Konwencje. a) Gdy mowa o „podprzestrzeniach" przestrzeni wektorowych (inaczej: liniowych), chodzi o podprzestrzenie liniowe.

b) Przez $\mathbb{F}$ oznaczamy ciało skalarów rozważanych przestrzeni wektorowych. Wszędzie zakładam, że $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Skalary często oznaczam λ, μ, ν, ale bywa, że c, t itp.

c) *Operatorami* nazywam funkcje z jednej przestrzeni wektorowej w drugą; staram się oznaczać je dużymi literami S, T, U, L. Wyjątek stanowią operatory o wartościach skalarnych, które nazywam *funkcjonałami* i staram się oznaczać małymi literami greckimi φ, ψ itp. Jeśli nie powiedziano inaczej, domyślnie zakładam liniowość rozważanych operatorów (w tym funkcjonałów).

d) „Zadania" to nietrudne lematy, których dowody uważam za pouczające ćwiczenia. Należy samodzielnie sprawdzać umiejętność ich rozwiązania; niektóre będą omawiane na ćwiczeniach. Niewykorzystywane dalej „prawdziwe" zadania, czasem przemycające dodatkowe wiadomości, oznaczam różnie: dopisaniem gwiazdki * lub nazywając je „zadaniami uzupełniającymi." „Problemy" to trudniejsze zadania uzupełniające.

e) Gwiazdką * oznaczam też materiał poboczny, np. dalej nie wykorzystywany (a niekoniecznie trudniejszy od pozostałego!), lub który uznaję za uzupełniający.

f) Kolorem niebieskim zaznaczyłem materiał pominięty na wcześniejszych zajęciach, a czerwonym – zmieniony w istotniejszy sposób po pierwotnym wywieszeniu.

Uwaga. Prawdziwość wielu dowodzonych tu twierdzeń zależy od przyjętego systemu aksjomatów. Jak na większości kursowych wykładów uniwersyteckich, przyjmuję zestaw aksjomatów Zermelo–Fraenkla wraz z pewnikiem wyboru i pomijam analizowanie tego, kiedy pewnik ten może być pominięty lub zastąpiony słabszym.

§ 1. Zbiory wypukłe i funkcje wypukłe

W tym pragrafie, przez V oznaczamy przestrzeń wektorową nad $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

1 Definicje i zadania wstępne.

Dla $X, Y \subset V$ i $\Lambda \subset \mathbb{F}$ piszemy

$$X \pm Y := \{x \pm y : x \in X, y \in Y\} \text{ i } \Lambda \cdot X := \{\lambda x : \lambda \in \Lambda, x \in X\}.$$

Definicja. **Odcinkiem** (domkniętym) w V, o końcach $x_1, x_2 \in V$, nazywamy zbiór $[x_1, x_2] = \{tx_1 + (1 - t)x_2 : t \in [0, 1]\}$.

Zadanie 1. Udowodnić **„aksjomat Pascha"**: gdy $b' \in [a, v]$ i $a' \in [b, v]$, to $[a, a'] \cap [b, b'] \neq \emptyset$. (Jest to aksjomat syntetycznej geometrii płaszczyzny.)

Definicja. Zbiór $X \subset V$ jest **wypukły**, gdy $[x_1, x_2] \subset X$ dla każdych $x_1, x_2 \in X$.

Spośród wszystkich wypukłych nadzbiorów danego zbioru $A \subset V$ istnieje najmniejszy (dlaczego?); nazywamy go **uwypukleniem** lub **powłoką wypukłą** zbioru A i oznaczamy $\mathrm{conv}(A)$.

Zadanie 2. a) $\mathrm{conv}(A) = \{t_1a_1 + \cdots + t_na_n : n \in \mathbb{N}, a_1, \ldots, a_n \in A, t_1, \ldots, t_n \in [0,1]$ i $\sum_i t_i = 1\}$.

b) Gdy niepuste zbiory $A, B \subset V$ są wypukłe, to $\mathrm{conv}(A \cup B) = \bigcup_{(a,b)\in A\times B}[a,b]$.

Definicja. Funkcję $p : X \to [-\infty, \infty)$, gdzie $X \subset V$, nazywamy **wypukłą**, jeśli X jest zbiorem wypukłym i $p(tx_1+(1-t)x_2) \leq tp(x_1)+(1-t)p(x_2)$ dla $x_1, x_2 \in X$ i $t \in (0,1)$. (Gdy $p(x_1) = -\infty$ lub $p(x_2) = -\infty$, to za wartość prawej strony przyjmujemy $-\infty$.)

Zadanie 3. a) Gdy funkcja $p : X \to [-\infty, \infty)$ jest wypukła, to wypukły jest zbiór
$$A := \{(x,t) : x \in X \text{ i } t \geq p(x)\} \subset V \times \mathbb{R}.$$

b) Odwrotnie, gdy $A \subset V \times \mathbb{R}$ jest zbiorem wypukłym, którego rzut na V oznaczmy przez X, to wzór $p(x) := \inf\{c : (x,c) \in A\}$, $x \in X$, wyznacza funkcję wypukłą p. Przy $q(x) := \sup\{c : (x,c) \in A\}$, funkcja $-q : X \to [-\infty, \infty)$ też jest więc wypukła.

