdy powyższe równoważne warunki są spełnione to powiemy, że f jest funkcją **holomorficzną w** U **poza izolowanymi osobliwościami** (lub: **poza zbiorem dyskretnym w** U). Dla dwóch takich funkcji f, g oznaczamy przez $f + g$ i fg funkcje, określone oczywistymi wzorami na $U \setminus (S(f) \cup S(g))$. Piszemy też $f \equiv g$, jeśli istnieje zbiór S, dyskretny w U, poza którym są one określone i równe.

Uwaga 1. a) Zbiór $S(f)$ nie jest wyznaczony jednoznacznie –można go n.p. powiększyć o ustalony punkt $p \in U$.

b) Gdy $f \equiv g$, to $f(z) = g(z)$ dla $z \in U \setminus (S(f) \cup S(g))$, wobec ciągłości f i g.

c) Ze względu na i), dla $p \in U$ możemy mówić o szeregu Laurenta $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(z-p)^n$ funkcji f, o środku w p, w tym o wartości $k_f(p) := \inf\{n : c_n \neq 0\} \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty, \infty\}$. (Por. §IV.1.)

d) Również, możemy badać, czy istnieje granica $\lim_{z\to p} f(z)$ (skończona lub nie).

Definicja. a) Powiemy, że funkcja f jest **meromorficzną w** U, jeśli jest holomorficzna w U poza izolowanymi osobliwościami i w żadnym punkcie $p \in U$ nie ma osobliwości istotnej (tzn., jeśli $k_f(p) \neq -\infty$ dla wszystkich $p \in U$).

b) Zbiór wszystkich funkcji, meromorficznych w U, oznaczamy przez $M(U)$.

Twierdzenie 1 (zasada identyczności)**.** *Niech $f, g \in M(U)$, gdzie U jest obszarem w $\mathbb{C}$. Jeśli zbiór $\{z \in U : f(z) = g(z)\}$ ma w U punkt skupienia, to $f \equiv g$.*

Przypomnijmy, że **obszar** to zbiór spójny i otwarty.

Dowód. Bez straty ogólności załóżmy, że $g = 0$ (gdy nie, zastąpimy f przez $f - g$, a g przez 0). Oznaczmy przez K zbiór punktów skupienia, w U, zbioru $f^{-1}(0)$. Zbiór K jest niepusty (z założenia) i domknięty w U (z wiadomości z Topologii). Pozostaje dowieść, że jest on też otwarty w U – bo jedynym niepustym domknięto-otwartym podzbiorem spójnej przestrzeni U jest U, a równość $K = U$ pociąga za sobą, że $f(z) = 0$ dla $z \in U \setminus S(f)$.

Niech więc $p \in K$, wskażemy otoczenie D punktu p, zawarte w K. Ponieważ $f \in M(U)$, więc dla $n := k_f(p)$ zachodzi $n \neq -\infty$. Jeśliby $n \neq \infty$, to funkcję $f(z)/(z-p)^n$ możnaby przedłużyć na punkt p do funkcji h, holomorficznej w otoczeniu tego punktu i różnej od

0 w p. (Patrz §IV.3.) Jednak z równości $f(z) = (z-p)^n h(z)$ wynika, że $f(z) \neq 0$ dla $z \neq p$ z pewnego otoczenia punktu p, wbrew założeniu o p. Stąd $n = \infty$, co oznacza, że rozwinięcie Laurenta funkcji f wokół p jest zerowe – wobec czego $f(z) = 0$ dla wszystkich $z \neq p$, leżących w pewnym dysku D wokół p. Dysk ten ma żądaną własność. □

W dalszej części będziemy utożsamiać funkcje meromorficzne, pozostające w relacji $\equiv$, i w miejsce $f \equiv g$ pisać $f = g$. (Dodatkowe uzasadnienie ku temu da nam §4.)

Wniosek 1 (Zasada izolowanych zer). *Gdy U jest obszarem i funkcja $f \in M(U)$ jest niezerowa, to zbiór $f^{-1}(0)$ jest dyskretny w U i $k_f(p) \neq \pm\infty$ każdego punktu $p \in U$.*

Dowód. Tezy te były częścią powyższego dowodu. ⊟

Twierdzenie 2. *Niech U będzie obszarem w $\mathbb{C}$. Wówczas $M(U)$ jest ciałem (przy naturalnych działaniach), zamkniętym ze względu na różniczkowanie.*

Dowód. Niech $f, g \in M(U)$ będą niezerowe. Stwierdzamy, że:

1) $f/g, f+g \in M(U)$, bo skoro f i g spełniają warunek i) definicji funkcji meromorficznych, to f/g i $f+g$ też go spełniają. (Przy f/g korzystamy z dyskretności zbioru $g^{-1}(0)$.)

3) $f' \in M(U)$, bo wokół każdego punktu $p \in U$ funkcja f' rozwija się w szereg Laurenta, którego część główna, w ślad za f, zawiera tylko skończenie wiele wyrazów. □

Zadanie 2. Gdy zbiór $S \subset U$ jest dyskretny w zbiorze otwartym U, to

a) ze spójności U wynika spójność $U \setminus S$;

b) każdy zbiór $S' \subset S$ jest domknięty w U;

c) $\#(K \cap S) < \infty$ dla każdego zbioru zwartego $K \subset U$ (skąd $\#S \leq \aleph_0$).

Ponadto, suma skończenie wielu zbiorów, dyskretnych w U, jest też takim zbiorem.

2 Zasada argumentu i twierdzenie Rouchégo.

Oznaczenie. Niech $f \in M(U) \setminus \{0\}$, gdzie U jest obszarem. Przez $N_{f,K}$ oznaczamy sumę krotności uogólnionych zer funkcji f, leżących w danym zbiorze $K \subset U$. Te uogólnione zera leżą w zbiorze $S(f) \cup f^{-1}(0)$, dyskretnym w U, więc gdy zbiór K jest zwarty, to jest ich skończenie wiele i liczba $N_{f,K}$ jest dobrze określona. (Patrz w §1 wniosek 1 i zadanie 2.)

Uwaga 1. Dla zbioru zwartego $K \subset U$ zachodzi rówość

$$N_{f,K} = Z_{f,K} - B_{f,K} \tag{1}$$

gdzie $Z_{f,K}$ to suma krotności „prawdziwych" zer funkcji $f \in M(U)$, leżących w K, zaś $B_{f,K}$ to suma rzędów jej biegunów w K. Gdy więc funkcja f jest holomorficzna (nie ma biegunów), to $N_{f,K}$ daje informację o liczbie jej zer, liczonych z krotnościami. □

Twierdzenie 1 (zasada argumentu)**.** *Niech niech funkcja f, meromorficzna w otoczeniu zwartego zbioru regularnego K, nie ma zer ani biegunów na jego brzegu. Wówczas*

$$N_{f,K} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\Gamma} \frac{f'}{f} = \mathrm{ind}(f \circ \Gamma, 0), \quad \textit{gdzie } \Gamma := \partial K \textit{ to zorientowany brzeg.} \tag{2}$$

Uwaga 2. Nazwa „zasada argumentu” bierze się stąd, że jeśli $\Gamma = \gamma$ jest drogą zamkniętą, to $2\pi \cdot \mathrm{ind}(f \circ \gamma, 0)$ jest przyrostem argumentu punktu $f(p)$, gdy punkt $p = \gamma(t)$ jednokrotnie obiega krzywą $\mathrm{im}(\gamma)$ (tzn. parametr t w sposób rosnący przebiega dziedzinę pętli γ). Równość ta wynika z uwagi 1 w §IV.4. □

Dowód twierdzenia. Druga równość w (2) wynika z łatwej do udowodnienia równości $\int_{f\circ\gamma} \frac{1}{w} \mathrm{d}w = \int_\gamma \frac{f'}{f}$, zastosowanej do składowych γ cyklu Γ.

By dowieść pierwszej równości, oznaczmy przez U otoczenie, o którym mowa w założeniach. Niech $S := K \cap (S(f) \cup f^{-1}(0))$; z zadania 2 i wniosku 1 w §1 wiemy, że $\#S < \infty$. Funkcja f'/f jest holomorficzna w $K \setminus S$, bo tak $1/f$, jak i f' są holomorficzne w otoczeniu tego zbioru. Ponadto, w punktach $p \in S$ jej residuum jest równe krotności $k(p)$ punktu p jako uogólnionego zera funkcji f; patrz przykład 2 w §IV.3. Z twierdzenia o residuach (patrz wzór (3) w §IV.2) wynika więc, że

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\Gamma} \frac{f'}{f} = \sum_{p\in S} \mathrm{res}_p(f'/f) = \sum_{p \in S} k(p) = N_{f,K} \qquad \square$$

Ćwiczenie. Przy założeniach zasady argumentu, niech $h \in H(K)$ i $h(z) \neq 0$ dla $z \in \partial K$. Dowieść, że $\int_{\partial K} h \frac{f'}{f} = 2\pi \mathrm{i} \sum_p k_f(p) h(p)$, gdzie sumujemy po wszystkich uogólnionych zerach funkcji f w K.

Ćwiczenie. Dowieść, że gdy funkcje f, g są meromorficzne w obszarze $U \subset \mathbb{C}$ i zbiór $K \subset U$ jest zwarty, to $N_{f \cdot g, K} = N_{f,K} + N_{g,K}$.

Twierdzenie 2 (Rouchégo)**.** *Niech funkcje f i g będą meromorficzne w otoczeniu zwartego zbioru regularnego K i nie mają biegunów na jego brzegu. Jeśli zachodzi ostra nierówność*

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)| + |g(z)| \qquad \textit{dla} \quad z \in \mathrm{Bd}K, \tag{3}$$

(równoważnie: jeśli $0 \notin [f(z), g(z)]$ dla $z \in \mathrm{Bd}K$), to $N_{f,K} = N_{g,K}$.

Dowód. Niech pętla γ_i będzie jedną ze składowych cyklu $\Gamma = \partial K$. Z założenia, pętle $\lambda := f\circ\gamma_i$ i $\mu := g\circ\gamma_i$ spełniają warunek $|\lambda - \mu| < |\lambda| + |\mu|$, skąd $(s\mu + (1-s)\lambda)_{s\in[0,1]}$ jest swobodną homotopią pętli, łączącą λ z μ i przyjmującą wartości w $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Zatem $\mathrm{ind}(\lambda, 0) = \mathrm{ind}(\mu, 0)$, czy równoważnie $\mathrm{ind}(f\circ\gamma_i, 0) = \mathrm{ind}(g\circ\gamma_i, 0)$. Sumując po wszystkich składowych cyklu wnosimy, że $\mathrm{ind}(f \circ \Gamma, 0) = \mathrm{ind}(g \circ \Gamma, 0)$. Teza wynika więc z zasady argumentu. □

Uwaga 3. * Wyżej, regularność zbioru K jest zbędna: wystarcza zwartość. Patrz §VIII.5.

Wskażmy na pewne zastosowania twierdzenia Rouchégo:

Twierdzenie 3 (Hurwitza). *Niech $U \subset \mathbb{C}$ będzie obszarem i niech ciąg funkcji $f_n \in H(U)$ będzie niemal jednostajnie zbieżny do funkcji f, różnej od stałej. Jeśli równanie $f(z) = w$ ma w U co najmniej k różnych pierwiastków, to dla dostatecznie dużych n równanie $f_n(z) = w$ też ma w U co najmniej k różnych pierwiastków.*

Dowód. Możemy założyć, że $w = 0$ – inaczej funkcje f_n zastąpimy przez $f_n - w$, a f przez $f - w$. Niech $p_1, \ldots, p_k$ będą różnymi zerami funkcji f. Obierzmy parami rozłączne koła $\overline{D}_i = \overline{D}(p_i, r) \subset U$ tak, by $\overline{D}_i \cap f^{-1}(0) = \{p_i\}$ dla $1 \le i \le k$. (Korzystamy z zasady izolowanych zer.) Na podstawie twierdzenia Rouchégo, $Z_{f_n,D_i} = Z_{f,D_i}$ dla każdego i i dostatecznie dużych n (takich, że $\|f - f_n\|_K < \inf_{z\in K}|f(z)|$, gdzie $K := \bigcup_{i=1}^n \partial D_i$). Dla tych n, funkcja f_n ma więc zero w każdym dysku D_i i łącznie ma ich niemniej, niż k. □

3 Charakteryzacja różnych typów osobliwości izolowanych

Poniżej zakładamy, że V jest nakłutym otoczeniem punktu $p \in \mathbb{C}$ i $f \in H(V)$.

Twierdzenie 1 (Wersja lematu Riemanna o przedłużaniu). *Równoważne są warunki:*
a) osobliwość w punkcie p jest usuwalna, tzn. $k_f(p) \ge 0$;
b) istnieje granica $\lim_{z\to p} f(z) \in \mathbb{C}$;
c) funkcja f jest ograniczona w pewnym nakłutym otoczeniu punktu p;
d) $\lim_{z\to p}(z - p)f(z) = 0$.

Dowód. Implikacje $b) \Rightarrow c) \Rightarrow d)$ są oczywiste, zaś $a) \Rightarrow b)$ wynika z lematu 1b) w §IV.3.

$d) \Rightarrow a)$. Współczynnik c_n szeregu Laurenta funkcji f, o środku w p, spełnia dla wszystkich dostatecznie małych $r > 0$ nierówność $|c_n| \le r^{-n}M(r)$, gdzie $M(r) = \sup\{|f(z) : |z-p| = r\}$; patrz uwaga 1 w §III.6. Ponieważ dalej $rM(r) = \sup\{|f(z)(z-p)| : |z-p| = r\}$, więc warunek d) zapewnia, że $|c_n| \le \lim_{r\to 0} r^{-n}M(r) = 0$ dla $n \le -1$.

Twierdzenie 2 (Casoratiego–Sochockiego–Weierstrassa). *Jeśli f ma w p osobliwość istotną, to obraz $f(V_0)$ dowolnego nakłutego otoczenia $V_0 \subset V$ punktu p jest gęsty w $\mathbb{C}$.*

Dowód. Jeśli obraz $f(V_0)$ nakłutego otoczenia V_0 punktu p nie jest gęsty w $\mathbb{C}$, to jest rozłączny z pewnym dyskiem $D(z_0, r)$. Funkcja $g(z) = 1/(f - z_0)$ jest więc dla $z \in V_0$ poprawnie określona, holomorficzna i przyjmuje wartości w $D(0, 1/r) \setminus \{0\}$. Na podstawie twierdzenia 1c), ma ona w p osobliwość pozorną. Z wniosku 1 w §IV.3 wynika więc, że $1/g$, a stąd i $f_{|V_0} = z_0 + 1/g$, mają w p osobliwość pozorną lub biegun, wbrew założeniu. □

Wniosek 1. *Osobliwość izolowana funkcji f w p jest:*
i) usuwalna wtedy i tylko wtedy, gdy w $\mathbb{C}$ istnieje granica $\lim_{z\to p} f(z)$*;*
ii) biegunem wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim_{z\to p} f(z) = \infty$*;*
iii) istotna wtedy i tylko wtedy, gdy w $\widetilde{\mathbb{C}}$ nie istnieje granica $\lim_{z\to p} f(z)$*.*

Dowód. Część i) udowodniono w twierdzeniu 1, a implikację $\Longrightarrow$ w części iii) –w twierdzeniu 2. W ii), gdy w p jest biegun rzędu n, to funkcja $(z-p)^n f(z)$ przedłuża się do funkcji g, ciągłej w p i takiej, że $g(p) \neq 0$ –wobec czego $\lim_{z\to p} f(z) = \lim_{z\to p} \frac{g(z)}{(z-p)^n} = \infty$.

Implikacje $\Leftarrow$ w ii) i iii) wynikają teraz przez wykluczenie. □

Dodatek do §3: informacja o wielkim twierdzeniu Picarda.

Twierdzenie 1 można znacznie wzmocnić: obraz nakłutego otoczenia punktu istotnie osobliwego nie tylko jest gęsty w $\mathbb{C}$, ale „prawie równy” $\mathbb{C}$:

Twierdzenie 3 (Picarda, wielkie). *Obraz dowolnego otoczenia nakłutego punktu $p \in \mathbb{C}$, przy funkcji mającej w p osobliwość istotną, jest całą płaszczyzną $\mathbb{C}$ z pominięciem być może jednego punktu.*

Twierdzenie to udowodnimy w §VIII.3; tu ograniczymy się do poniższych komentarzy.

Uwaga 1. Nietrudno wywnioskować, że przy założeniach twierdzenia istnieje punkt $q \in \mathbb{C}$ taki, że każda wartość z $\mathbb{C}\setminus\{q\}$ jest przyjmowana w <u>dowolnym</u> otoczeniu nakłutym punktu p – a wiec nieskończenie wiele razy w takim otoczeniu. ⊟

Wniosek 2. *Funkcja $f \in H(\mathbb{C})$, nie będąca wielomianem, przyjmuje nieskończenie wiele razy każdą wartość w $\mathbb{C}$, prócz być może jednej.*

Dowód. Funkcja $z \mapsto f(1/z)$ ma w zerze osobliwość istotną; patrz dalej twierdzenie 2 w §4.

Uwaga 2. „Wartość pomijana” we wniosku 2 może istnieć – np., dla funkcji exp jest nią 0. Podobnie jest z twierdzeniem Picarda i funkcją $z \mapsto \exp(1/z)$, mającą osobliwość istotną.

4 Równouprawnienie nieskończoności (częściowe).

Niech funkcja f będzie holomorficzna w otoczeniu nakłutym V punktu ∞ – czyli w zbiorze, zawierającym pewien pierścień $|z| > r$. Powodując się wnioskiem 1 w §3, przyjmujemy następujące definicje:

Definicja. Powiemy, że f ma **w nieskończoności** (tzn. w punkcie $p = \infty \in \widetilde{\mathbb{C}}$):
osobliwość usuwalną (czy: **pozorną**), gdy w $\mathbb{C}$ istnieje granica $\lim_{z\to\infty} f(z)$;
biegun, gdy $\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty$;
osobliwość istotną, gdy w rozszerzonej płaszczyźnie $\widetilde{\mathbb{C}}$ nie istnieje granica $\lim_{z\to\infty} f(z)$.

Uwaga 1. Przy $j : \widetilde{\mathbb{C}} \to \widetilde{\mathbb{C}}$ oznaczającym homografię $j(z) = 1/z$, rodzaj osobliwości funkcji f w ∞ jest taki sam, jak funkcji $f \circ j$ w zerze – bo j jest homeomorfizmem, zamieniającym ∞ z 0. Stąd i z definicji w §IV.3 wynika

Wniosek 1. *Rozwińmy funkcję f w pierścieniu $|z| > r$ w szereg Laurenta $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n z^n$.*
a) Jeśli f ma w nieskończoności osobliwość pozorną, to $c_n = 0$ dla $n > 0$.
b) Jeśli f ma w nieskończoności biegun, to $c_n \neq 0$ tylko dla skończenie wielu $n > 0$.
c) Implikacje odwrotne też są prawdziwe. □

Wniosek 2. *a) Twierdzenie Casoratiego–Sochockiego–Weierstrassa z §3 pozostaje prawdziwe, gdy $p = \infty$.*
b) f ma w punkcie $p = \infty$ osobliwość pozorną wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim_{z\to\infty} \frac{f(z)}{z} = 0$.

Dowód. Ad a). Ponieważ V_0 jest nakłutym otoczeniem nieskończoności wtedy i tylko wtedy, gdy $j(V_0)$ jest nakłutym otoczeniem zera, więc wystarcza skorzystać z uwagi 1.

Ad b). Z twierdzenia 1 w §3 wiemy, że $f \circ j$ ma w zerze osobliwość pozorną wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim_{w\to 0} wf(1/w) = 0$ – a więc wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim_{z\to\infty} f(z)/z = 0$. ⊟

Definicja. Funkcja f jest **meromorficzna** w zbiorze otwartym $U \subset \widetilde{\mathbb{C}}$, co zapisujemy $f \in M(U)$, gdy jest ona holomorficzna w U poza pewnym zbiorem $S(f)$, dyskretnym w U, i w żadnym punkcie $p \in S(f)$ nie ma osobliwości istotnej. (Zakładamy, że $\infty \in S(f)$ jeśli $\infty \in U$, by można było mówić o holomorficzności w $U \setminus S(f)$.)

Przykład. Funkcja exp jest nie jest meromorficzna w $\widetilde{\mathbb{C}}$, choć jest holomorficzna poza $p = \infty$. Bierze się to stąd, że ma ona w ∞ osobliwość istotną (co wynika n.p. z wniosku 1).

Uwaga 2. a) Funkcja $f \in M(U)$ ma w każdym punkcie $p \in U$ granicę w $\widetilde{\mathbb{C}}$. Wzór $g(z) := \lim_{w\to z} f(w)$ określa funkcję $g : U \to \widetilde{\mathbb{C}}$ o następujących własnościach: zbiór $g^{-1}(\infty)$ jest dyskretny w U, a g jest ciągła w U i holomorficzna w $U \cap \mathbb{C}$ poza $g^{-1}(\infty) \cap \mathbb{C}$. Odwrotnie, każda funkcja $g : U \to \widetilde{\mathbb{C}}$, spełniająca te warunki, wyznacza funkcję $f := g_{|U\cap\mathbb{C}} \in M(U)$, przy czym $S(f) = g^{-1}(\infty) \cup (U \cap \{\infty\})$.

b) Można więc na funkcje $f \in M(U)$ patrzeć jako na pewne funkcje ciągłe $U \to \widetilde{\mathbb{C}}$. W tym ujęciu, nie mają one już „osobliwości" (=punktów nieokreśloności) i mogłyby raczej być nazywane różniczkowalnymi przekształceniami z U w $\widetilde{\mathbb{C}}$. Wymagałoby to spojrzenia na $\widetilde{\mathbb{C}}$ i na $U \subset \widetilde{\mathbb{C}}$ jako na zespolone rozmaitości i zdefiniowania pochodnej $f'(p)$ gdy $p = \infty$ czy $f(p) = \infty$, czego tu nie zrobimy. [10] Wprowadzimy jednak residuum w nieskończoności.

Definicja. Przy oznaczeniach wniosku 1, liczbę $-c_{-1}$ nazywamy **residuum funkcji f w nieskończoności.**

[10] W (częściowej) strukturze algebraicznej w $\widetilde{\mathbb{C}}$, punkt ∞ pozostaje wyróżniony. Z tego powodu, w szeregu definicji i wyników, nadal zachowuje się on odmiennie od pozostałych punktów.

Twierdzenie 1 (Cauchy'ego o residuach, wersja dla $\widetilde{\mathbb{C}} \setminus D$). *Gdy $D \subset \mathbb{C}$ jest dyskiem, a funkcja f jest holomorficza w $\widetilde{\mathbb{C}} \setminus D$ poza zbiorem skończonym S, rozłącznym z $\overline{D}$, to $\int_{\partial D} f = -2\pi \mathrm{i} \sum_{p \in S} \mathrm{res}_p f$.*

Dowód. Niech dysk D_1 będzie tak duży, by $\overline{D} \cup (S \setminus \{\infty\}) \subset D_1$. Jak wiemy, pierścień $P = D_1 \setminus \overline{D}$ jest zbiorem regularnym, skąd na podstawie twierdzenia o residuach z §IV.2, ma miejsce równość $\int_{\partial P} f = 2\pi \mathrm{i} \sum_p \mathrm{res}_p f$, gdzie sumowanie jest po wszystkich punktach $p \in S \cap P = S \setminus \{\infty\}$. A że $\int_{\partial P} = \int_{\partial D_1} - \int_{\partial D}$, to $\int_{\partial D} f = -2\pi \mathrm{i} \sum_p \mathrm{res}_p f + \int_{\partial D_1} f$. Pozostaje skorzystać z równości $\int_{\partial D_1} f = 2\pi \mathrm{i} c_{-1}$, wynikającej z holomorficzności f w pierścieniu $\mathbb{C} \setminus D_1$. (Patrz (8) w §III.6.) □

Wniosek 3. *Gdy funkcja f jest holomorficzna w $\mathbb{C}$ poza zbiorem skończonym, to suma jej residuów (włączając residuum w nieskończoności) jest równa zeru.*

Dowód. Obierzmy mały dysk D tak, by funkcja f była holomorficzna w $\overline{D}$. Wówczas $\int_{\partial D} f = 0$ i teza wynika z twierdzenia 1. □

Zbadajmy najprostsze własności funkcji meromorficznych.

Twierdzenie 2. *Gdy $f \in H(\mathbb{C})$ i istnieje granica $\lim_{z \to \infty} f(z) \in \widetilde{\mathbb{C}}$, to f jest wielomianem.*

Dowód. Z założenia, f rozwija się w $\mathbb{C}$ w szereg Maclaurina $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$. Ponieważ w nieskończoności jest biegun lub osobliwość pozorna, to $c_n = 0$ dla prawie wszystkich $n > 0$, patrz wniosek 1, części a) i b). Stąd wynika teza. □

Twierdzenie 3. *Funkcja, meromorficzna w całej sferze $\widetilde{\mathbb{C}}$, jest sumą wielomianu i skończenie wielu ułamków prostych właściwych – a więc jest funkcją wymierną.*

Powyżej, **funkcją wymierną** nazywamy iloraz dwóch wielomianów (patrz §II.2), natomiast **ułamek prosty właściwy** to funkcja postaci $c/(z-p)^n$, gdzie $p, c \in \mathbb{C}$ i $n \in \mathbb{N}$.

Dowód twierdzenia. Rozważana funkcja, którą nazwijmy f, ma w zwartej przestrzeni $\widetilde{\mathbb{C}}$ pewien skończony zbiór P_0 biegunów. Niech $P = P_0 \setminus \{\infty\}$ oraz

$$Gf \stackrel{def}{=} \sum_{p \in P} G_p f, \quad \text{łączna część osobliwa funkcji } f.$$

Wiemy z uwagi 1i) w §IV.1, że $f - Gf$ przedłuża się do funkcji holomorficznej $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Ponadto, każda z funkcji $G_p f$, a przez to i Gf, jest skończoną sumą ułamków prostych właściwych. Zatem $\lim_{z \to \infty} (Gf)(z) = 0$ i istnieje granica $\lim_{z \to \infty} g(z)$, równa $\lim_{z \to \infty} f(z)$. Na podstawie twierdzenia 2, g jest wielomianem, a $f = g + Gf$ szukanym rozkładem. □

Twierdzenie 3 daje więc rozkład funkcji wymiernej na ułamki proste. Istotne jest też:

Twierdzenie 4. *Funkcja, różnowartościowa i holomorficzna w $\mathbb{C}$ poza zbiorem dyskretnym, jest homografią (ściślej: przedłuża się do homografii).*

Dowód. * Wykorzystywać będziemy zasadę otwartości, którą udowodnimy w §VI.1 w twierdzeniu 2. Oznaczmy rozważany zbiór dyskretny przez A i niech punkt a będzie izolowany w $A \cup \{\infty\}$. (Nie przesądzamy o tym, czy punkt ∞ jest taki; zakładamy jednak, że z A usunęliśmy osobliwości pozorne.) Jeśliby rozważana funkcja f miała w a osobliwość istotną, to obierając rozłączne, niepuste zbiory otwarte $U, V \subset \widetilde{\mathbb{C}}$ tak, by $a \in U$, stwierdzilibyśmy na podstawie twierdzenia Casoratiego-Sochockiego-Weierstrassa, że $f(U \cap \mathbb{C}) \cap f(V \cap \mathbb{C}) \neq \emptyset$, wbrew różnowartościowości f. (Gra rolę to, że zbiór $f(V \cap \mathbb{C})$ jest otwarty, na podstawie przywołanego twierdzenia.) Tak więc f ma w a biegun lub osobliwość pozorną. Jeśliby biegunami były dwa różne punkty a, b, to obierzemy ich rozłączne otoczenia $U, V \subset (\widetilde{\mathbb{C}} \setminus A) \cup \{a, b\}$ i stwierdzimy, znów na podstawie zasady otwartości, że $f(U)$ i $f(V)$ są otoczeniami punktu ∞ w $\widetilde{\mathbb{C}}$. Otoczenia te miałyby poza ∞ jeszcze inne punkty wspólne, znów wbrew różnowartościowości $f_{|\mathbb{C}\setminus A}$. Zatem $\#A \leq 1$, a w $A \cup \{\infty\}$ nie ma osobliwości istotnej i jest tylko jeden biegun –lub żaden. Jeśli w A nie ma bieguna, to z twierdzenia 2 wynika, że f jest wielomianem, a z różnowartościowości f – że $\deg(f) = 1$. Gdy zaś biegunem jest $p \in A$, to składamy f z homografią $1/(z - p)$, by znaleźć się w rozpatrzonej już sytuacji. ⊟

Zadania

1. Udowodnić, że $\mathrm{res}_\infty f = \mathrm{res}_0 g$, gdzie $g(z) := -\frac{1}{z^2} f(\frac{1}{z})$.

2. * Niech funkcja h, holomorficzna w otoczeniu zera, spełnia warunek $h(0) = 0$. Dla $k \geq 1$ i $q \neq 0 \neq p$ zbadać residua funkcji $w \mapsto q^k h(\frac{1}{w-p})/w^k(w - q)$ w punktach $\infty, q, 0, p$.

3. * Patrzmy na funkcje $f \in M(U)$, gdzie U jest obszarem w $\widetilde{\mathbb{C}}$, jako na funkcje z U do $\widetilde{\mathbb{C}}$.

a) Dowieść, że $g \circ f \in M(U)$ dla $f \in M(U)$ i $g \in M(V)$ takich, że $f(U) \subset V$.

b) Gdy $f \in M(U)$ nie jest stałą i $w \in \widetilde{\mathbb{C}}$, to zbiór $f^{-1}(w)$ jest dyskretny w U.

4. * a) Dla funkcji $f \in M(U)$ i punktów $p \in U, w \in \widetilde{\mathbb{C}}$, określmy **krotność** p **jako pierwiastka równania** $f(z) = w$ jako liczbę $k_{h \circ f}(p)$, gdzie $h(z) = z - w$ gdy $w \neq \infty$ i $h(z) = 1/z$ gdy $w = \infty$. Jeśli p jest k–krotnym pierwiastkiem równania $f(z) = q$, a q l–krotnym równania $g(z) = w$, to ilukrotnym jest p pierwiastkiem równania $(g \circ f)(z) = w$?

b) Czy dla każdej homografii h, przeprowadzającej w na 0, określona w a) krotność jest równa $k_{h \circ f}(p)$?

VI KONSEKWENCJE i DOPEŁNIENIA TEORII CAUCHY'ego

1 Zasada stałej krotności, zasada otwartości, zasada maksimum.

Twierdzenie 1 (zasada stałej krotności). *Niech funkcja f będzie holomorficzna w otoczeniu punktu $p \in \mathbb{C}$, będącego n–krotnym pierwiastkiem równania $f(z) = f(p)$ (tzn. będącego zerem n–krotnym funkcji $f - f(p)$). Jeśli $n < \infty$, to istnieje otoczenie U punktu p, przekształcane przez f na pewien dysk $D(f(p), \varepsilon)$ tak, że dla $w \in D(f(p), \varepsilon) \setminus \{f(p)\}$ równanie $f(z) = w$ ma dokładnie n pierwiastków w U, każdy krotności 1. Ponadto, takie otoczenie U można obrać dowolnie małe.*

Dowód. Załóżmy dodatkowo, że $f(p) = 0$ (inaczej zastąpimy f przez $f - f(p)$). Z zasady izolowanych zer wynika, że gdy $r > 0$ jest dostatecznie małe, to funkcje f i f' nie zerują się w $\overline{D}(p, r) \setminus \{p\}$. W szczególności, $f(z) \neq 0$ dla $z \in \partial D(p, r)$, wobec czego liczba $\varepsilon := \frac{1}{2} \inf\{|f(z)| : |z - p| = r\}$ jest dodatnia. Przyjmijmy $U := D(p, r) \cap f^{-1}(D(0, \varepsilon))$. Zauważamy, że:

a) Dla $w \in D(p, \varepsilon)$, funkcje $f - w$ i f mają na podstawie twierdzenia Rouchégo tyle samo zer w $\overline{D}(p, r)$, z uwzględnieniem krotności. Oznaczmy tę liczbę zer przez k.

b) Jedynym zerem funkcji f w $\overline{D}(p, r)$, i to n–krotnym, jest p. Stąd $k = n$.

c) Dla $w \in D(0, \varepsilon) \setminus \{0\}$, każde zero funkcji $f - w$ w $\overline{D}(p, r)$ jest jednokrotne (bo leży poza $\{p\}$, a $f'(z) \neq 0$ dla $z \in \overline{D}(p, r) \setminus \{p\}$; korzystamy z lematu 1c) w §IV.3).