Zadanie 4. a) Gdy obie funkcje $p : V \to \mathbb{R}$ i $-p$ są wypukłe i $p(0_V) = 0$, to p jest funkcją $\mathbb{R}$–liniową.

b) Funkcja $p : V \to \mathbb{R}$, spełniająca warunek $p(tv) = t \cdot p(v)$ dla $v \in V$ i $t \geq 0$, jest wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy $p(v + w) \leq p(v) + p(w)$ dla $v, w \in V$.

2 Twierdzenia Kakutaniego, Mazura–Orlicza oraz wersja Mazura tw. Hahna–Banacha.

Twierdzenie 1 (S. Kakutaniego). *Rozłączne, wypukłe zbiory $A, B \subset V$ można powiększyć do rozłącznych i wypukłych zbiorów $\widetilde{A}$ i $\widetilde{B}$, dla których $\widetilde{A} \cup \widetilde{B} = V$.*

Dowód. W zbiorze wszystkich par (P, Q) wypukłych podzbiorów przestrzeni V takich, że $P \supset A$, $Q \supset B$ i $P \cap Q = \emptyset$, wprowadźmy relację $(P,Q) \succ (P',Q') \Leftrightarrow P \supset P'$ i $Q \supset Q'$. Na mocy lematu Kuratowskiego–Zorna para istnieje maksymalna taka para $(\widetilde{A}, \widetilde{B})$. Pozostaje dowieść, że $\widetilde{A} \cup \widetilde{B} = V$.

Przypuśćmy więc, że $v \in V \setminus (\widetilde{A} \cup \widetilde{B})$. Ponieważ $(\mathrm{conv}(\widetilde{A} \cup \{v\}), \widetilde{B}) \succ (\widetilde{A}, \widetilde{B})$, więc z maksymalności pary $(\widetilde{A}, \widetilde{B})$ wynika, że $\mathrm{conv}(\widetilde{A} \cup \{v\}) \cap \widetilde{B} \neq \emptyset$, a tym samym $[a,v] \cap \widetilde{B} \neq \emptyset$ dla pewnego $a \in \widetilde{A}$. (Korzystamy z zadania 2b) w p.1.) Tak samo, $[b,v] \cap \widetilde{A} \neq \emptyset$ dla pewnego $b \in \widetilde{B}$. Istnieją więc $a, a' \in \widetilde{A}$ i $b, b' \in \widetilde{B}$ takie, że $a' \in [b,v]$ i $b' \in [a,v]$. Ale wtedy $[a,a'] \subset \widetilde{A}$ i $[b,b'] \subset \widetilde{B}$ wobec wypukłości zbiorów $\widetilde{A}$ i $\widetilde{B}$, a także $[a,a'] \cap [b,b'] \neq \emptyset$ na mocy zadania 1 w p.1. Otrzymaliśmy sprzeczność, bo $\widetilde{A} \cap \widetilde{B} = \emptyset$, i to kończy dowód twierdzenia. □

Twierdzenie 2 (wzmocnienie S. Mazura tw. Hahna–Banacha). *Niech V_0 będzie podprzestrzenią liniową przestrzeni V, a funkcje $\mathbb{R}$–liniowa $\varphi_0 : V_0 \to \mathbb{R}$ i wypukła $p : V \to [-\infty, \infty)$ niech spełniają warunek $\varphi_0 \leq p_{|V_0}$. Wówczas φ_0 można przedłużyć do takiej $\mathbb{R}$–liniowej funkcji $\varphi : V \to \mathbb{R}$, że $\varphi \leq p$.*

Uwaga 1. Gdy funkcja p jest symetryczna, to uzyskamy $|\varphi| \leq p$. Jest tak, bo:
$$|\varphi(v)| = \max(\varphi(v), \varphi(-v)) \leq \max(p(v), p(-v)) = p(v) \text{ dla } v \in V.$$

Dowód twierdzenia. Niech $A_0 := \{(x,c) \in V \times \mathbb{R} : c \geq p(x)\}$, $B := \{(x,c) \in V_0 \times \mathbb{R} : c < \varphi_0(x)\}$ i $A := \operatorname{conv}(\{(0_V, 0)\} \cup A_0)$. Wówczas $A \cap B = \emptyset$, [1] więc z twierdzenia Kakutaniego wynika istnienie takich rozłącznych zbiorów wypukłych $\widetilde{A}, \widetilde{B} \subset V \times \mathbb{R}$, że $A \subset \widetilde{A}$, $B \subset \widetilde{B}$ i $\widetilde{A} \cup \widetilde{B} = V \times \mathbb{R}$.

Oznaczmy przez $\varphi : V \to [-\infty, \infty)$ funkcję $x \mapsto \inf\{c : (x,c) \in \widetilde{A}\}$; wtedy $\varphi \leq p$, funkcja φ jest wypukła (patrz zadanie 3b) w p.1) i $\varphi(0_V) = 0$ (dlaczego?). Dla $x \in V$ zachodzi więc $0 \leq \frac{1}{2}(\varphi(x) + \varphi(-x))$, skąd $\varphi(x) > -\infty$. A że $\widetilde{A}$ i $\widetilde{B}$ przecinają prostą $\{x\} \times \mathbb{R}$ wzdłuż dopełniających się zbiorów wypukłych, to $\varphi(x) = \sup\{c \in \mathbb{R} : (x,c) \in \widetilde{B}\}$. Stąd wnosimy, że i funkcja $-\varphi$ jest wypukła (nadal zadanie 3b) w p.1) oraz $\varphi_{|V_0} \geq \varphi_0$. Funkcja φ jest więc $\mathbb{R}$–liniowa na podstawie zadania 4a) w p.1, zaś z nierówności $\varphi_{|V_0} \geq \varphi_0$ i antysymetrii funkcji liniowych wynika, że $\varphi_{|V_0} = \varphi_0$. $\square$