Ponieważ zerami funkcji $f - w$ są pierwiastki równania $f(z) = w$ (i odwrotnie), więc ε i $U \subset D(p, r)$ spełniają żądane warunki. □

Wniosek 1. *Niech funkcja f będzie holomorficzna w otoczeniu punktu p. Jeśli $f'(p) \neq 0$, to f przekształca pewne otoczenie punktu f różnowartościowo na otoczenie puntu $f(p)$. Imlikacja odwrotna też jest prawdziwa.* ⊟

Twierdzenie 2 (zasada otwartości). *Gdy $U \subset \mathbb{C}$ jest obszarem i funkcja $f \in H(U)$ nie jest stała, to $f(U)$ jest obszarem, a przekształcenie f jest otwarte.*

Dowód. Dla każdego zbioru otwartego $V \subset U$ i punktu $p \in V$, twierdzenie 1 daje otoczenie $U_p \subset V$ takie, że $f(U_p)$ otoczeniem punktu $f(p)$. (Gra rolę to, że krotność f jako pierwiastka równania $f(z) = f(p)$ jest skończona, patrz wniosek 1 w §V.2.) Zbiór $f(V)$ jest więc otoczeniem każdego swego punktu, a zbiór $f(U)$ jest też spójny, jako obraz zbioru spójnego przy funkcji ciągłej. □

Twierdzenie 3 (zasada maksimum). *Przy założeniach twierdzenia 2, funkcja $|f|$ nie przyjmuje maksimum w U, zaś minimum przyjmuje w swych miejscach zerowych (jeśli je ma).*

Dowód. Niech $p \in U$. Jak już wiemy, zbiór $f(U)$ zawiera pewien dysk o środku w $f(p)$. Oczywiście, do dysku tego należy punkt w taki, że $|w| > |f(p)|$. Zatem $|f(p)| < \sup_{z \in U} |f(z)|$, dla każdego $p \in U$. Tak samo, gdy $f(p) \neq 0$, to $|f(p)| > \inf_{z \in U} |f(z)|$. □

Uwaga 1. a) Z dowodu wynika, że przy założeniach twierdzenia 2 funkcja $|f|$ nie ma w U punktów lokalnego maksimum, a punktami jej lokalnego minimum są jej miejsca zerowe.

b) Tak samo, funkcje $\operatorname{Re} f$ i $\operatorname{Im} f$ nie mają w U punktów lokalnego ekstremum.

c) Wyżej, zakłada się niestałość f. Niekiedy jednak wygodniej jest a) czy b) stosować w takiej postaci: jeśli $f \in H(U)$ i któraś z funkcji $|f|, \pm \operatorname{Re} f, \pm \operatorname{Im} f$ ma w U punkt lokalnego maksimum, to funkcja f jest stała. (Nadal, U jest obszarem.)

d) Stąd i z twierdzenia o przyjmowaniu kresów przez funkcję ciągłą na zbiorze zwartym wynika, że gdy funkcja f jest ciągła na domknięciu ograniczonego obszaru $U \subset \mathbb{C}$ i holomorficzna w U, to funkcje $|f|, \pm \operatorname{Im} f, \pm \operatorname{Re} f$ swój kres górny przyjmują na brzegu zbioru U. (Dla niestałej funkcji f przyjmują go bowiem w punktach zbioru zwartego $\overline{U}$, lecz nie w U.)

Twierdzenie 4 (zasada maksimum dla funkcji harmonicznych). *Rzeczywista funkcja harmoniczna, określona w obszarze i mająca w nim punkt lokalnego ekstremum, jest stała.*

Dowód. Niech Z oznacza domknięcie, w rozważanym obszarze G, punktów lokalnego ekstremum badanej funkcji harmonicznej u. Gdy $z \in Z$ i za D obrać dysk wokół z, zawarty w G, to z wniosku 1 w §III.3 wraz z twierdzeniem 1a) w §III.5 wynika, że $u_{|D} = \operatorname{Re} f$ dla pewnej funkcji $f \in H(D)$ – a tym samym funkcja u jest stała na D, na podstawie części c) uwagi. Funkcja u jest więc stała na otoczeniu każdego punktu $z \in Z$, a zbiór Z jest otwarty w G. Ponieważ jest on też domknięty i niepusty (z konstrukcji i założenia), to jest równy G, a funkcja jest stała (bo jest lokalnie stała; dwukrotnie wykorzystano też spójność obszaru G).

Wniosek 2. *Dwie funkcje, harmoniczne w obszarze ograniczonym i równe i ciągłe w punktach jego brzegu, są w tym obszarze równe. Tak samo jest z funkcjami holomorficznymi.*

Dowód. Do różnicy funkcji stosujemy twierdzenie 4 lub 3, wykorzystując też zwartość $\overline{U}$. ⊟

Zadanie 1. a) Udowodnić, że obraz spójnego zbioru otwartego $U \subset \widetilde{\mathbb{C}}$ przy niestałej funkcji meromorficznej f jest zbiorem otwartym w $\widetilde{\mathbb{C}}$. (Wskazówka: otwartość wystarcza sprawdzać w otoczeniach punktów $p \in U$. Gdy $p \neq \infty \neq f(p)$, wykorzystać twierdzenie 1 i lemat Riemanna z §V.4. Pozostałe przypadki sprowadzić do powyższego przez rozpatrzenie funkcji $f \circ j$ lub $j \circ f$ lub $j \circ f \circ j$, gdzie j to inwersja $z \mapsto 1/z$.)

b) Podobnie, teza twierdzenia 1 pozostaje prawdziwa, gdy f ma w p biegun rzędu n.

2 Twierdzenie Liouville'a, nierówności Cauchy'ego, Zasadnicze Twierdzenie Algebry

Twierdzenie 1 (Liouville'a). *Jedynymi ograniczonymi funkcjami* **całkowitymi** *(tzn., holomorficznymi w całej płaszczyźnie $\mathbb{C}$) są funkcje stałe.*

Dowód. Badana funkcja całkowita f rozwija się w $\mathbb{C}$ w szereg Maclaurina $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, gdzie dla $n \geq 0$ i $r > 0$ jest $|c_n| \leq M r^{-n}$, przy $M := \sup |f|$. (Patrz nierówności Cauchy'ego–Laurenta w §III.6.) A że $M < \infty$, to $|c_n| \leq \inf_r M/r^n = 0$ dla $n \geq 1$, skąd $f = c_0$.

Uwaga 1. Odnotujmy, że funkcja exp, różna od stałej i holomorficzna w całej płaszczyźnie, jest ograniczona na każdej półpłaszczyznie $\operatorname{Re} z \leq c$.

Zadanie 2. a) Wzmocnić twierdzenie Liouville'a następująco: gdy obraz $f(\mathbb{C})$ funkcji całkowitej f nie jest zbiorem gęstym w $\mathbb{C}$, to $f = \text{const}$. (Wskazówka: złożyć f z homografią.)

b) Wywnioskować, że obrazem niestałej funkcji harmonicznej $u : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ jest $\mathbb{R}$.

Ćwiczenie. Niech funkcja $f \in H(\mathbb{C})$ będzie ograniczona. Dla danych $a, b \in \mathbb{C}$ dowieść, że $\lim_{r\to\infty} \int\limits_{|w|=r} \frac{f(w)}{(w-a)(w-b)}\, dw = 0$ i użyć twierdzenia o residuach do uzyskania jeszcze innego dowodu twierdzenia Liouville'a.

Uwaga 2. Wykorzystane wyżej nierówności Laurenta – Cauchy'ego, wraz ze wzorami Cauchy'ego – Taylora ((9) i (10) w §III.6), dają następujące **nierówności Cauchy'ego**:

$$\text{gdy } f \in H(\overline{D}(p,r)), \text{ to } |f^n(p)| \leq \frac{n!}{r^n} \|f\|_{\partial D(p,r)} \text{ dla } n \geq 0. \tag{1}$$

Twierdzenie 2 („Zasadnicze twierdzenie algebry"). *Niech $f(z) = c_0 + c_1 z + \ldots + c_n z^n$, gdzie $n \geqslant 1$ i $c_n \neq 0$. Wówczas $f(z_0) = 0$ dla pewnego $z_0 \in \mathbb{C}$.*

Podamy trzy dowody, wykorzystujące własności funkcji analitycznych.

Dowód, oparty na twierdzeniu Liouville'a. W przeciwnym razie $1/f \in H(\mathbb{C})$; a że $\sup_{z\in\mathbb{C}} |1/f(z)| < \infty$ (bo $\lim_{z\to\infty} 1/f(z) = 0$), to $1/f = \text{const}$ na podstawie twierdzenia Liouville'a. Jest to sprzeczne z tym, że $n \geqslant 1$.

Dowód, oparty na zasadzie maksimum. Z zasady tej wynika, że f ma zero w dysku $D = D(0,R)$, o ile $|f(z)| \geq |c_0| = |f(0)|$ dla wszystkich $z \in \partial D$. Ponieważ $\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty$, więc ostatni warunek jest spełniony dla dostatecznie dużych R – co dowodzi tezy.

Dowód, oparty na twierdzeniu Rouchégo. Na okręgu $|z| = R$ o dostatecznie dużym promieniu, $|c_n z^n| > |\sum_{n=0}^{n-1} c_k z^k|$, skąd f ma w $D(0,R)$ tyle zer (uwzględniając krotności), co $c_n z^n$ –a więc n. Jako zadanie pozostawiamy udowodnienie, że żądany warunek jest spełniony już dla $R = M + 1$, gdzie $M = \max\{|c_k/c_n| : k = 0, \ldots, n-1\}$. (Wskazówka: dla $R > 1$ zachodzą nierówności $|\sum_{n=0}^{n-1} c_k R^k| \leq |c_n| R^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} |c_k/c_n| R^{-n+k+1} < |c_n| R^{n-1} M/(1 - \frac{1}{R})$.)

Zadanie 3. a) Udowodnić, że jeśli funkcja f rozwija się w pierścieniu $|z| > r$ w szereg Laurenta $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n z^n$ i spełnia warunek $\lim_{z\to\infty} z^k f(z) = 0$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$, to $c_n = 0$ dla $n \leq -k$ i wobec tego $|f(z)| \leq C/|z|^{k+1}$ dla pewnej stałej C i dostatecznie dużych $|z|$.

b) Wzmocnić twierdzenie Liouville'a następująco: jeśli $f \in H(\mathbb{C})$ i $|f(z)| \leq C|z|^s$ dla pewnych $s, C \geq 0$ i wszystkich dostatecznie dużych $|z|$, to f jest wielomianem stopnia $\leq \lfloor s \rfloor$.

3 Twierdzenie Morery i konsekwencje

Twierdzenie 1 (Morery). *Funkcja $f : U \to \mathbb{C}$, ciągła w zbiorze otwartym $U \subset \mathbb{C}$, jest holomorficzna wtedy i tylko wtedy, gdy $\int_{\partial\triangle} f = 0$ dla każdego (pełnego) trójkąta $\triangle \subset U$.*

Dowód. ($\Rightarrow$) Wynika to z lematu Goursata.
($\Leftarrow$) Gdy $D \subset U$ jest dyskiem, to $f_{|D}$ jest pochodną funkcji holomorficznej, na podstawie twierdzenia 2 w §III.4. Tym samym $f_{|D}$ jest funkcją holomorficzną (korzystamy tu z wniosku 1 w §III.6 i wniosku 1 w §I.5.) Ponieważ każdy punkt $p \in U$ ma otoczenie w U, będące dyskiem, więc funkcja f ma w każdym punkcie pochodną. $\square$

Oto dwa przykładowe zastosowania twierdzenia Morery.

Twierdzenie 2 (Weierstrassa)**.** *Niech U będzie otwartym podzbiorem płaszczyzny $\mathbb{C}$ i niech $f_n \in H(U)$ dla $n \geq 1$. Jeśli ciąg (f_n) jest zbieżny niemal jednostajnie do funkcji $f : U \to \mathbb{C}$, to funkcja ta jest holomorficzna, zaś ciąg (f_n') jest zbieżny niemal jednostajnie do funkcji f'.*

Dowód. a) Ciągłość f wynika z uwagi 1 z §I.3. Pozostaje sprawdzić, czy dla dowolnego trójkąta $\triangle \subset U$ spełniony jest warunek $\int_{\partial\triangle} f = 0$. Warunek ten spełnia jednak każda z funkcji $f_n \in H(U)$, zaś na podstawie wniosku 1 w §III.1, $\int_{\partial\triangle} f_n \to \int_{\partial\triangle} f$. Zatem $\int_{\partial\triangle} f = 0$.

b) Pozostaje dowieść, że gdy $K \subset U$ jest zbiorem zwartym, to $\|f' - f_n'\|_K \to 0$. W tym celu przyjmijmy $r = \frac{1}{3}\operatorname{dist}(K, \mathbb{C} \setminus U)$ oraz $L = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{dist}(z, K) \leq r\}$. Wtedy $L \subset U$ i z nierówności Cauchy'ego wynika, że $|f'(z) - f_n'(z)| \leq \frac{1}{r}\|f - f_n\|_L$ dla $z \in K$. (Nierówność Cauchy'ego odnosimy do funkcji $f - f_n$, określonej na kole domkniętym $\overline{D}(z, r) \subset L$.) A że ciąg (f_n) jest na <u>zwartym</u> zbiorze L jednostajnie zbieżny do f, to $\|f' - f_n'\|_K \to 0$. $\square$

Twierdzenie 3. *Niech $L \subset \mathbb{C}$ będzie prostą, a $U \subset \mathbb{C}$ – zbiorem otwartym. Gdy funkcja $f : U \to \mathbb{C}$ jest holomorficzna w $U \setminus L$ i ciągła w U, to jest holomorficzna w U.*

Dowód. Oznaczmy przez U^+ i U^- przecięcia zbioru U z półpłaszczyznami otwartymi, na które prosta L dzieli płaszczyznę. By sprawdzić, że założenie twierdzenia Morerey jest spełnione, rozważymy możliwe położenia trójkąta $\triangle$.

i) Gdy $\triangle \subset U^+$ lub $\triangle \subset U^-$, to $\int_{\partial\triangle} f = 0$ na mocy lematu Goursata.

ii) Gdy $\triangle \subset U^+ \cup L$ lub $\triangle \subset U^- \cup L$, to we wnętrzu trójkąta $\triangle$ budujemy trójkąty $\triangle_n$ ($n \geqslant 1$), których wierzchołki dążą do wierzchołków trójkąta $\triangle$. Z i) wynika, że

$$\int_{\partial\triangle} f = \lim_{n\to\infty} \int_{\partial\triangle_n} f = \lim_{n\to\infty} 0 = 0.$$

iii) Jeśli $\triangle$ przecina zarówno U^+, jak i U^-, to dzielimy trójkąt $\triangle$ na trzy mniejsze, jak na rysunku. Jak już wiemy, $\int_{\partial\triangle_i} f = 0$ dla $i = 1, 2, 3$, skąd $\int_{\partial\triangle} f = \sum_{i=1}^{3} \int_{\partial\triangle_i} f = 0$. $\square$

Uwaga 1. * Ta sama teza pozostaje słuszna, gdy L jest okręgiem. Istotnie, by sprawdzić różniczkowalność w punkcie $p \in L$ możemy obrać taką homografię h, przeprowadzającą ten okrąg na pewną prostą L_1, by $h(p) \neq \infty$. Wówczas założenia twierdzenia są spełnione przez zbiór $U_1 := h(U) \setminus \{\infty\}$ i funkcję $f_1 := f \circ h^{-1}$. Funkcja f_1 ma więc pochodną w punkcie $h(p)$, a funkcja $f = f_1 \circ h^{-1}$ ma ją w punkcie p.