Twierdzenie 3 (wersja twierdzenia S. Mazura i W. Orlicza)**.** *Dla zbioru $S \subset V \times \mathbb{R}$, którego rzut na V jest podprzestrzenią liniową w V, równoważne są warunki:*

a) istnieje taka $\mathbb{R}$–liniowa funkcja $\varphi : V \to \mathbb{R}$, że **zbiór S leży nad jej wykresem***, tzn. dla każdego punktu $(x,c) \in S$ zachodzi $c \geq \varphi(x)$;*

b) dla każdych skończonych układów $\{(x_\gamma, c_\gamma)\}_{\gamma \in \Gamma} \subset S$ i $\{t_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma} \subset (0, \infty)$, jeśli $\sum_\gamma t_\gamma x_\gamma = 0$, to $\sum_\gamma t_\gamma c_\gamma \geq 0$.

Dowód. Gdy φ zaświadcza o prawdziwości a), to dla układów $\{t_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ i $\{(x_\gamma, c_\gamma)\}_{\gamma \in \Gamma}$ opisanych w b) zachodzi $\sum_\gamma t_\gamma c_\gamma \geq \sum_\gamma t_\gamma \varphi(x_\gamma) = \varphi(\sum_\gamma t_\gamma x_\gamma) = 0$. Zatem a)$\Rightarrow$b).

Niech teraz spełniony będzie warunek b) i niech $A := \operatorname{conv}(S)$ i $p(x) := \inf\{c : (x,c) \in A$ dla $x \in V$. Z b) i zadań 3b) i 2 w p.1 wynika wypukłość p i to, że $p(0_V) \geq 0$. Wobec twierdzenia 2 (zastosowanego przy $V_0 = \{0\}$) istnieje więc taka $\mathbb{R}$–liniowa funkcja $\varphi : V \to \mathbb{R}$, że $\varphi \leq p$. Dla $(x,c) \in S$ zachodzi więc $c \geq p(x) \geq \varphi(x)$. $\square$

Uwaga 2. a) Gdy dane są zbiory $S, T \subset V \times \mathbb{R}$, to zagadnienie istnienia funkcjonału φ takiego, że S leży nad, a T pod jego wykresem, sprowadza się do istnienia funkcjonału, którego wykres leży pod zbiorem $S \cup (-T)$.

b) Założenie twierdzenia 3 można osłabić; patrz niżej zadanie uzupełniające 5.

Zadania uzupełniające i problemy. Niżej, $\ell_\infty(T) := \{f : T \to \mathbb{R} |\ \sup_t |f(t)| < \infty\}$.

1. Niech rodzina G przekształceń zbioru T i podprzestrzeń liniowa W przestrzeni $\ell_\infty(T)$ będą takie, że $1_T \in W$ i $f \circ g \in W$ dla wszystkich $f \in W$ i $g \in G$. (1_T to funkcja stała, równa 1.) Dowieść równoważności warunków:

a) Istnieje nieujemny funkcjonał liniowy $\varphi : W \to \mathbb{R}$ taki, że $\varphi(1_T) = 1$ i $\varphi(f \circ g) = \varphi(f)$ dla wszystkich $f \in W$ i $g \in G$. („Nieujemny" oznacza, że $\varphi(f) \geq 0$ dla

[1] Istotnie, gdy $(x,c) \in A$, to albo $x \notin V_0$ i przez to $(x,c) \notin B$, albo $(x,c) = t(v,d)$, gdzie $t \in (0,1]$, $v \in V_0$ i $d \geq p(v) \geq \varphi_0(v)$; patrz zadanie 2b) w p.1. W drugim przypadku $c = td \geq \varphi_0(x)$, z liniowości φ_0, więc $(x,c) \notin B$.

nieujemnych funkcji $f \in W$.)

b) Dla dowolnych $n \in \mathbb{N}$ oraz $f_1, \ldots, f_n \in W, g_1, \ldots, g_n \in G$, kres górny funkcji $\sum_{i=1}^{n}(f_i \circ g_i - f_i)$ jest nieujemny.

2. Dowieść, że na przestrzeni $\ell_\infty(\mathbb{N})$ istnieje funkcjonał liniowy φ taki, że gdy pisać x_n zamiast $x(n)$ dla funkcji $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, zaś $\underline{\lim}$ i $\overline{\lim}$ zamiast $\lim_n \inf$ i $\lim_n \sup$, to

$$\underline{\lim}\ x \leq \varphi(x) \leq \overline{\lim}\ x \quad \text{i} \quad \varphi(x) = \varphi((x_{n+1})) \text{ dla } x = (x_n) \in \ell_\infty(\mathbb{N})$$

3. Dowieść następującego twierdzenia Mazura i Orlicza: dla dodatnio jednorodnej funkcji wypukłej $p : V \to \mathbb{R}$ i zbioru $S \subset V \times \mathbb{R}$, równoważne są warunki: a) istnieje $\mathbb{R}$–liniowa funkcja z V w $\mathbb{R}$, której wykres leży nad S, a pod wykresem funkcji p, oraz b) dla każdych skończonych układów $\{(x_\gamma, c_\gamma)\}_{\gamma\in\Gamma} \subset S$ i $\{t_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma} \subset (0, \infty)$ zachodzi nierówność $\sum_\gamma t_\gamma c_\gamma \leq p(\sum t_\gamma x_\gamma)$.