Poniższą **zasadę symetrii Riemanna–Schwarza** [11] sformułujemy w wersji dotyczącej opisanej w §II.2 symetrii s_T względem okręgu w $\widetilde{\mathbb{C}}$. Zbiór U nazwiemy symetrycznym względem takiego okręgu T, gdy $s_T(U) = U$; para zaś punktów z_1, z_2 jest symetryczna względem T, gdy symetryczny względem T jest zbiór $\{z_1, z_2\}$. Czytelnik może przy pierwszym czytaniu chcieć ograniczyć się do przypadku, gdy T jest prostą $\operatorname{Im} z = 0$; wtedy symetria s_T jest zwykłą symetrią zwierciadlaną $z \mapsto \overline{z}$.

Twierdzenie 4. *Niech obszar $U \subset \mathbb{C}$ będzie symetryczny względem okręgu T_1, a funkcja ciągła $f : U \to \mathbb{C}$ przeprowadza $T_1 \cap U$ w podzbiór okręgu T_2. Wówczas równoważne są warunki:*

a) funkcja f jest holomorficzna,

b) funkcja f jest holomorficzna na jednej z dwóch składowych zbioru $U \setminus T_1$ i przeprowadza pary punktów z U, symetryczne względem T_1, w pary symetryczne względem T_2.

Dowód gdy $T_1 = T_2 = \mathbb{R}$. b) $\Longrightarrow$ a). Oznaczmy rozważaną składową przez U^+, a pozostałą przez U^-. Ze względu na założoną własność symetrii, $f(z) = \overline{f(\overline{z})}$ dla $z \in U^-$. Funkcja f jest więc holomorficzna nie tylko w U^+, ale i w U^-, patrz zadanie 2 w §I.2. Stąd $f \in H(U)$ na podstawie twierdzenia 3, zastosowanego przy $L = \mathbb{R}$.

a) $\Longrightarrow$ b). Zadajmy funkcję $g : U \to \mathbb{C}$ wzorem $g(z) = f(z)$ dla $z \in U \setminus U^-$ i $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$ dla $z \in U \setminus U^+$. Funkcja g jest poprawnie określona i ciągła (oba wzory dają ten sam wynik na części wspólnej dziedzin). Jak udowodniono wyżej, $g \in H(U)$, skąd $f = g$ na podstawie zasady identyczności –bo $f(z) = g(z)$ dla $z \in U^+$. A że g spełnia żądany warunek symetrii, to spełnia go i f.

Przypadek ogólny.* Sprowadzamy go do powyższego jak w uwadze 1, przeprowadzając okrąg $T_i\,(i = 1, 2)$ homografią h_i na prostą $\mathbb{R}$ i stosując powyższy przypadek szczególny do przekształcenia $h_2 \circ f \circ h_1^{-1}$. (Gra oczywiście rolę to, że homografie zachowują symetrię względem okręgów; patrz uwaga 1 w §II.3.) $\boxminus$

4 Twierdzenie Montela–Osgooda–Stieltjesa.

Twierdzenie 1 (Montela–Osgooda–Stieltjesa). *Gdy zbiór $U \subset \mathbb{C}$ jest otwarty i funkcje $f_n \in H(U)$, $n \geq 1$, są wspólnie ograniczone (tzn. istnieje stała M taka, że $|f_n| < M$ dla $n = 1, 2 \ldots$), to z ciągu (f_n) można wybrać podciąg zbieżny niemal jednostajnie.*

W dowodzie wykorzystamy następujący

Lemat 1. *Gdy $f \in H(\overline{D}(p, r))$ i $|f| \leq M$, to $|f(z_1) - f(z_2)| \leq (2M/r)|z_1 - z_2|$ dla $z_1, z_2 \in D(p, r/2)$.*

[11] Por. uwaga 1 w §II.3. Według Ahlforsa, Riemann i Schwarz rozważali dalsze szczególne przypadki, a zasadę sformułował Caratheodory. W wielu pracach nazywana jest ona „zasadą Schwarza–Caratheodory'ego".

Dowód. Ustalmy punkty $z_1, z_2 \in D(p, r/2)$. Ponieważ $[z_1, z_2] \subset D(p, r/2)$, więc dla $w \in [z_1, z_2]$ zachodzi $\overline{D}(w, r/2) \subset D(p, r)$, wobec czego $|f'(w)| \le \frac{M}{r/2}$ na podstawie nierówności Cauchy'ego. Stąd $|f(z_1) - f(z_2)| \le \sup\{|f'(w)| : w \in [z_1, z_2]\}|z_1 - z_2| \le \frac{2M}{r}|z_1 - z_2|$. □

Dowód twierdzenia 2. Czytelnik znający twierdzenie Arzeli–Ascoli'ego bez trudu uzyska tezę, bo z lematu 1 wynika *jednakowa ciągłość* rodziny $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$. Podamy jednak dowód nie odwołujący się wprost to tego twierdzenia, w dwóch krokach.

a) Obierzmy przeliczalny zbiór $P = \{p_1, p_2, \dots\}$, gęsty w U. Z ograniczonego ciągu $(f_n(p_1))$ można wybrać podciąg zbieżny $(f_{n1}(p_1))$. Indukcyjnie, dla $i \ge 2$ utwórzmy podciąg (f_{ni}) ciągu $(f_{n,i-1})$ tak, by ciąg $(f_{ni}(p_i))_{n=1}^{\infty}$ był zbieżny. Podciąg (f_{nn}) ciągu (f_n) jest zbieżny w każdym punkcie p_i. Możemy więc zakładać, że już ciąg (f_n) ma tę własność (inaczej zastąpimy go przez podciąg (f_{nn}).

b). Niech $K \subset U$ będzie zbiorem zwartym (dowolnym, lecz ustalonym); udowodnimy, że przy poczynionym założeniu ciąg $(f_{n|K})$ jest zbieżny jednostajnie – co zakończy dowód.

W tym celu ustalmy liczbę $r < \operatorname{dist}(K, \mathbb{C} \backslash U)$. Dla dowolnej liczby $\varepsilon \in (0, r/2)$ możemy z pokrycia $\{D(p, \varepsilon)\}_{p \in P}$ zbioru K wybrać pokrycie skończone $\{D(p, \varepsilon)\}_{p \in P_0}$. Ponieważ każdy ze skończenie wielu ciągów $(f_n(p))$, $p \in P_0$, jest zbieżny, więc istnieje liczba n_0 taka, że

$$|f_k(p) - f_l(p)| \le \varepsilon \quad \text{dla } k, l > n_0 \ \text{ i } \ p \in P_0.$$

Oznaczmy przez M stałą taką, że $|f_n| < M$ dla każdego n. Gdy $z \in K$, to istnieje punkt $p \in P_0 \cap D(z, \varepsilon)$ i na podstawie lematu zastosowanego do $g := f_n$,

$$|f_n(z) - f_n(p)| \le (4M/r)|z - p| < (4M/r)\varepsilon \quad \text{dla } n = 1, 2 \dots$$

Zatem gdy $k, l > n_0$, to

$$|f_k(z) - f_l(z)| \le |f_k(z) - f_k(p)| + |f_k(p) - f_l(p)| + |f_l(p) - f_l(z)| \le \frac{4M\varepsilon}{r} + \varepsilon + \frac{4M\varepsilon}{r}$$

Wobec dowolności punktu $z \in K$ wynika stąd, że ciąg $(f_{n|K})$ spełnia w normie $\| \, \|_K$ warunek Cauchy'ego, czyli jest zbieżny jednostajnie. □

Uwaga 1. * a) Założenie wspólnej ograniczoności funkcji $f_n \in H(U)$ można w twierdzeniu 2 osłabić tak: funkcje te są **lokalnie wspólnie ograniczone**, tzn. dla każdego punktu $p \in U$ istnieje jego otoczenie D takie, że $\sup_n ||f_n||_D < \infty$. Wynika to z obecnej wersji twierdzenia, bo funkcje spełniające osłabiony warunek są wspólnie ograniczone na każdym zbiorze zwartym $K \subset U$ (dlaczego?).

b) To samo założenie zostało w zasadniczy sposób osłabione przez Montela: wystarczające jest istnienie dwóch punktów płaszczyzny $\mathbb{C}$, nie będących wartością żadnej z funkcji f_n. □

Ćwiczenie. Niech $\mathcal{F}$ będzie rodziną funkcji holomorficznych na dysku $D = \{z : |z| < 1\}$, taką, że $|f(0)| < 20.14$ i $|f'(z)|/(1 - |z|^2) < 2014$ dla $f \in \mathcal{F}$ i $z \in D$. Dowieść, że z każdego ciągu $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ można wybrać podciąg zbieżny niemal jednostajnie.

Wniosek 1 (twierdzenie G. Vitaliego)**.** *Niech ciąg (f_n) funkcji holomorficznych w obszarze $U \subset \mathbb{C}$ będzie zbieżny w punktach zbioru $P \subset U$ i lokalnie wspólnie ograniczony w U. Jeśli zbiór P ma w U punkt skupienia, to ciąg (f_n) jest niemal jednostajnie zbieżny w U.*

Dowód. W przeciwnym razie, na mocy twierdzenia 2 i uwagi 1a) istniałyby dwa niemal jednostajnie zbieżne podciągi ciągu (f_n), których granice są różne. Przeczy to zasadzie identyczności, bo graniczne funkcje są równe na P i holomorficzne (patrz twierdzenie 2 w §3).

Przykład. Niech $f_n(z) := (1 + \frac{z}{n})^n$ dla $z \in \mathbb{C}$. Z AM 1 wiemy, że ciąg (f_n) jest zbieżny na $(0, \infty)_{\mathbb{R}}$ i jest lokalnie wspólnie ograniczony (bo $|f_n(z)| \le (1 + \frac{|z|}{n})^n \le \mathrm{e}^{|z|}$). Z twierdzenia Vitaliego i zasady identyczności wynika więc, że jest on niemal jednostajnie zbieżny do funkcji exp – bo graniczna funkcja holomorficzna pokrywa się z exp na półprostej $(0, \infty)_{\mathbb{R}}$.

Zadanie 1. a) Dowieść, że teza wniosku 1 pozostanie prawdziwa, jeśli $P = \{p\}$, lecz ciąg k–tych pochodnych $(f_n^{(k)}(p))_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny, dla każdego $k \ge 0$. (Wskazówka: w miejsce zasady identyczności, do różnicy funkcji granicznych zastosować końcową część wniosku 1 w §V.1.)

b) Dowieść, że gdy rodzina $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(\mathcal{U})$ jest lokalnie wspólnie ograniczona, to rodzina $\{f' : f \in \mathcal{F}\}$ też jest taka. (Wskazówka: dowód lematu 1.)

c) Podobnie, gdy szereg $\sum_n f_n$ funkcji holomorficznych jest niemal normowo zbieżny w U, to szereg $\sum_n f_n'$ – też. (Tu i w b), $U \subset \mathbb{C}$ jest zbiorem otwartym.)

Ćwiczenie.* Niech $U \subset \mathbb{C}$ będzie obszarem, $J \subset \mathbb{R}$ przedziałem ograniczonym, a $G : U \times J \to \mathbb{C}$ ograniczoną funkcją ciągłą, taką, że dla każdego $z \in U$ istnieje całka niewłaściwa $g(z) := \int_J G(z,t)\mathrm{d}t$. Dowieść, że jeśli dla każdego $t \in J$ funkcja $U \ni z \mapsto G(z,t)$ jest holomorficzna, to funkcja $U \ni z \mapsto g(z)$ też jest holomorficzna. (Wskazówka: dla zwartego przedziału J – twierdzenie Morery; dla niezwartego – twierdzenie Vitaliego.)

5 Rozwinięcia funkcji meromorficznych w sumy i iloczyny.

Z zadania 2 w §IV.6 wiemy, że $\sum_{n\in\mathbb{Z}}(n-w)^{-2} = \pi^2/\sin^2(\pi w)$ i $\sum_{n\in\mathbb{Z}}(w^2-n^2)^{-1} = \pi \operatorname{ctg}(\pi w)/w$ dla $w \notin \mathbb{Z}$. Traktując parametr w jako zmienną $z \notin \mathbb{Z}$, uzyskujemy tożsamości

$$\pi \operatorname{ctg}(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} = \frac{1}{z} + \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} (\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}); \qquad \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2} \tag{2}$$

przy czym środkową równość uzyskujemy łącząc w pary składniki $\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}$ i $\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n}$. (Gra rolę bezwględna zbieżność środkowego szeregu.) Ostatnią równość otrzymać też można różniczkując drugi szereg, w oparciu o twierdzenie Weierstrassa.

Definicja. Niech $(g_s)_{s\in S}$ będzie rodziną funkcji, z kórych każda jest określona na (zależnym od s) podzbiorze zbioru U. Powiemy, że szereg $\sum_{s\in S} g_s$ jest **niemal normowo zbieżny w** U, jeśli dla każdego zbioru zwartego $K \subset U$ tylko skończenie wiele funkcji g_s nie jest określonych wszędzie w K i suma $\sum_t ||g_t||_K$ K–norm pozostałych funkcji jest skończona. (Gdy $U = \mathbb{C}$, wystarcza ograniczyć się tu do zbiorów $K = \overline{D}(0,r)$, dla $r \in \mathbb{N}$ – dlaczego?)

Przykład 1. Szeregi w (2) są niemal normowo zbieżne w $\mathbb{C}$. N.p., dla szeregu $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}$ wynika to stąd, że $|z-n| \geq |r-n|$ gdy $|z| \leq r$ i $n \notin [-r, r]$, zaś $\sum_{n>r} \frac{1}{(r-n)^2} < \infty$.

Uwaga 1. a) W porównaniu z §I.3 opuszczono założenie, że funkcje g_s są określone wszędzie w U. Obecna zbieżność nadal jednak pozwala na zbiorze $\bigcap_s \mathrm{dom}(g_s)$ określić funkcję $g = \sum_s g_s$, niezależną od kolejności sumowania, przy czym we wnętrzu zbioru $\bigcap_s \mathrm{dom}(g_s)$ szereg $\sum_s g_s'$ jest niemal normowo zbieżny do g'. (Por. uwagę 2 w §I.3, twierdzenie Weierstrassa i zadanie 1c) w §4.)

b) Niech szereg $\sum_{s\in S} g_s$ będzie niemal normowo zbieżny w U. Jeśli wszystkie funkcje g_s są określone i holomorficzne w zbiorze U poza jego dyskretnym podzbiorem P, to funkcja $f := \sum_s g_s$ też jest taka. (Patrz wyżej.)

c) Jeśli ponadto $P = S$ i dla każdego punktu $p \in P$ funkcja g_p jest holomomorficzna w $U \setminus \{p\}$, to powyższa funkcja $f = \sum_p g_p$ spełnia warunek $G_p f = G_p g_p$ dla $p \in P$ – bo $f = g_p + h_p$, gdzie funkcja $h_p := \sum_{q\neq p} g_q$ okazuje się być holomorficzna w otoczeniu $U \setminus (P \setminus \{p\})$ punktu p.

Uwaga ta ma ważną konsekwencję:

Twierdzenie 1 (Mittag–Lefflera). *Dla $p \in P$, gdzie P jest zbiorem dyskretnym w $\mathbb{C}$, niech będzie dana funkcja f_p, holomorficzna w nakłutym otoczeniu punktu p. Wówczas istnieje funkcja $f \in H(\mathbb{C} \setminus P)$ taka, że $G_p f = G_p f_p$ dla $p \in P$.*

Dowód. Niech $D_n = \{z : |z| < n\}$. Obierzmy liczby $\varepsilon_p > 0$ tak, by $\sum_{p\in P} \varepsilon_p < \infty$, i dla $p \in P \setminus \overline{D}_1$ oznaczmy przez $n(p)$ największą liczbę naturalną, mniejszą niż $|p|$. Ponieważ funkcja $G_p f_p$ jest holomorficzna w $\overline{D}_{n(p)}$, więc można obrać wielomian W_p (sumę częściową jej szeregu Maclaurina tak), by $||G_p f_p - W_p||_{\overline{D}_{n(p)}} < \varepsilon_p$. Dla $p \in \overline{D}_1$ przyjmijmy $W_p = 0$. Wówczas dla każdego $n \geq 2$ zachodzi $\sum_{|p|>n} ||G_p f_p - W_p||_{\overline{D}_n} \leq \sum_p \varepsilon_p < \infty$, skąd szereg funkcji $g_p := G_p f_p - W_p$ jest niemal normowo zbieżny w $\mathbb{C}$, a jego suma f ma żądane własności, na podstawie uwagi 1c). (Korzystamy z tego, że $G_p g_p = G_p f_p$.) □

Odnotujmy, że gdy funkcje f_p są meromorficzne, to otrzymana funkcja f też jest taka, a równość $f = \sum_p (G_p f_p - W_p)$ z dowodu twierdzenia jest przedstawieniem f w postaci sumy szeregu funkcji wymiernych (zbieżnego niemal normowo).