4. Dowieść, że funkcja wypukła $p : V \to \mathbb{R}$ jest obwiednią górną pewnej rodziny Φ funkcjonałów afinicznych (tzn. $p(x) = \sup_{\varphi\in\Phi} \varphi(x)$ dla $x \in V$). Gdy ponadto $p(tv) = tp(v)$ dla wszystkich $v \in V$ i $t \geq 0$, to funkcjonały można obrać liniowe.

5. Dowieść tezy twierdzenia 3 przy założeniu, że uwypuklenie C rzutu zbioru S na V jest symetryczne względem zera (lub słabiej: że dla każdego $x \in C$ zachodzi $((-\infty, 0) \cdot x) \cap C \neq \emptyset$.) (Wskazówka: w dowodzie implikacji b)$\Rightarrow$a) zastąpić wpierw S przez $(0, \infty) \cdot S$; zauważyć, że wtedy otrzymany zbiór C będzie podprzestrzenią liniową. Otrzymaną funkcję liniową $C \to \mathbb{R}$ rozszerzyć liniowo na V, korzystając z istnienia bazy Hamela w V.)

Problem 1. Dowieść, że każda przemienna grupa $(G, +)$ jest **średniowalna** (ang. „amenable"), tzn. na $\ell_\infty(G)$ istnieje nieujemny funkcjonał liniowy $\varphi \neq 0$ taki, że $\varphi(f) = \varphi(f_g)$ dla wszystkich $f \in \ell_\infty(G)$ i $g \in G$, gdzie $f_g(x) := f(x + g)$ dla $x \in G$.

Problem 2. Dowieść następującego twierdzenia Banacha: na przestrzeni $\ell_\infty([0, \infty))$ istnieje funkcjonał liniowy φ taki, że $\underline{\lim}_{t\to\infty} f(t) \leq \varphi(f) \leq \overline{\lim}_{t\to\infty} f(t)$ oraz $\varphi(f) = \varphi(f_s)$ dla $f \in \ell_\infty([0, \infty))$ i $s \in (0, \infty)$. (Oznaczenie f_s patrz wyżej).

Problem 3. Udowodnić kolejne twierdzenia Banacha:

a) Na przestrzeni $V = \ell_\infty^{\mathbb{R}}(T)$, gdzie T to okrąg $T = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, istnieje nieujemny funkcjonał liniowy $\varphi \neq 0$ taki, że $\varphi(f) = \int_0^{2\pi} f(e^{it})\, dt$ dla funkcji mierzalnych $f \in V$ i $\varphi(f) = \varphi(f_g)$ dla $g \in T$ i $f \in V$. (Oznaczenia jak w problemie 1.)

b) Wywnioskować, że miarę Lebesgue'a na prostej $\mathbb{R}$ można rozszerzyć do nieujemnej miary addytywnej, określonej na wszystkich podzbiorach prostej $\mathbb{R}$ i niezmienniczej względem dowolnej izometrii tej prostej. (Miara taka przyjmuje m.in. wartość ∞; nie może ona być przeliczalnie addytywna. Banach udowodnił też, że można w b) zastąpić prostą $\mathbb{R}$ przez płaszczyznę $\mathbb{R}^2$, lecz – wraz z Tarskim – nie przez przestrzeń $\mathbb{R}^3$.)

3 Przedłużanie funkcjonałów zespolonych

Lemat 1. *Gdy $\psi : V \to \mathbb{R}$ jest funkcjonałem $\mathbb{R}$–liniowym na zespolonej przestrzeni wektorowej V, to istnieje jedyny $\mathbb{C}$–liniowy funkcjonał $\varphi : V \to \mathbb{C}$ taki, że $\psi = \mathrm{Re}\,\varphi$; jest on zadany wzorem*

$$\varphi(v) = \psi(v) - \mathbf{i}\psi(\mathbf{i}v) \quad dla\ v \in V. \tag{1}$$

Ponadto, $|\varphi| \le p$ dla każdej funkcji $p : V \to \mathbb{R}$ takiej, że $p \ge \psi$ oraz

$$p(\lambda v) = p(v) \text{ dla } v \in V \text{ i jednostkowych } \lambda \in \mathbb{C}. \tag{2}$$

Dowód. Wzór (1) określa funkcjonał o żądanych własnościach: $\mathbb{C}$–liniowość wynika z $\mathbb{R}$–liniowości i tego, że $\varphi(\mathbf{i}v) = \mathbf{i}\varphi(v))$, a dowód jedyności jest pozostawiony jako ćwiczenie. Dla dowodu pozostałej części weźmy $v \in V$. Jeśli $\varphi(v) = 0$ to oczywiście $|\varphi(v)| \le p(v)$. Gdy zaś $\varphi(v) \ne 0$ to przy $\lambda := |\varphi(v)|/\varphi(v)$ mamy $\varphi(\lambda v) = |\varphi(v)| \in \mathbb{R}$, skąd $\psi(\lambda v) = |\varphi(v)|$ (bo $\psi = \mathrm{Re}\varphi$) i dalej $|\varphi(v)| = \psi(\lambda v) \le p(\lambda v) = p(v)$. (Jest tak, bo $\psi \le p$, $|\lambda| = 1$ i zachodzi (2).) ⊟