UWAGA: TU SKOŃCZYŁEM WYKŁAD 12, przy czym na dowód twierdzenia nie starczyło czasu, a opuściłem też koniec §4. (Wierniejszy opis wykładu jest w pliku Wyklad11-13.pdf.) Nie podejmę już dalszych tematów rozdziału VI.

Opiszemy, jak takie przedstawienia wykorzystać do rozłożenia funkcji meromorficznej w nieskończony iloczyn funkcji wymiernych. Badać będziemy **iloczyny nieskończone** (czyli wyrażenia) $\prod_{n=1}^{\infty}(1+f_n)$, gdzie f_n to funkcje holomorficzne, określone w pewnym obszarze U. O takim iloczynie mówimy, że jest **bezwzględnie zbieżny** w U (odpowiednio: **niemal normowo zbieżny** w U), gdy szereg $\sum_n f_n$ ma tę własność.

Uwaga 2. Niech $\Pi_0 = 1$ i $\Pi_n := (1+f_1)...(1+f_n)$ dla $n \geq 1$. Z zadania 1 w §I.1 wynika, że

$$|\Pi_n| \leq \mathrm{e}^{\sum_{i=1}^{n}|f_i|} \ \text{ i } \ |\Pi_n - \Pi_{n-1}| \leq |f_n|\mathrm{e}^{\sum_{i=1}^{n-1}|f_i|}, \text{ zaś gdy } \sum_i |f_i| < 1/2, \text{ to } |\Pi_n| \geq 1/2. \quad (3)$$

Gdy więc $\sum_n |f_n| < \infty$, to szereg $\Pi_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(\Pi_n - \Pi_{n-1})$ jest bezwzględnie zbieżny; jego sumę $\Pi = \lim_n \Pi_n : U \to \mathbb{C}$ też oznaczymy $\prod_{n=1}^{\infty}(1+f_n)$. (Podobnie $\sum_n f_n$ oznacza i szereg, i jego sumę.)

Gdy szereg $\sum_n f_n$ jest niemal normowo zbieżny, to szereg $\Pi_0 + \sum_n(\Pi_n - \Pi_{n-1})$ też, a dla każdego $p \in U$ i dostatecznie dużych N, funkcja $|\prod_{n=N}^{\infty}(1+f_n)|$ jest większa od $1/2$ na zadanym zwartym otoczeniu tego punktu. (Wykorzystano ostatnie dwie części (3).) Ponieważ $\Pi = \prod_{n=1}^{N-1}(1+f_n) \cdot \prod_{n=N}^{\infty}(1+f_n)$ to wynika stąd, że wtedy $\Pi \in H(U)$ i krotność punktu p jako zera funkcji Π jest sumą, po n, jego krotności jako zera funkcji $1+f_n$. $\boxminus$

Przykład 2. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}z^2$ jest niemal normowo zbieżny w $\mathbb{C}$, a funkcje $\frac{1}{n^2}z^2$ są całkowite, więc funkcja $\Pi(z) := z\prod_{n=1}^{\infty}(1 - \frac{1}{n^2}z^2)$ też jest całkowita. By ją jawnie wyznaczyć znajdziemy pochodną logarytmiczną Π'/Π. Ta jest na $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ granicą pochodnych logarytmicznych Π_n'/Π_n iloczynów częściowych $\Pi_n := z(1-z^2)...(1-\frac{1}{n^2}z^2)$; a że pochodna logarytmiczna iloczynu jest sumą pochodnych logarytmicznych, to $\Pi_n'/\Pi_n = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{n} \frac{2z}{z^2-k^2}$. Z tożsamością (2) prowadzi to wniosku, że funkcje holomorficzne Π i $\sin(\pi z)$ mają tę samą pochodną logarytmiczną na $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. Stąd już wynika, że $\sin(\pi z) = C \cdot \Pi(z)$ dla pewnej stałej C i wszystkich $z \in \mathbb{C}$, a porównanie współczynników przy z rozwinięcia Maclaurina obu stron prowadzi do równości $C = \pi$. Tak samo będzie przy innym porządku czynników $1 - \frac{1}{n^2}z^2$, więc przy każdym ich porządku,

$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{\infty}(1 - \frac{1}{n^2}z^2) \text{ dla } z \in \mathbb{C}. \quad (4)$$

Uwaga 3. a) Gdy funkcje całkowite g_1, g_2 mają wspólne zera i ich krotności, to g_2/g_1 przedłuża się do funkcji całkowitej, nie przyjmującej wartosci 0, skąd $g_2 = \mathrm{e}^h g_1$ dla pewnej funkcji całkowitej h; patrz twierdzenie 1a) w §IV.1. Euler uzyskał rozwinięcie (4) biorąc za g_1 jego lewą stronę, a za g_2 prawą, i przyjmując (bez dowodu), że h jest stałą.

b) Przez porównanie współczynników rozwinięcia Maclaurina tożsamości (4), podzielonej przez πz, Euler uzyskał równość $\sum_n \frac{1}{n^2} = \pi^2/6$. Natomiast przy $z = 1/2$, z (4) otrzymujemy **tożsamość Wallisa**: $\frac{2}{\pi} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)(2n+1)}{(2n)^2} = \frac{1\cdot 3}{2^2} \cdot \frac{3\cdot 5}{4^2} \cdot \frac{5\cdot 7}{6^2} \cdot ....$

By użyć iloczynów nieskończonych do konstrukcji funkcji o zadanych zerach, Weierstrass wprowadził następujące **czynniki Weierstrassa**:

$$E_n(z) := (1-z)\exp(z + \frac{1}{2}z^2 + ... + \frac{1}{n}z^n).$$

Zachodzi dla nich (patrz zadanie 4 w §II.1)

$$E_n^{-1}(0) = \{1\} \ \text{ i } \ |E_n(z) - 1| < |z|^{n+1} \text{ gdy } |z| < 1. \tag{5}$$

Twierdzenie 2 (Weierstrassa). *Dla każdego zbioru P, dyskretnego w $\mathbb{C}$, i układu $(n_p)_{p\in P}$ liczb naturalnych, istnieje funkcja $g \in H(\mathbb{C})$, mająca zera tylko w punktach zbioru P, przy czym taka, że $k(p) = n_p$ dla $p \in P$. (Tu, $k(p)$ oznacza krotność p jako zera funkcji g.)*

Dowód. Dla $p \in P' := P \setminus \{0\}$ obierzmy $l_p \in \mathbb{N}$ tak, by dla każdej liczby $r > 0$ szereg $\sum_{p\in P'} n_p(r/|p|)^{l_p+1}$ był zbieżny. (Jest o możliwe, bo $r/|p| < 1/2$ dla prawie wszystkich $p \in P$.) Z (5) wynika więc, że $\sum_{p\in P'} n_p||E_{l_p}(z/p) - 1||_{D(0,r)} < \infty$ dla każdego $r > 0$, a z uwagi 2 – że iloczyn $z^{n_0}\Pi_{p\in P'}(E_{l_p}(z/p))^{n_p}$, gdzie $n_0 = 0$ gdy $0 \notin P$, jest niemal normowo zbieżny do szukanej funkcji. (Kolejność czynników jest ustalona, lecz dowolna; por. też zadanie 1 na końcu, wykorzystane w poniższej uwadze i w §6.) □

Uwaga 4. Nierzadko, żądane w dowodzie liczby l_p można bez trudu wskazać. N.p., gdy $P \subset \mathbb{Z}$ i $n_p = 1$ dla wszystkich p, to wystarcza wziąć $l_p = 1$. I tak, iloczyn $\prod_{n\neq 0}(1 - \frac{z}{n})\exp(\frac{z}{n})$ jest niemal normowo zbieżny, na podstawie dowodu. W oparciu o (4) można też wyznaczyć jego wartość: mamy $\prod_{0<|n|\le k}(1 - \frac{z}{n})\exp(\frac{z}{n}) = \prod_{n=1}^{k}(1 - \frac{z^2}{n^2}) \xrightarrow[k\to\infty]{} \frac{1}{\pi z}\sin(\pi z)$, tzn.

$$\prod_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} (1 - \frac{z}{n})\exp(\frac{z}{n}) = \frac{\sin(\pi z)}{\pi z} \tag{6}$$

Wniosek 1 (twierdzenie Poincarégo). *Funkcja, meromorficzna w płaszczyźnie $\mathbb{C}$, jest ilorazem dwóch funkcji całkowitych (tzn. holomorficznych w całej płaszczyźnie $\mathbb{C}$).*

Dowód. Niech $f : \mathbb{C} \to \widetilde{\mathbb{C}}$ będzie funkcją meromorficzną. Na podstawie twierdzenia Weierstrassa istnieje funkcja $g \in H(\mathbb{C})$, mająca zera tylko w biegunach funkcji f, przy czym krotność każdego jej zera p jest równa rzędowi p jako bieguna funkcji f (tzn., $k_g(p) = |k_f(p)|$). Funkcja $h := f \cdot g$ ma tylko osobliwości pozorne, więc można ją traktować jako funkcję całkowitą, dla której $f = h/g$. □

Uwaga 5. * a) Rozumując jak wyżej, można twierdzenie 2 uogólnić tak: dla każdego zbioru P, dyskretnego w $\mathbb{C}$, i układu $(n_p)_{p\in P}$ niezerowych liczb całkowitych, istnieje funkcja $g \in H(\mathbb{C} \setminus P)$, nie mająca zer w $\mathbb{C} \setminus P$ i taka, że $k(p) = n_p$ dla $p \in P$.

b) Zarówno twierdzenie Mittag-Lefflera, jak i twierdzenia Weierstrassa i Poincarégo pozostają słuszne, gdy dziedzinę $\mathbb{C}$ rozpatrywanych funkcji zastąpić dowolnym zbiorem otwartym w $\mathbb{C}$. Szczegóły można znaleźć w [Rudin], przy czym w przypadku twierdzenia Mittag–Lefflera wykorzystuje się twierdzenie Rungego z §.....

Uwaga 6. Funkcji g, o które chodzi w twierdzeniu Weierstrassa, jest wiele, lecz są one wyznaczone z dokładnością do czynnika e^h, gdzie funkcja h jest całkowita. Patrz uwaga 3a).

Zadanie 3. Wartość bezwględnie zbieżnego iloczynu nieskończonego nie zależy od kolejności czynników. (Wskazówka: tezy wystarczy dowieść dla czynników stałych $1+f_n$, gdzie $f_n \in \mathbb{C}$ i $\sum_n |f_n| < \infty$. Przyjąć $F_n(z) = f_n \cdot z$ ($z \in \mathbb{C}$) i rozumując jak w Przykładzie zauważyć, że zmiana kolejności czynników zmieni iloczyn $\prod_n (1+F_n)$ na proporcjonalny do niego.)

Zadanie 4. Gdy $\sum_n |f_n| < \infty$, to $\prod_n (1+f_n) = 1 + \sum_i f_i + \sum_{i,j} f_i f_j + \sum_{i,j,k} f_i f_j f_k + ...$, gdzie każdy szereg też jest bezwględnie zbieżny.

Ćwiczenie.* a) Korzystając z jednoznaczności rozkładu liczb na czynniki pierwsze dowieść, że gdy $\mathrm{Re}\, z > 1$, to $\prod_p (1-p^{-z}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^z}$, gdzie gdzie p przebiega liczby pierwsze, a **funkcja Möbiusa** μ przyjmuje na n wartość 1 (odp. -1) gdy n jest iloczynem parzystej (odp. nieparzystej) liczby różnych liczb pierwszych, zaś wartość 0 gdy w rozkładzie n na liczby pierwsze pewne czynniki się powtarzają. (Liczba 1 nie jest pierwsza!)

b) Dowieść, że wzór $\zeta(z) := \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$ określa funkcję holomorficzną w $\{z : \mathrm{Re}\, z > 1\}$ i że dla z j.w. ma miejsce równość $\zeta(z) = 1/\prod_p (1-p^{-z}) \neq 0$. (Wskazówka: zauważyć, że przy k przebiegającym potęgi danej liczby pierwszej p zachodzi $\sum_k k^{-z} = 1/(1-p^{-z})$.)

6 Funkcja Γ Eulera jako funkcja meromorficzna.

Dla każdej liczby naturalnej z i dostatecznie dużych n jest $\frac{(z+1)...(z+n)}{n!} = \frac{(n+1)...(n+z)}{z!} \approx \frac{n^z}{z!}$, skąd wynika istnienie poniższej granicy i równość $z! = z\Gamma(z)$ (czy: $(z-1)! = \Gamma(z)$), gdzie

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)...(z+n)} \tag{7}$$

Pokażemy, że zbieżność prawej strony, i to niemal jednostajna, ma miejsce w $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, ...\}$ –co pozwala rozszerzyć funkcję $z \mapsto z!$ na ten zbiór. Uzyskamy też ważny wzór, wyrażający otrzymaną wartość $\Gamma(z)$. W tym celu dla $z \in \mathbb{C}$ napiszmy

$$\frac{z(z+1)...(z+n)}{n^z n!} = z\frac{\prod_{k=1}^n (1+\frac{z}{k})\mathrm{e}^{-\frac{z}{k}}}{\exp(z \ln n)} \cdot \exp(z(\frac{1}{1} + ... + \frac{1}{n})).$$

Przypomnijmy też, że istnieje granica $\gamma = 0.5772157\ldots$ ciągu $\frac{1}{1} + ... + \frac{1}{n} - \ln n$, nazywana **stałą Eulera–Mascheroniego**. Stąd $\lim_n \exp(z(\frac{1}{1} + ... + \frac{1}{n}))/\exp(z \ln n) = \mathrm{e}^{\gamma z}$; a że iloczyny częściowe $\prod_{k=1}^n (1+\frac{z}{k})\mathrm{e}^{-\frac{z}{k}}$ tworzą ciąg niemal jednostajnie zbieżny do $\prod_{k=1}^{\infty} (1+\frac{z}{k}) \exp(-z/k)$, por. uwagę 3 w §5, to

$$\lim_{n\to\infty} \frac{z(z+1)...(z+n)}{n^z n!} = z\mathrm{e}^{\gamma z} \prod_{k=1}^{\infty} (1+\frac{z}{k})\mathrm{e}^{-\frac{z}{k}} \quad \text{(zbieżność n.j.)},$$

przy czym funkcja graniczna po prawej jest holomorficzna i zeruje się tylko w punktach $0, -1, -2, ...$, gdzie ma zera jednokrotne. To dowodzi, że w (7) zbieżność jest niemal jednostajna w $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, ...\}$, a graniczna funkcja Γ jest meromorficzna, nie przyjmuje wartości 0 i ma bieguny proste w $0, -1, -2, ...$ Uzyskaliśmy też **wzór Eulera–Weierstrassa**

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z\mathrm{e}^{\gamma z} \prod_{k=1}^{\infty} (1 + \frac{z}{k})\mathrm{e}^{-\frac{z}{k}} \quad , \tag{8}$$

podczas gdy (7) to **wzór Eulera–Gaussa**. Odnotujmy tożsamości, znane Eulerowi:

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad \text{i} \quad -z\Gamma(z)\Gamma(-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)} = \Gamma(z)\Gamma(1-z). \tag{9}$$

Pierwsza łatwo wynika z (7), druga – z (8) i (6), a trzecia z poprzednich dwóch.

7 * Aproksymacja funkcjami wymiernymi.

Niech K będzie zwartym podzbiorem wnętrza ograniczonego zbioru regularnego W i niech $f \in H(\overline{W})$. Udowodnimy, że f można na K jednostajnie przybliżać funkcjami wymiernymi, i to bardzo specjalnej postaci:

Twierdzenie 1 (Rungego, wstępne)**.** * *Przy tych oznaczeniach, dla danej liczby* $\varepsilon > 0$ *istnieją takie* $w_1, \ldots, w_n \in \mathrm{Bd}(W)$ *i* $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$, *że przy* $g(z) := \sum_{i=1}^{n} c_i/(z - w_i)$ *ma miejsce nierówność* $\|f - g\|_K < \varepsilon$.

Dowód. Z twierdzenia o residuach wynika, że $f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\partial W} \frac{f(w)}{w-z} \, \mathrm{d}w$ dla wszystkich $z \in W$. (Patrz wzór (5) w §V.5.) Cykl ∂W przedstawmy w postaci $\sum_{j=1}^{n} \gamma_j$, dla pewnych dróg γ_j. Jeśli dla każdej z funkcji $f_j(z) := \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\gamma_j} \frac{f(w)}{w-z} \mathrm{d}w$, $z \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{im}(\gamma_j)$, znajdziemy funkcję g_j żądanej postaci, taką, że $\|f_j - g_j\|_K < \varepsilon$, to pozostanie przyjąć $g := \sum_j g_j$.

Ustalmy więc drogę $\gamma = \gamma_j : [a, b] \to \overline{W}$ i niech $\widetilde{\varepsilon} := \varepsilon/n$. Na zwartym zbiorze $\mathrm{im}(\gamma) \times K$ funkcja $h(w, z) \overset{def}{=} f(w)/(w - z)$ jest jednostajnie ciągła, wobec czego istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że $\mathrm{diam}\, h(G \times \{z\}) < \widetilde{\varepsilon}/\ell(\gamma)$ gdy tylko $z \in K$ i zbiór $G \subset \mathrm{im}(\gamma)$ ma średnicę mniejszą niż δ. Podzielmy teraz przedział $[a, b]$ punktami $a = t_0 < \cdots < t_N = b$ tak drobno, by średnica każdego zbioru $\gamma([t_{i-1}, t_i])$ była mniejsza niż δ, i niech $w_i = \gamma(t_i)$ dla $i = 0, \ldots, N$. Na podstawie uwagi 1 w §II.6, zastosowanej do funkcji $w \mapsto h(w, z)$, ma dla $z \in K$ miejsce nierówność $|\int\limits_{\gamma} h(w, z) \, \mathrm{d}w - \sum_{i=1}^{N} h(w_i, z)(w_i - w_{i-1})| < \widetilde{\varepsilon}$ – a zatem i nierówność $|f_j(z) - \sum_{i=1}^{N} c_i/(z - w_i)| < \widetilde{\varepsilon}$, przy $c_i = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} f(w_i)(w_{i-1} - w_i)$. $\square$

Wynik ten posłużyć moze do dowodu dalszych twierdzeń aproksymacyjnych Rungego.

VII Wybrane aspekty topologiczne i geometryczne

1 Przekształcenia biholomorficzne i konforemne.

Definicja. Niech $U, V \subset \mathbb{C}$, przy czym zbiór U jest otwarty. Przekształcenie $f : U \to V$ nazwiemy **biholomorficznym**, jeśli jest ono bijektywne i holomorficzne.

Przekształcenia biholomorficzne nazywane są też konforemnymi, lecz temu słowu nadamy inne znaczenie. W książce Saksa i Zygmunda nazwane są one najładniej: **wierne**.

Uwaga 1. Jeśli U jest obszarem i przekształcenie $f : U \to V$ jest biholomorficzne, to:
i) $f'(p) \neq 0$ dla każdego $p \in U$. (Patrz wniosek w §VI.1.)
ii) V jest obszarem i f jest homeomorfizmem U na V. (Ciągłość f^{-1} wynika z otwartości f, patrz twierdzenie 2 w §VI.1.)
iii) Przekształcenie f^{-1} jest holomorficzne. (Patz ii) i uwaga 1 w §II.5.)

Uwaga 2. Gdy U jest obszarem w $\mathbb{C}$ i ciąg różnowartościowych funkcji $f_n \in H(U)$ jest niemal jednostajnie zbieżny, to graniczna funkcja f bądź jest różnowartościowa (i wtedy przekształca U biholomorficznie na $f(U)$), bądź stała. Bo jeśli $f \neq \text{const}$ i dla pewnego w równanie $f(z) = w$ ma ≥ 2 rozwiązania, to na podstawie twierdzenia Hurwitza z §V.2 jest tak przy f zastąpionym przez f_n, dla dużych n – wbrew różnowartościowości funkcji f_n. $\square$

Ważną własnością przekształceń biholomorficznych jest ich konforemność. Przysługiwać ona może przekształceniom między podzbiorami przestrzeni euklidesowej dowolnego wymiaru.

Definicja. a) Niech U i V będą otwartymi podzbiorami przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^k$. Przekształcenie $f : U \to V$ nazwiemy **konforemnym**, gdy jest ono homeomorfizmem klasy C^1 i pochodna $\mathrm{d}f(p)$ jest podobieństwem, dla każdego punktu $p \in U$.

b) **Miarą kąta pomiędzy drogami**, w ich wspólnym początku p, nazywamy liczbę $\alpha \in [0, \pi]$, będącą miarą kąta pomiędzy wektorami stycznymi do tych dróg w punkcie p. (Tak więc $\cos\alpha = \langle \lambda_1'(0), \lambda_2'(0)\rangle / \|\lambda_1'(0)\| \cdot \|\lambda_2'(0)\|$, gdzie λ_1 i λ_2 to rozważane drogi, dla których $\gamma_1(0) = p = \gamma_2(0)$.)

c) Gdy $k = 2$, to można analogicznie zdefiniować miarę **zorientowanego kąta między drogami**, w ich wspólnym początku p. (Kolejność dróg jest istotna!)

Uwaga 3. Złożenie przekształceń konforemnych $f : U \to V$ i $g : V \to W$ jest przekształceniem konforemnym U na W. Wynika to ze wzoru na pochodną złożenia, bo złożenie podobieństw jest podobieństwem.

Twierdzenie 1. *Gdy $f : U \to V$ jest przekształceniem konforemnym i $z_0 \in U$, to*
i) granica $\mu = \lim_{p,q \to z_0} \|f(p) - f(q)\| / \|p - q\|$ istnieje i jest różna od zera.
ii) f zachowuje miarę kąta między drogami, tzn. miara kąta między drogami γ_1, γ_2 w ich wspólnym początku z_0 jest równa mierze kąta między drogami $f \circ \gamma_1$ i $f \circ \gamma_2$ w ich wspólnym początku $f(z_0)$.

Dowód. i) Szczegówy dowód podamy tylko w ważnym tu przypadku, gdy $k = 2$ i przekształcenie f jest biholomorficzne (po utożsamieniu $\mathbb{R}^2$ z $\mathbb{C}$). Na podstawie zadania 1c) z §III.1, zachodzi $|f(p)-f(q)|/|p-q| = |f'(z_0)\frac{p-q}{|p-q|}|+r(p,q)$, gdzie $|r(p,q)| \le \sup_{z\in[p,q]} |f'(z)-f'(z_0)|$ dąży do 0 gdy $p, q \to z_0$. Dowodzi to tezy i), przy $\mu := |f'(z_0)|$.

* W przypadku ogólnym należy wyżej f' interpretować jako pochodną $\mathrm{d}f$, za μ przyjąć moduł skali podobieństwa $\mathrm{d}f(z_0)$, a w miejsce $|\ |$ użyć w pierszej równości normy euklidesowej na $\mathbb{R}^k$, zaś po prawej stronie nierówności –normy operatora $\mathrm{d}f(z) - \mathrm{d}f(z_0)$; przy tym zadanie 1c) z §III.1 należy uogólnić na przypadek przekształceń gładkich pomiędzy otwartym podzbiorami przestrzeni euklidesowych. Zmiany te pozostawione są jako materiał uzupełniający.

ii) Ponieważ $(f \circ \gamma_i)'(0) = (\mathrm{d}f(z_0))(\gamma_i'(0))$ dla $i = 1, 2$ i $\mathrm{d}f(z_0)$ jest podobieństwem, to $\angle((f \circ \gamma_1)'(0), (f \circ \gamma_2)'(0)) = \angle(\gamma_1'(0), \gamma_2'(0))$. □

Twierdzenie 2. *a) Każde przekształcenie biholomorficzne $f : U \to V$, gdzie zbiory $U, V \subset \mathbb{C}$ są otwarte, jest konforemne. (Utożsamiamy tu $\mathbb{C}$ z $\mathbb{R}^2$.)*

b) Każda inwersja przestrzeni nakłutej jest przekształceniem konforemnym.*

Dowód. a) Jak wiemy, f jest homeomorfizmem i $f'(p) \neq 0$ dla $p \in U$; patrz uwaga 1. Pochodna rzeczywista $\mathrm{d}f(p)$ jest więc podobieństwem dla $p \in U$, patrz §I.2.

b)* Ze względu na zadanie 11* a) w §II.3 wystarcza rozważyć przypadek inwersji $J(x) = x/\|x\|^2$. Pozostaje więc rozwiązać następujące zadanie:

Zadanie 1. * Wyznaczyć pochodną przekształcenia $J(x) = x/\|x\|^2$ ($x \in \mathbb{R}^k\setminus\{0\}$) i dowieść, że jest ona podobieństwem. (Odp. z dokładnością do czynnika $\|x\|^{-2}$, pochodna $\mathrm{d}J(x)$ jest równa symetrii lustrzanej względem podprzestrzeni $x^\perp$: mamy $\mathrm{d}J(x)(u) = \frac{1}{\|x\|^2}(u - 2\langle\frac{x}{\|x\|}, u\rangle\frac{x}{\|x\|})$. Inaczej: macierz Jacobiego pochodnych cząstkowych inwersji J jest równa $\|x\|^{-2}(I - 2A)$, gdzie $A = A(x) \overset{def}{=} (x_i x_j\|x\|^{-2})_{i,j=1}^k = yy^t$, przy $y := x/\|x\|$.

Uwaga 4. * Jak wiemy z zadania 12 a) w §II.3, każdy rzut stereograficzny jest obcięciem (do rzutowanej sfery nakłutej) pewnej inwersji. Stąd już wynika, że rzut stereograficzny sfery nakłutej również spełnia warunki i) oraz ii) twierdzenia 2. Jest on też przekształceniem konforemnym, jeśli definicję konforemności w sposób naturalny rozszerzyć na przekształcenia między rozmaitościami riemannowskimi.

Uwaga 5. Uzasadnienie twierdzeń 1b) i 2a) pokazuje, że przekształcenie biholomorficzne zachowuje miarę *zorientowanego* kąta pomiędzy łukami gładkimi. Wynika to stąd, że pochodna rzeczywista $\mathrm{d}f(p)$ takiego przekształcenia jest podobieństwem zachowującym orientację, patrz uwaga 2 w §I.2.

2 Przekształcenia dysku.

Udowodnimy tu dwa ważne lematy o holomorficznych przekształceniach dysku. Pierwszy, należący do Schwarza, posłuży w §5 do dowodu twierdzenia Riemanna o holomorficznej równoważności obszarów jednospójnych, zaś drugi – lemat Blocha–Landaua – do dowodu twierdzenia Montela w §VIII.2. (Pośrednio gra on rolę w dowodzie twierdzenia Picarda z §V.3.) Lemat Blocha–Landaua stanowi materiał uzupełniający, podobnie jak omawiany w „dodatku 1" związek lematu Schwarza z geometrią hiperboliczną płaszczyzny.

Lemat 1 (Schwarza o dysku)**.** *Niech $D = D(0,1)$ i niech funkcja $f \in H(D)$ będzie taka, że $f(0) = 0$ i $f(D) \subset D$. Wówczas prawdziwe są nierówności $|f'(0)| \leq 1$ i $|f(z)| \leq |z|$ dla $z \neq 0$; ponadto, albo wszystkie te nierówności są ostre, albo $f(z) = kz$ dla wszystkich $z \in D$ i pewnej stałej k o module* 1. *(W ostatnim przypadku, f jest obrotem wokół 0.)*

Dowód. Ponieważ $f(0) = 0$, to $f(z) = zg(z)$ dla pewnej holomorficznej funkcji $g : D \to \mathbb{C}$. Przy tym, gdy $|z| = r < 1$, to $|g(z)| \leq 1/r$ (bo $|f(z)| < 1$). Z zasady maksimum wynika więc, że $|g(z)| \leq 1/r$ dla $z \in D(0,r)$ i $r < 1$, a z dowolności r – że $|g| \leq 1$. Wraz z równościami $f'(0) = g(0)$ i $f(z) = zg(z)$ dowodzi to pierwszej części tezy i tego, że jeśli $|f'(0)| = 1$ lub $|f(z_0)| = |z_0|$ dla pewnego $z_0 \in D$, to $|g|$ osiąga w zerze lub w z_0 swe maksimum. Funkcja g jest więc wtedy stała, skąd $f(z) = kz$ dla k będącego jej wartością. □

Uwaga 1. Ogólniej, gdy gdy funkcja h holomorficzna przeprowadza dysk $D(p,r)$ w $D(q,R)$, to $|h'(p)| \leq R/r$ i $|h(z) - h(p)| \leq (R/r)|z - p|$ dla $z \in D(p,r)$. (Wynika to z lematu Schwarza, zastowanego do $f := g_2 \circ h \circ g_1$, gdzie podobieństwa $g_1(z) = r \cdot (z + p)$ i $g_2(z) = (z - q)/R$ przeprowadzają D na $D(p,r)$ i $D(q,R)$ na D, odpowiednio.)

Dla $p \in D = D(0,1)$ rozważmy **przekształcenie Blaschkego** $b_p : \widetilde{\mathbb{C}} \to \widetilde{\mathbb{C}}$ dane wzorem

$$b_p(z) = \frac{z - p}{1 - \overline{p}z} \tag{1}$$

Wówczas:

a) b_p jest homografią z biegunem w punkcie $1/\overline{p} \notin D$.

b) $b_p(D) \subset D$ na podstawie zadania 7 w §I.6.

c) $b_{-p} \circ b_p =$identyczność, skąd i z b) wynika, że przekształcenie $b_{p|D} : D \to D$ jest biholomorficzne. Poniżej obcięcie $b_{p|D}$ oznaczamy nadal przez b_p.

Wniosek 1. *Każde przekształcenie biholomorficzne $f : D \to D$ jest postaci $z \mapsto k \cdot b_p(z)$, dla pewnych $p \in D$ i $k \in \partial D$. W szczególności, gdy ponadto $f(0) = 0$, to f jest obrotem.*

Dowód. Niech wpierw $f(0) = 0$. Z lematu Schwarza wynika, że wtedy $|f(z)| \leq |z|$ dla $z \in D$. Tak samo $|f^{-1}(z)| \leq |z|$ i wobec tego $|f(z)| = |z|$ dla $z \in D$. Z końcowej części lematu Schwarza wnosimy więc, że f jest obrotem wokół 0.

W ogólnym przypadku niech $p = f^{-1}(0)$ i $g = f \circ b_p^{-1}$. Ponieważ $b_p(p) = 0$, więc $g(0) = 0$. Wobec tego g jest obrotem wokół 0, skąd $f = g \circ b_p = k \cdot b_p$, dla pewnego $k \in \partial D$. □

Ćwiczenie. Niech funkcja $f \in H(D)$ spełnia warunki $f(D) \subset \overline{D}$ i $f(p) = 0$, gdzie $p \in D$.

a) Dowieść, że $f = b_p \cdot g$, gdzie nadal $g \in H(D)$ i $g(D) \subset \overline{D}$. (Wskazówka: modyfikować dowód lematu Schwarza zauważając, że $b_p(\partial D) = \partial D$, lub wykorzystać ten lemat.)

b) Wywnioskować, że gdy $p_1, ..., p_n \in f^{-1}(0)$ są różne, to $|f(z)| \leq \prod_{i=1}^n |b_{p_i}(z)|$ dla $z \in D$.

Ćwiczenie. Niech funkcja $f \in H(D)$, gdzie $D = D(0,1)$, spełnia warunek $f(0) = ... = f^{(n-1)}(0) = 0$. Dowieść, że jeśli $f(D) \subset D$, to $|f^{(n)}(0)| \leq 1$ i $|f(z)| \leq |z|^n \, \forall z \in D$; ponadto, albo nierówności te są ostre, albo $f(z) = kz^n \, \forall z \in D$, gdzie $|k| = 1$.

* Dodatek 1: Informacja o geometrii hiperbolicznej (zadania).