Wniosek 1. *Niech V_0 będzie podprzestrzenią zespolonej przestrzeni liniowej V, zaś funkcje $p : V \to \mathbb{R}$ i $\varphi_0 : V_0 \to \mathbb{C}$ będą takie, że $\mathrm{Re}\,\varphi_0 \le p_{|V_0}$. Jeśli funkcja φ_0 jest $\mathbb{C}$–liniowa, a p jest wypukła i spełnia warunek (2), to φ_0 można przedłużyć do takiej $\mathbb{C}$–liniowej funkcji $\varphi : V \to \mathbb{C}$, że $|\varphi| \le p$.*

Dowód. Korzystamy z twierdzenia 2 w p.2 (dla $\mathbb{R}$–liniowej funkcji $\mathrm{Re}\varphi_0$) i z lematu. ⊟

4 Przestrzenie liniowe unormowane i przedłużanie funkcjonałów ciągłych.

Definicja. Norma i wyznaczona przez nią metryka (i topologia); przesuwalność tej metryki. Domknięcie zbioru X w tej metryce oznaczam cl$X$ lub $\overline{X}$, kulę $\{v \in V : \|v\| < 1\}$ przez B_V, a sferę $\{v : \|v\| = 1\}$ przez S_V. Przestrzeń liniowa unormowana.

Uwaga 1. Z zadania 4b) w p.1 wynika, że norma jest funkcją wypukłą.

Zadanie 1. Dla liniowej przestrzeni unormowanej $(V, \|\ \|)$ nad $\mathbb{F}$ (zawsze $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$), funkcje $V \times V \ni (v, w) \mapsto v + w \in V$ i $(V \times \mathbb{F}) \ni (v, t) \mapsto tv \in V$ są ciągłe.

Uwaga 2. (i definicja). Gdy funkcjonał liniowy φ na przestrzeni unormowanej $(V, \|\ \|)$ jest ciągły w pewnym punkcie, to jest ciągły w zerze (dlaczego?), więc dla pewnego $r > 0$ liczba $c := \sup\{|\varphi(v)| :\ \|v\| \le r\}$ jest skończona. Stąd skończona (i niewiększa od c/r) jest **norma funkcjonału** φ, zdefiniowana wzorem

$$\|\varphi\| := \sup\{|\varphi(v)| :\ \|v\| \le 1\}. \tag{3}$$

Uwaga 3. Odwrotnie, gdy $\|\varphi\| < \infty$, to dla $u, v, w \in V$ zachodzi $|\varphi(u)| \le \|\varphi\| \cdot \|u\|$ (z jednorodności normy) i $|\varphi(v) - \varphi(w)| \le \|\varphi\| \cdot \|v - w\|$ (z poprzedniego) –tzn. funkcjonał φ jest (jednostajnie) ciągły, a nawet spełnia warunek Lipschitza ze stałą $\|\varphi\|$.

Zadanie 2. Jeśli funkcjonał φ jest liniowy i $\lambda \notin \varphi(rB_V)$, to $\|\varphi\| \le |\lambda|/r$.

Oznaczenie. Zbiór ciągłych funkcjonałów liniowych na przestrzeni $(V, \| \ \|)$ oznaczamy przez V^*.

Twierdzenie 2 w p.2 i wniosek 1 w p.3, zastosowane przy $p := \|\varphi_0\| \cdot \| \ \ \|$, dają

Twierdzenie 1 (Hahn, Banach ($\mathbb{F} = \mathbb{R}$); Sobczyk, Bohnenblust, Soukhomlinoff ($\mathbb{F} = \mathbb{C}$)). *Gdy V_0 jest podprzestrzenią liniową przestrzeni unormowanej V, to każdy funkcjonał $\varphi_0 \in V_0^*$ można przedłużyć do takiego funkcjonału $\varphi \in V^*$, że $\|\varphi\| = \|\varphi_0\|$.* $\boxminus$

Wniosek 1. *Dla każdego wektora $v \neq 0$ z przestrzeni unormowanej V istnieje taki funkcjonał $\varphi \in V^*$, że $\|\varphi\| = 1$ i $\varphi(v) = \|v\|$.*

Dowód. Przy $V_0 := \mathbb{F}v$ i $\varphi_0(\lambda v) = \lambda \|v\|$ dla $\lambda v \in V_0$, stosujemy twierdzenie 1. $\square$

Wniosek 2. *Gdy V_0 jest podprzestrzenią przestrzeni unormowanej V, to dla każdego wektora $v \notin \mathrm{cl}V_0$ istnieje taki funkcjonał $\varphi \in V^*$, że $\|\varphi\| = 1$, $\varphi(V_0) = \{0\}$ i $\varphi(v) = \mathrm{dist}(v, V_0)$ (tak oznaczam odległość od v do V_0).*

Dowód. Tym razem stosujemy wniosek 1 w p.3, przy $V_0 := \mathbb{F}v$, $\varphi_0(\lambda v) := \lambda \mathrm{dist}(v, V_0)$ i $p(x) := \mathrm{dist}(x, V_0)$ dla $x \in V$. (Gra rolę zadanie 4b) w p.1 i poniższe.) Ponieważ $|\varphi| \le p \le \| \ \|$, to $\|\varphi\| \le 1$ i $\varphi_0(V_0) = \{0\}$; ponadto, $\varphi(v) = \varphi_0(v) = \mathrm{dist}(v, V_0)$. Stąd wynika też, że dla $v_0 \in V_0$ zachodzi $|\varphi(v)| = |\varphi(v - v_0)| \le \|\varphi\| \|v - v_0\|$, więc biorąc kres dolny prawej strony po $v_0 \in V_0$, uzyskujemy $\|\varphi\| \ge |\varphi(v)|/\mathrm{dist}(v, V_0) = 1$. $\square$

Zadanie 3. Wyżej, $p(v + w) \le p(v) + p(w)$ i $p(\lambda v) = |\lambda| p(v)$ dla $v, w \in V$ i $\lambda \in \mathbb{F}$.

Zadanie uzupełniające 1. Dla $X \subset V$ i $Y \subset V^*$ niech $X^a := \{\varphi \in V^* : \varphi_{|X} = 0\}$ i $Y_a := \bigcap_{\varphi \in Y} \ker(\varphi)$. (Oboma razy, „$a$” jest od „anihilator”.) Dowieść, że X^a i Y_a są domkniętymi podprzestrzeniami liniowymi w $(V^*, \| \ \|)$ i $(V, \| \ \|)$, odpowiednio, przy czym $(X^a)_a = \overline{\mathrm{lin}}X$ i $(Y_a)^a \supset \overline{\mathrm{lin}}Y$.

5 Funkcjonał Minkowskiego i twierdzenia o oddzielaniu.

Definicja. Niech V będzie przestrzenią liniową nad $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, zaś $A \subset V$ będzie zbiorem wypukłym i **pochłaniającym**, tzn. takim że $\bigcup_{n=1}^{\infty} nA = V$. **Funkcjonałem Minkowskiego zbioru** A nazywamy funkcję $p_A : V \to [0, \infty)$, określoną wzorem :

$$p_A(v) := \inf\{t > 0 : v \in tA\}.$$

Zadanie 1. a) Dla $a \in A$ i $b \notin A$ zachodzi $p_A(a) \le 1 \le p_A(b)$.

b) $p_A(tv) = tp(v)$ i $p(v+w) \le p(v) + p(w)$ dla $t \ge 0$ i $v, w \in V$.

Zadanie 2. Dla podzbiorów A, B przestrzeni unormowanej udowodnić, że:
a) zbiór $A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\}$ jest otwarty, gdy A lub B jest otwarty,
b) $A+B$ jest domknięty, gdy jeden ze zbiorów A, B jest zwarty, a drugi domknięty.
c) $A + B$ jest wypukły gdy A i B są wypukłe.

Twierdzenie 1 (Mazura i Eidelheita o oddzielaniu)**.** *Niech A i B będą rozłącznymi, wypukłymi podzbiorami rzeczywistej przestrzeni unormowanej V.*

a) Jeśli któryś z tych zbiorów jest otwarty, to istnieje taki funkcjonał $\varphi \in V^*$, że $\varphi(a) < \varphi(b)$ dla wszystkich $a \in A$ i $b \in B$.

b) Jeśli któryś ze zbiorów A, B jest zwarty, a pozostały jest domknięty, to istnieje taki funkcjonał $\varphi \in V^*$, że $\sup \varphi(A) < \inf \varphi(B)$.

Dowód. W a) zbadajmy wpierw przypadek, gdy zbiór B jest jednopunktowy, $B = \{b\}$. Możemy założyć, że $0 \in A$ (inaczej przesuwamy A i b). Na prostej $\mathbb{R}b$ określmy funkcjonał φ_0 wzorem $\varphi_0(tb) = tp_A(b)$. Na półprostej $[0, \infty)b$ funkcje p_A i φ_0 są równe, patrz zadanie 1b), zaś dla $t < 0$ zachodzi $\varphi(tb) \le 0 \le p_A(tb)$. Twierdzenie 3 w p.2 zapewnia więc istnienie takiego liniowego przedłużenia $\varphi : V \to \mathbb{R}$ funkcjonału φ_0, że $\varphi \le p_A$. Spełnia on żądane warunki: dla $a \in A$ zachodzi $\varphi(a) \le p_A(a) < 1 \le \varphi(b)$ (przy $<$ gra rolę otwartość zbioru A), skąd wynika i ciągłość φ; por. zadanie 2 w p.4.

By dowieść a) w pełni, rozważmy zbiór $A' = A - B$. Jest on wypukły i nie zawiera zera, a przy założeniach z a) jest otwarty. (Wykorzystano zadanie 2.) Na podstawie powyższego przypadku szczególnego istnieje funkcjonał $\varphi \in V^*$ taki, że $\varphi(x) < \varphi(0)$ dla $x \in A'$. Tak więc $\varphi(a) - \varphi(b) < 0$ dla $a \in A$ i $b \in B$, co kończy dowód części a).

Gdy zaś A i B są jak w b), to zbiór A' jest domknięty, więc rozłączny z pewną kulą otwartą K wokół zera. Wobec a), istnieje funkcjonał $\varphi \in V^*$ taki, że $\varphi(a') < \varphi(k)$ dla $a' \in A'$ i $k \in K$. Zatem $\varphi \neq 0$, wobec czego liczba $\varepsilon := \inf \varphi(K)$ jest ujemna. Stąd $\varphi(a - b) \le \varepsilon$ dla $a \in A$ i $b \in B$, i ostatecznie $\sup \varphi(A) + |\varepsilon| \le \inf \varphi(B)$. $\square$

Uwaga 1. * Każdy funkcjonał $\varphi \neq 0$ jest przekształceniem otwartym (jest to zadanie). Jeśli więc w a) otwarty jest zbiór A, to $\varphi(A)$ jest przedziałem otwartym i uzyskujemy $\varphi(a) < \inf \varphi(B)$ dla $a \in A$.