Zadanie 1. Składając przekształcenie holomorficzne $f : D \to D$ z obu stron z odpowiednimi przekształceniami Blaschkego dowieść, że:

a) $\delta(f(p), f(q)) \leq \delta(p,q)$ dla wszystkich $p, q \in D$, gdzie $\delta(p,q) \overset{def}{=} |b_p(q)| = \frac{|p\ -\ q|}{|\ 1\ -\ \overline{p}\ q\ |}$.

b) $|f'(p)| \leq (1 - |f(p)|^2)/(1 - |p|^2)$ dla wszystkich $p \in D$.

c) Jeśli w a) (lub w b)) w miejsce nierówności $\leq$ zachodzi równość dla pewnych $p \neq q$ (odp. dla pewnego p), to przekształcenie f jest biholomorficzne. Odwrotnie, gdy jest ono biholomorficzne, to obie strony nierówności są równe jako funkcje.

Choć powyższa funkcja δ nie spełnia nierówności trójkąta, to może ona posłużyć do wyznaczenia tzw. **metryki hiperbolicznej** na dysku D, przekształcającej D w tzw. **model Poincaré'go płaszczyzny Bolayia–Łobaczewskiego**.

Zadanie 1. a) Dowieść, że funkcja $d \overset{def}{=} \ln(\frac{1+\delta}{1-\delta})$ jest metryką na dysku D. (Wskazówka: sprowadzić nierówność trójkąta do nierówności $\frac{1+|p|}{1-|p|} \cdot \frac{1+|q|}{1-|q|} \geq \frac{1+\delta(p,q)}{1-\delta(p,q)}$ dla $p, q \in D$, a tę do jednej z nierówności rozpatrywanych w zadaniu 2 z §I.1.)

b) Gdy dysk D rozpatrywać z metryką d, to każde przekształcenie holomorficzne $D \to D$ spełnia warunek Lipschitza ze stałą 1. (Jest to **wersja Picka lematu Schwarza**.)

c) Każde koło w metryce d jest zarazem kołem euklidesowym, choć na ogół o innym środku i innym promieniu. (Wskazówka: rozpatrzeć koła o środku w 0 i skorzystać z b).)

d) Nazwijmy **odcinkiem hiperbolicznym** o końcach $p, q \in D$ zbiór $[p,q]_h \overset{def}{=} \{z \in D : d(p,z) + d(z,q) = d(p,q)$. Dowieść, że bądź $[p,q]_h = [p,q]$ i punkty p i q leżą na wspólnej średnicy dysku D, bądź $[p,q]_h$ jest łukiem okręgu prostopadłego do ∂D, mającym p i q jako swe krańce. (Chodzi oczywiście o łuk zawarty w D, i taki jest jedyny. Wskazówka: przyjąć wpierw $p = 0$, a w przypadku ogólnym skorzystać z tego, że przekształcenie b_p przeprowadza p na 0 i jest homografią, a więc ma własności omówione w §2 i w §I.6.)

Uwaga 2. Skąd bierze się wzór na metrykę d? Otóż gdy d jest jakąkolwiek metryką na dysku D, w której każde przekształcenie biholomorficzne $D \to D$ jest izometrią i która spełnia warunek $\lim_{q\to 0} d(q,0)/|q| = 1$ (czyli jest „aproksymatywnie euklidesowa w punkcie $p = 0$"), to ze wzoru na $|b_p'(p)|$ wynika równość $\lim_{q\to p} \frac{d(p,q)}{|q-p|} = \lim_{q\to p} \frac{d(b_p(q),0)}{|b_p(q)|} \frac{|b_p(q)|}{|q-p|} = \frac{1}{1-|p|^2}$.

Uzasadnia to przyjęcie $d(p,q) = \inf_\gamma \int_0^1 \frac{|\gamma'(t)|}{1-|\gamma(t)|^2}\mathrm{d}t$, gdzie γ przebiega wszystkie drogi w dysku D, łączące p i q. Nietrudny rachunek utwierdza nas w tym, że $d(0,q) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+q}{1-q}$ dla $q \in (0,1)$, skąd już –z dokładnością do czynnika $\frac{1}{2}$ –wynika przyjęty w zadaniu wzór, wyznaczający $d(p,q)$, jak również niezależne od zadania 1 uzasadnienie nierówności trójkąta dla d. (Uzupełnienie szczegółów pozostawione jest jako zadanie. „Rachunkiem" nazwano sprawdzenie, że gdy użyć zapisu biegunowego $\gamma(t) = r(t)\exp(\mathrm{i}\alpha(t))$, to $\int_0^1 \frac{|\gamma'(t)|}{1-|\gamma(t)|^2}\mathrm{d}t \geq |\int_0^1 \frac{r'(t)}{1-r(t)^2}\mathrm{d}t| = \frac{1}{2}\ln\frac{1+q}{1-q}$, przy czym dla pewnej drogi γ, łączącej 0 z q, zachodzi równość.)

* Dodatek 2: Lematy Blocha–Landaua i Blocha.

Lemat 2 (Blocha–Landaua). *Gdy funkcja h jest holomoficzna w kole domkniętym $\overline{D}(p,r)$, to jej obraz zawiera pewien dysk o promieniu $Lr|h'(p)|$, gdzie $L = 1/24$.*

Dowód. Załóżmy bez zmniejszenia ogólności, że $p = 0$ (inaczej zastąpimy h przez funkcję $z \mapsto h(z-p)$) i że $h'(0) \neq 0$. Dowód oparty jest na następującej obserwacji: jeśli dla wszystkich z z pewnego koła $\overline{D}(z_0,r_0) \subset \overline{D}(0,r)$ spełniona jest nierówność $|h'(z)| \leq 2|h'(z_0)|$, a zatem i $|h'(z) - h'(z_0)| \leq 3|h'(z_0)|$, to dla $z \in \overline{D}(z_0, \frac{1}{6}r_0)$ wynika z uwagi 1(zastosowanej do h') nierówność $|h'(z) - h'(z_0)| \leq \frac{1}{2}|h'(z_0)|$. Na podstawie zadania 4 w §II.1 i twierdzenia 2 w §V.2, funkcja h jest więc na kole $\overline{D} = \overline{D}(z_0, \frac{1}{6}r_0)$ różnowartościowa i przekształca je na zbiór zawierający koło o promieniu $\frac{1}{12}r_0|h'(z_0)|$. Pozostaje znaleźć z_0 i r_0 tak, by prócz poprzedniego spełniony był warunek $r_0|h'(z_0)| = \frac{1}{2}r|h'(0)|$.

Oto jak E. Landau proponuje wskazać z_0 i r_0. Niech

$$\varphi(z) \overset{def}{=} |h'(z)| \cdot (r - |z|) \ \text{ dla } \ z \in \overline{D}(0,r)$$

i niech z_0 będzie jednym z pierwiastków równania $\varphi(z) = r|h'(0)|$, mających największy moduł. (Pierwiastki takie istnieją, bo $\varphi(0) = r|h'(0)|$ i funkcja φ jest ciągła; ponadto $|z_0| < r$, bo $\varphi_{|\partial D(0,r)} = 0$.) Przyjmijmy $r_0 = \frac{1}{2}(r - |z_0|)$. Z przyjętych definicji wnosimy, że $r|h'(0)| = (r - |z_0|)|h'(z_0)| = 2r_0|h'(z_0)|$, a także $\overline{D}(z_0,r_0) \subset \overline{D}(0,r_1)$, gdzie $r_1 \overset{def}{=} r - r_0$. Ponieważ $r_1 \in (|z_0|, r)$, więc $r|h'(0)| > \varphi(z) = |h'(z)|(r - r_1)$ dla $z \in \partial D(0,r_1)$. Wykorzystując zasadę maksimum otrzymujemy żądaną nierówność:

$$\|h'\|_{D(z_0,r_0)} \leq \|h'\|_{D(0,r_1)} = \|h'\|_{\partial D(0,r_1)} \leq r|h'(0)|/(r - r_1) = r|h'(0)|/r_0 = 2|h'(z_0)|. \quad \square$$

Uwaga 3. a) „Lemat Blocha–Landaua" był przez Blocha (który pierwszy go sformułował i dowiódł) przypisany Landauowi, zaś przez Landaua – Blochowi. Powyższy dowód dał w zasadzie Landau; pokazuje on zarazem, że na pewnym dysku o promieniu $Br|h'(p)|$ określona jest dla $B = 1/24$ gałąź funkcji h^{-1} (bo jest nią $(h_{|\overline{D}})^{-1}$). Takie wzmocnienie lematu Blocha–Landaua należy jednak do Blocha, którego dowód był znacznie dłuższy. W lematach Blocha–Landaua i Blocha można liczby $L = 1/24$ czy $B = 1/24$ zastąpić przez większe; lecz przez jak duże – nie wiadomo dokładnie, choć znane są dość wąskie szacunki: istnieją największe stałe L_0 i B_0, z błędem ≤ 0.03 przybliżane przez 0.53 i 0.45, odpowiednio. (Cytuję za książką .....)

b) Nie należy sądzić, że środkiem dysku, o którym mowa w tezie, może być punkt $h(p)$, jeśli stała L jest odpowiednia. Gdy bowiem $h(z) = \varepsilon e^{z/\varepsilon} + 1 - \varepsilon$, to zbiór $h(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{1 - \varepsilon\}$ nie zawiera dysku o środku w $h(0) = 1$ i promieniu ε – choć zawiera dyski o dowolnie dużych promieniach, w zgodzie z lematem.

3 Przykłady biholomorficznych przekształceń na dysk.

Definicja. Zbiory otwarte $U, V \subset \mathbb{C}$ nazywamy **holomorficznie równoważnymi**, jeśli istnieje biholomorficzne przekształcenie jednego z nich na drugi.

Przykłady obszarów holomorficznie równoważnych z dyskiem omawiane były na ćwiczeniach. Obejmują one: półpłaszczyzny, soczewki właściwe (w tym półkola i kąty), pasy i półpasy, przecięcia kątów z dyskiem zatoczonym z wierzchołka kąta, elipsy pełne, płaszczyzny z usuniętymi rozłącznymi dwiema półprostymi. Biholomorficzne przekształcenie każdego z tych zbiorów na dysk lub półpłaszczyznę można jawnie wskazać, wykorzystując omawiane w §I.6 własności homografii, funkcji wykładniczej i funkcji trygonometrycznych. Przypomnijmy pokrótce, jak takie przekształcenia budować.

Nazwijmy **dyskiem w** $\widetilde{\mathbb{C}}$ każdą z dwóch składowych zbioru $\widetilde{\mathbb{C}} \setminus T$, gdzie T jest okręgiem w $\widetilde{\mathbb{C}}$. **Soczewką** w $\widetilde{\mathbb{C}}$ nazwiemy niepusty zbiór, będący częścią wspólną dwóch dysków w $\widetilde{\mathbb{C}}$, których brzegi się przecinają. Jeśli dyski te są półpłaszczyznami, to soczewka jest **pasem** (gdy brzegi półpłaszczyzn są równoległe) lub **kątem** (gdy nie są). Soczewka S jest **właściwa**, gdy ∞ nie leży w jej domknięciu.

1) Przekształcenie soczewki właściwej na pas lub kąt. Rozważana soczewka S jest przecięciem dwóch dysków, których brzegi oznaczymy T_1 i T_2. Obierzmy punkt $p \in T_1 \cap T_2$ i przeprowadźmy go homografią $h(z) = 1/(z - p)$ na ∞. Ponieważ okręgi $h(T_1)$ i $h(T_2)$ przechodzą przez ∞, więc są one prostymi, zaś $h(S)$ jest kątem lub pasem. Zauważmy, że $h(S) \subset \mathbb{C}$, gdyż $h^{-1}(\infty) = p \notin S$.

2) Przekształcenie pasa lub kąta na półpłaszczyznę. Kąt łatwo jest przeprowadzić na zbiór $K = \{z : 0 < \operatorname{Arg}(z) < \alpha\}$, gdzie $0 < \alpha \leq 2\pi$, a ten gałęzią funkcji $z \mapsto z^{\pi/\alpha}$ na półpłaszczyznę $\Pi_+ = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$. (Gałąź ta na K istnieje, bo $K \cap [0, \infty) = \emptyset$, a na $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ określona jest gałąź logarytmu.) Natomiast pas przeprowadźmy funkcją liniową na pas poziomy $\{z : 0 < \operatorname{Im} z < \alpha\}$, gdzie $\alpha \leq 2\pi$, a ten funkcją exp na kąt $\{z : 0 < \operatorname{Arg}_{[0,2\pi)} z < \alpha\}$. Gdy zadbać o to, by $\alpha = \pi$, to w obrazie otrzymamy półpłaszczyznę Π_+; gdy zaś $\alpha = 2\pi$, to otrzymamy kąt pełny $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)_{\mathbb{R}}$.

3) Przekształcenie wycinka koła lub półpasa. „Półpas" $\{z : 0 < \operatorname{Im} z < \alpha, \operatorname{Re} z < c\}$ przy przekształceniu exp przejdzie na wycinek koła $\{z : |z| < e^c, 0 < \operatorname{Arg} z < \alpha\}$, a ten z kolei gałęzią funkcji $z \mapsto z^{\pi/\alpha}$ przeprowadzić możemy na półkole (a wiec na soczewkę).

4) Przekształcenie półpłaszczyzny na dysk. Gdy półpłaszczyzną jest $\Pi_+ = \{z : \mathrm{Im}(z) > 0\}$, zaś dyskiem – $D(0,1)$, to przekształcenie możemy zadać dowolnym ze wzorów opisanych w zadaniu 5a) w §II.2, np. $f(z) = (z - \mathrm{i})/(z + \mathrm{i})$.

5)* Przekształcenie płaszczyzny z wyjętymi dwiema rozłącznymi półprostymi. Rozpatrzymy tylko przypadek, gdy proste, na których rozważane półproste L_1, L_2 są położone, przecinają się w punkcie $p \notin L_1 \cup L_2$. Przez przesunięcie i obrót uzyskujemy, że $p = 0$ i $L_1 \subset \mathbb{R}^+$, a następnie przez zastosowanie gałęzi funkcji $z^{\pi/\alpha}$ – że $L_1 \cup L_2 \subset \mathbb{R}$. Oczywiste końcowe wyskalowanie i przesunięcie sprowadza rzecz do przypadku, gdy $L_1 = [1, \infty)_{\mathbb{R}}$ i $L_2 = (-\infty, -1]_{\mathbb{R}}$. Wtedy jednak przekształcenie Żukowskiego $f(z) = \frac{1}{2}(z + z^{-1})$ przeprowadza $\mathbb{C} \setminus (L_1 \cup L_2)$ na półpłaszczyznę $\mathrm{Im}(z) > 0$; patrz zadanie 3 w §I.1. (Uwzględnienie 3) pozwala też rozpatrzeć przypadek, gdy półproste L_1, L_2 są równoległe, lecz opisane metody zawodzą, gdy $p \in L_1 \cup L_2$.)

Każdy z powyższych zbiorów możemy na inny z nich przeprowadzić złożeniem opisanych przekształceń lub ich odwrotności.

4 Twierdzenie Cauchy'ego o równości całek (wersja homotopijna)

Twierdzenie 1 (Cauchy'ego o równości całek). *Kawałkami gładkie pętle $\lambda, \mu : [a, b] \to U$, swobodnie homotopijne (jako pętle) w zbiorze $U \subset \mathbb{C}$, spełniają warunek*

$$\int_\lambda f = \int_\mu f \quad \textit{dla każdej funkcji } f \in H(U).$$

Ponieważ całka po drodze stałej jest równa zeru, więc wynika stąd

Wniosek 1. *Droga zamknięta γ, homotopijna w zbiorze $U \subset \mathbb{C}$ z pętlą stałą, ma własność Cauchy'ego w U (tzn. $\int_\gamma f = 0$ dla każdej funkcji $f \in H(U)$).*

Przypomnijmy, że swobodna homotopijność pętli była zdfiniowana w §IV.4, na str. 41. Natomiast własność Cauchy'ego (cykli, a nie tylko dróg zamkniętych) była wprowadzona w §III.5 i gra ważną rolę w twierdzeniu o residuach z §IV.1.

Dowód twierdzenia Cauchy'ego. Ustalmy zbiór U i funkcję $f \in H(U)$. Możemy zakładać, że U jest zbiorem otwartym. (Inaczej przedłużymy f do pewnej funkcji $\widetilde{f} \in H(\widetilde{U})$, gdzie $\widetilde{U} \subset \mathbb{C}$ jest zbiorem otwartym, i zastąpimy U przez $\widetilde{U}$, zaś f przez $\widetilde{f}$.)

Z założenia, istnieje funkcja ciągła $\Gamma : [0,1] \times [a,b] \to U$ taka, że

$$\Gamma(0,t) = \lambda(t) \text{ i } \Gamma(1,t) = \mu(t) \ \forall t \in [a,b], \text{ oraz } \Gamma(s,a) = \Gamma(s,b) \ \forall s \in [0,1].$$

Ponieważ prostokąt $[0,1] \times [a,b]$ jest zwarty, więc funkcja ta jest jednostajnie ciągła, a jej obraz $\mathrm{im}(\Gamma) = \Gamma([0,1] \times [a,b])$ jest zwarty. Wynika stąd, że liczba

$$\varepsilon \stackrel{def}{=} \mathrm{dist}(\mathrm{im}(\Gamma), \mathbb{C} \setminus U)$$

jest dodatnia, oraz istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że

$$\max(|s - s'|, |t - t'|) < \delta \Rightarrow |\Gamma(s,t) - \Gamma(s',t')| < \varepsilon.$$

Podzielmy prostokąt $[0,1] \times [a,b]$ odcinkami $\{s_i\} \times [a,b]$ i $[0,1] \times \{t_i\}$, $i = 0, \ldots, n$, na prostokąciki o średnicy $< \delta$. (Zakładamy, że $s_0 = 0$, $s_n = 1$, $t_0 = a$, $t_n = b$.) Niech

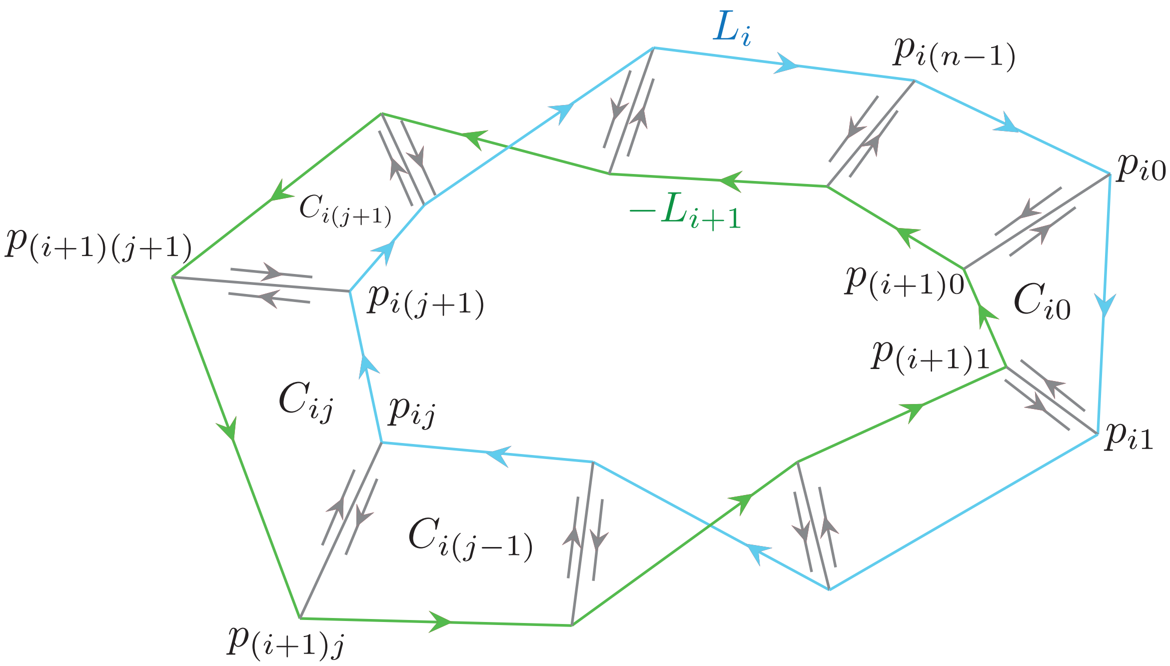
$$p_{ij} = \Gamma(s_i, t_j)$$

i rozważmy następujące łamane:

$$L_i = [p_{i0}, p_{i1}, \ldots, p_{in}] \quad \text{i} \quad C_{ij} = [p_{ij}, p_{i,j+1}, p_{i+1,j+1}, p_{i+1,j}, p_{ij}].$$

Wszystkie wierzchołki łamanej C_{ij} leżą w dysku $D(p_{ij}, \varepsilon) \subset U$. Cała łamana C_{ij} leży więc w tym dysku i $\int_{C_{ij}} f = 0$, na mocy twierdzenia 1 w §III.5. Dodajmy te równości przy i ustalonym, lecz j przebiegającym $0, \ldots, n-1$; otrzymamy zależności (patrz rysunek)

$$\int_{L_i} f - \int_{L_{i+1}} f = 0 \;\text{ dla }\; i = 0, \ldots, n-1. \tag{*}$$



Tak więc $\int_{L_0} f = \cdots = \int_{L_n} f$. Twierdzimy, że podobnie

$$\int_\lambda f = \int_{L_0} f \quad \text{oraz} \quad \int_\mu f = \int_{L_n} f \tag{**}$$

Istotnie, tym razem pętla $\lambda_{|[t_j,t_{j+1}]} \# [p_{0,j+1}, p_{0j}]$ przebiega w dysku $D(p_{0j}, \varepsilon) \subset U$, skąd całka funkcji f po niej jest równa zeru. Całki po $\lambda_{|[t_j,t_{j+1}]}$ i po $[p_{0j}, p_{0,j+1}]$ są więc równe i po dodaniu tych n równości otrzymujemy pierwszą zależność w (**). Dowód drugiej jest analogiczny.

Z (**) i równości $\int\limits_{L_0} f = \int\limits_{L_n} f$ wynika, że $\int\limits_\lambda f = \int\limits_\mu f$. □

Uwaga 1. * Postawmy pytanie, czy twierdzenie Cauchy'ego pozostaje słuszne dla dróg λ, μ, które niekoniecznie są pętlami. Odpowiedź jest negatywna, gdy przez homotopijność dróg w U rozumieć jedynie istnienie takiej rodziny ścieżek $(\gamma_s : [a,b] \to U)_{s\in[0,1]}$, że $\gamma_0 = \lambda, \gamma_1 = \mu$ i funkcja $\Gamma(s,t) := \gamma_s(t)$ jest ciągła. Lecz gdy (γ_s) jest **homotopią dróg relatywnie ich krańce**, tzn. ponadto $\gamma_s(c) = \gamma_0(c)$ dla $c = a, b$ i $s \in [0,1]$, to odpowiedź jest pozytywna – co wynika z twierdzenia 1, bo pętla $\lambda\#\mu^{\leftarrow}$ jest wtedy homotopijna w U z pętlą stałą. (Szczegóły są pozostawione jako zadanie.) Oczywiście, taka homotopia (γ_s) między λ i μ może istnieć tylko jeśli $\lambda(a) = \mu(a)$ i $\lambda(b) = \mu(b)$, lecz nie jest to warunek wystarczający.

5 Twierdzenie Riemanna o holomorficznej równoważności płaskich obszarów jednospójnych.

Definicja. Zbiór $U \subset \mathbb{C}$ jest **jednospójny**, jeśli jest łukowo spójny i każda pętla w U jest w U homotopijna z pętlą stałą.

Przykład. Każdy zbiór gwiaździsty (a więc i każdy zbiór wypukły) jest jednospójny. Istotnie, gdy $\gamma : [a,b] \to U$ jest pętlą w takim zbiorze U, zaś $z_0 \in U$ punktem występującym w definicji gwiaździstości, to wzór $\gamma_s(t) := sz_0 + (1-s)\gamma(t)$ zadaje homotopię pętli, łączącą $\gamma = \gamma_0$ z pętlą stale równą z_0. Tak samo, zbiór U jest łukowo spójny.

Dowiedziemy obecnie, że wiele wcześniej rozpatrywanych własności obszaru jest równoważnych temu, by był on jednospójny. Są one też równoważne własności oznaczonej niżej literą R, po raz pierwszy rozważanej przez Riemanna.

Twierdzenie 1. *Gdy U jest niepustym obszarem w $\mathbb{C}$, różnym od $\mathbb{C}$, to równoważne są warunki:*

a) obszar U jest jednospójny;

b) $\int_\gamma f = 0$ dla każdej funkcji $f \in H(U)$ i każdej drogi zamkniętej γ w U;

c) każda funkcja $f \in H(U)$ ma funkcję pierwotną;

d) każda funkcja holomorficzna $f : U \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ma gałąź logarytmu;

e) każda funkcja holomorficzna $f : U \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ma gałąź argumentu;

f) każda funkcja holomorficzna $f : U \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ma dla każdego $w \in \mathbb{C}$ gałąź swej w–tej potęgi;

g) każda różnowartościowa funkcja holomorficzna $f : U \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ma gałąź pierwiastka kwadratowego;

R) istnieje biholomorficzne przekształcenie obszaru U na dysk $D = \{z : |z| < 1\}$.

Tego, że z a) wynika b), dowiedziono we wniosku 1 w §4. Implikacje b)$\Rightarrow$ $c) \Rightarrow d) \Rightarrow e) \Rightarrow f) \Rightarrow g)$ bądź są oczywiste, jak ostatnia z nich, bądź zostały omówione wcześniej (odpowiednio w §§III.3, II.5, II.4). Implikacja $R) \Rightarrow a)$ wynika stąd, że jednospójność jest zachowywana przez homeomorfizmy, a dysk D jest jednospójny. Natomiast to, że jakikolwiek z warunków a)–g) implikuje R), nazywane jest na ogół twierdzeniem Riemanna o przekształceniach biholomorficznych. Najczęściej, nazwę tą odnosi się do implikacji *a)* $\Rightarrow$ *R)*. Poniżej twierdzenie udowodnimy wykazując, że *g)* $\Rightarrow$ *R)*, w oparciu o następujący

Lemat 1. *Niech punkt* $p \in U$ *i przekształcenie biholomorficzne* $h : U \to h(U) \subsetneq D$ *spełniają warunek* $h(p) = 0$*. Jeśli zachodzi g), to istnieje przekształcenie biholomorficzne* $f : U \to f(U) \subset D$ *takie, że*

$$f(p) = 0 \quad i \quad |f'(p)| > |h'(p)|. \tag{2}$$

Dowód. * (C. Caratheodory'ego, nawiązujący do poniższego pomysłu P. Koebego.) Obierzmy punkt $q \in D \setminus h(U)$ i homografię h_0, przeprowadzającą D na D, a q na 0. (Można za h_0 przyjąć przekształcenie Blaschkego b_q, patrz przykład w §2.) Wtedy $0 \notin h_0 \circ h(U)$ i z założenia istnieje gałąź f_0 pierwiastka kwadratowego z $h_0 \circ h$. Na koniec, niech homografia f_1 przeprowadza D na D, a $f_0(p)$ na 0. Za szukane przekształcenie f przyjmiemy złożenie

$$f := f_1 \circ f_0.$$

Żądanej nierówności $|f'(p)| > |h'(p)|$ można dowieść, wyliczając $f'(p)$. Można jednak ominąć wszelkie rachunki, jak niżej (w ślad za Caratheodorym).

Przyjmijmy $F(z) = z^2$ dla $z \in \widetilde{\mathbb{C}}$. Z definicji, $F \circ f_0 = h_0 \circ h$, wobec czego

$$h = G \circ f, \quad \text{gdzie } \ G := h_0^{-1} \circ F \circ f_1^{-1} : \widetilde{\mathbb{C}} \to \widetilde{\mathbb{C}}.$$

Ponieważ $h(p) = 0 = f(p)$, więc $G(0) = 0$. Ponadto, G przeprowadza D w D (bo czynią to h_0^{-1}, f_1^{-1} i F), lecz nie różnowartościowo (bo $f_1^{-1}(D) = D$ i $F_{|D}$ nie jest 1-1). Zatem $G_{|D}$ nie jest obrotem i z lematu Schwarza wynika, że $|G'(0)| < 1$. Stąd $|h'(p)| = |G'(0)||f'(p)| < |f'(p)|$. □

W dowodzie milcząco wykorzystaliśmy to, że gałąź pierwiastka funkcji biholomorficznej też jest taką funkcją (i dlatego jest nią f_0, a przez to i f).

* <u>Dowód implikacji *g)* $\Rightarrow$ *R)* w twierdzeniu.</u> Podzielimy go na 4 części.

1. Przeprowadzimy obszar U biholomorficznie na taki, który nie jest gęsty w $\mathbb{C}$.

W ślad za P. Koebem, ustalmy w tym celu $q \in \mathbb{C} \setminus U$ i niech f będzie gałęzią pierwiastka kwadratowego z funkcji $\mathrm{id}_U - q$. Zbiór $V = f(U)$ jest otwarty i wobec tego zbiór $-V = \{-v : v \in V\}$ –też. Pozostaje zauważyć, że $V \cap (-V) = \emptyset$. Jeśliby jednak $f(a) = -f(b)$ dla pewnych $a, b \in U$, to $a - q = (f(a))^2 = (f(b))^2 = b - q$, skąd $a = b$ i $f(a) = -f(a)$. Jest to niemożliwe, bo wówczas $0 = (f(a))^2 = a - q$, wbrew temu, że $q \notin U$ i $a \in U$.

2. Plan dalszego rozumowania pochodzi od L. Fejera i F. Riesza. Ustalmy punkt $p \in U$ i oznaczmy przez $\mathcal{F}$ zbiór wszystkich różnowartościowych przekształceń $f \in H(U)$, dla

których $f(p) = 0$ i $f(U) \subset D$. Jest on niepusty, bo do $\mathcal{F}$ należy złożenie $h \circ f_0$ dowolnego różnowartościwego przekształcenia $f_0 \in H(U)$, którego obraz jest rozłączny z pewnym dyskiem D_0 (patrz wyżej), z homografią h, przeprowadzającą D_0 na $\widetilde{\mathbb{C}} \setminus \overline{D}$, a $f_0(p)$ na 0. Odnotujmy, że $f'(p) \neq 0$ dla $f \in \mathcal{F}$ na podstawie uwagi 1i) z §1.

3. Twierdzimy, że $h'(p) = M := \sup\{|f'(p)| : f \in \mathcal{F}\}$ dla pewnego $h \in \mathcal{F}$.

Istotnie, istnieją $f_1, f_2, \dots \in \mathcal{F}$ dla których $\lim_{n\to\infty}|f_n'(p)| = M$. Na mocy twierdzeń Montela–Osgooda–Stieltjesa i Weierstrassa, można z ciągu (f_n) wybrać podciąg zbieżny niemal jednostajnie do funkcji $h \in H(U)$ takiej, że $|h'(p)| = M$. Stąd $h'(p) \neq 0$ i funkcja h, nie będąc stałą, przekształca obszar U biholomorficznie na zbiór otwarty $h(U)$. (Korzystamy z uwag 1 i 2 w §1.) A że zbiór ten jest zawarty w $\overline{D}$, to jest zawarty i w $\mathrm{Int}(\overline{D}) = D$.

4. Jeśliby $h(U) \neq D$, to z lematu wynikałoby istnienie przekształcenie $f \in \mathcal{F}$ takiego, że $|f'(p)| > |h'(p)| = M$, wbrew definicji liczby M. Zatem $h(U) = D$ i h jest szukanym przekształceniem. (Jest ono biholomorficzne, bo należy do $\mathcal{F}$.) $\square$

Uwaga 1. Płaszczyzna $\mathbb{C}$ nie jest holomorficznie równoważna z dyskiem D, bo każda funkcja holomorficzna $\mathbb{C} \to D$ jest stała (co wynika z twierdzenia Liouville'a).

Uwaga 2. * Dowiedliśmy zarazem, że jeśli warunek R) jest spełniony, to pewne przekształcenie biholomorficzne $f_p : U \to D$ przeprowadza dany punkt $p \in U$ na 0. Każde inne przekształcenie o h tych własnościach jest postaci $k \cdot f_p$, gdzie $|k| = 1$ (bo złożenie $h \circ f_p^{-1}$ biholomorficznie przeprowadza dysk D na D, a 0 na 0, więc jest mnożeniem przez pewne $k \in \partial D$; patrz wniosek 1 w §2).