Uwaga 2. Gdy przestrzeń V jest zespolona, to można strukturę zespoloną zaniedbać i funkcjonał dany twierdzeniem 1 zapisać jako część rzeczywistą funkcjonału $\mathbb{C}$–liniowego (i ciągłego, patrz wzór (1)). W rezultacie obie tezy twierdzenia pozostaną słuszne dla przestrzeni zespolonej, jeśli w nierównościach napisać $\mathrm{Re}\ \varphi$ w miejsce φ.

Wniosek 1. *Wypukły, domknięty podzbiór przestrzeni unormowanej V jest przecięciem pewnej rodziny otwartych półprzestrzeni $\{v \in V : \mathrm{Re}\ \varphi_\gamma(v) < c_\gamma\}, \gamma \in \Gamma$, a także domkniętych półprzestrzeni $\{v \in V : \mathrm{Re}\ \varphi_\gamma(v) \le c_\gamma\}$, gdzie $\varphi_\gamma \in V^*$ i $c_\gamma \in \mathbb{R}$ dla* *każdego $\gamma \in \Gamma$. Podobnie, każda domknięta podprzestrzeń liniowa przestrzeni V jest przecięciem rodziny domkniętych hiperpłaszczyzn postaci $\varphi^{-1}(0)$, gdzie $\varphi \in V^*$.*

Dowód. Dla każdego punktu $\gamma \notin A$, gdzie A to rozważany zbiór wypukły, istnieją $\varphi_\gamma \in V^*$ i $c_\gamma \in \mathbb{R}$ takie, że $\sup \mathrm{Re}\varphi_\gamma(A) < c_\gamma < \mathrm{Re}\varphi_\gamma(\gamma)$. Przy $\Gamma := V \setminus A$ i $P_\gamma := \{v \in V : \mathrm{Re}\varphi_\gamma(v) < c_\gamma\}$ zachodzi więc $A = \bigcap_{\gamma\in\Gamma} P_\gamma = \bigcap_{\gamma\in\Gamma} \overline{P_\gamma}$, bo $A \subset P_\gamma$ i $\gamma \notin \overline{P_\gamma}$ $(\gamma \in \Gamma)$. Końcowej części dowodzimy analogicznie, w oparciu o wniosek 2 w p.4. $\boxminus$

Przykład 1. Podamy przykład zastosowania twierdzeń o oddzielaniu. Niżej V i W są przestrzeniami unormowanymi, zaś operator $L : V \to W$ jest liniowy.

a) Dla $w \in W$ udowodnimy, że $w \in \mathrm{cl}(L(B_V)) \Leftrightarrow |\psi(w)| \le \|\psi \circ L\|\ \forall \psi \in W^*$. Istotnie, jeśli $w \notin \mathrm{cl}L(B_V)$, to na podstawie uwagi 2 istnieje funkcjonał $\psi \in W^*$ taki, że $\mathrm{Re}\ \psi(w) > \sup \mathrm{Re}\ \psi(L(B_V)) = \|\psi \circ L\|$. (Skąd wynika równość?) To dowodzi implikacji $\Leftarrow$, a odwrotna wynika z ciągłości ψ.

b) * Twierdzimy, że dla $\varphi_1, ..., \varphi_n \in V^*$ i $c_1, ..., c_n \in \mathbb{F}$ równoważne są warunki:
i) $\forall \varepsilon > 0$ zachodzi $\max_i |\varphi_i(x_\varepsilon) - c_i| < \varepsilon$ dla pewnego $x_\varepsilon \in B_V$;
ii) $|\sum_i c_i d_i| \le \|\sum_i d_i \varphi_i\|$ dla wszystkich $d_1, ..., d_n \in \mathbb{F}$.

Jest to **twierdzenie Helly'ego**. Wynika ono z a) przy $W = \mathbb{F}^n$ i $L = (\varphi_1, ..., \varphi_n)$, bo funkcjonał $\psi \in (\mathbb{F}^n)^*$ jest postaci $\mathbb{F}^n \ni (y_i) \mapsto \sum_i d_i y_i$, dla pewnych $d_1, ..., d_n \in \mathbb{F}$.

Problem 4. (Tw. Helly'ego, c.d.) Dowieść, że w b) równoważne są też warunki:
j) dla pewnego $x \in B_V$ zachodzi $c_i = \varphi_i(x)$ dla $i = 1, ..., n$;
jj) $|\sum_i c_i d_i| < \|\sum_i d_i \varphi_i\|$ dla wszystkich $d_1, ..., d_n \in \mathbb{F}$ takich, że $\sum_i d_i \varphi_i \ne 0$.

Zadanie uzupełniające 1. Niech podprzestrzenie $X, Y \subset \ell_1$ zdefiniowane będą tak:
$$X = \{x = (x_n) \in \ell_1 : x_{2n} = 0\ \forall n \in \mathbb{N}\}, \quad Y = \{y \in \ell_1 : y_{2n-1} = 2^n y_{2n}\ \forall n \in \mathbb{N}\}.$$
a) Dowieść, że X i Y są domknięte, $X \cap Y = \{0\}$ i suma $X + Y$ jest gęsta w ℓ_1.
b) Wskazać $z \in \ell_1 \setminus (X \oplus Y)$ i dowieść, że $X \cap (Y + z) = \emptyset$, lecz nie istnieje taki niezerowy funkcjonał $\varphi \in \ell_1^*$, że $\varphi(a) \le \varphi(b)$ dla $a \in X, b \in Y + z$.

6 Punkty ekstremalne i twierdzenie Kreina–Milmana (zadania uzupełniające)

Niżej, V, W są rzeczywistymi przestrzeniami liniowymi i $C \subset V$. Punkt x nazywamy **ekstremalnym** w C, jeśli $x \in C$ i nie istnieją $a, b \in C \setminus \{x\}$, dla których $x \in [a, b]$.

1. a) Nazwijmy **ścianą zbioru** C każdy zbiór $S \subset C$ taki, że dla każdych $a, b \in C$, jeśli $(a + b)/2 \in S$, to $\{a, b\} \subset S$. Dowieść, że:

i) x jest punktem ekstremalnym w C wtedy i tylko wtedy, gdy $\{x\}$ jest ścianą w C.

ii) Każdy punkt, ekstremalny w ścianie zbioru C, jest ekstremalny w C.

iii) Gdy $T : V \to W$ jest przekształceniem liniowym i S jest ścianą zbioru $T(C)$, to $T^{-1}(S) \cap C$ jest ścianą zbioru C.

2. Załóżmy dodatkowo, że $\dim(V) < \infty$ i zbiór C jest zwarty. Udowodnić, że:

a) Dla $\varphi \in V^*$, funkcja $\varphi_{|C}$ przyjmuje swe maksimum w pewnym ekstremalnym punkcie zbioru C. (Wskazówka: indukcja względem $\dim(V)$ oraz ii) i iii) wyżej.)

b) Każdy punkt zbioru C należy do domknięcia uwypuklenia zbioru E tych punktów, które są ekstremalne w C. (Wskazówka: przypuścić, że $x \in C \setminus \overline{\mathrm{conv}E}$ i obrać $\varphi \in V^*$ tak, by $\sup \varphi(\overline{\mathrm{conv}E}) < \varphi(x)$; skorzystać z a).

3. * Dowieść a) i b) bez założenia $\dim(V) < \infty$. (Wskazówka: dowieść w oparciu o lemat Kuratowskiego–Zorna, że wśród ścian w C istnieje minimalna względem inkluzji.)

Uwaga 1. Zadania 2 i 3 to **twierdzenia Minkowskiego** i **Kreina-Milmana**, odpowiednio. Twierdzenie Kreina-Milmana i jego powyższy dowód pozostają słuszne dla dowolnej przestrzeni lokalnie wypukłej V. (Definicja będzie w §12.1.)

§ 2. Przestrzenie Banacha i operatory liniowe (wstępne własności).

1 Operatory liniowe ciągłe.

Definicja. Dla przekształcenia (inaczej: **operatora**) liniowego L z przestrzeni wektorowej unormowanej $(V, \| \ \|_V)$ do przestrzeni $(W, \| \ \|_W)$ przyjmujemy

$$\|L\| := \sup\{\|L(v)\|_W : \|v\|_V \leq 1\} = \inf\{C : \|L(v)\|_W \leq C\|v\|_V \text{ dla } v \in V\}. \quad (4)$$

(Pierwsza równość to definicja; drugiej łatwo dowodzimy.) Gdy $\|L\| < \infty$, operator nazywamy **ograniczonym**. Zbiór operatorów ograniczonych z V w W oznaczamy przez $\mathcal{L}(V, W)$. Niżej, $(U, \| \ \|_U)$ też jest przestrzenią unormowaną.

Uwaga 1. a) $\mathcal{L}(V, W)$ jest przestrzenią liniową, a $\| \ \|$ normą na niej. (Jest to zadanie).

b) Norma ta, zwana **operatorową**, ma następującą ważną własność:

$$\|L \circ K\| \leq \|L\| \cdot \|K\| \text{ dla } K \in \mathcal{L}(U, V),\ L \in \mathcal{L}(V, W).$$

Istotnie, dla $u \in U$ mamy $\|(K \circ L)(u)\|_W \leq \|K\|\|L(u)\|_V \leq \|K\|\|L\|\|u\|_U$.

c) Jeśli operator $L \in \mathcal{L}(V, W)$ jest bijektywny i $L(B_V) \supset rB_W$, to $\|L^{-1}\| \leq 1/r$. (Istotnie, wtedy $L^{-1}(B_W) = \frac{1}{r}L^{-1}(rB_W) \subset \frac{1}{r}B_V$.)

Twierdzenie 1 (własności charakterystyczne ciągłych operatorów liniowych)**.** *Dla operatora liniowego $L : V \to W$ równoważne są warunki:*

1) Operator L jest ciągły.

2) Operator L jest ciągły w pewnym punkcie.

3) $\|L\| < \infty$ (więc L spełnia warunek Lipschitza ze stałą $\|L\| < \infty$).

Uzasadnienie twierdzenia jest takie, jak uwag 2 i 3 w §1.4. ⊟

Definicja. Operator $L \in \mathcal{L}(V, W)$ nazywamy **odwracalnym** lub **izomorfizmem liniowo − topologicznym**, lub krótko **izomorfizmem**, gdy jest homeomorfizmem.

Zaś nazwiemy go **zanurzeniem liniowo-topologicznym** lub **zanurzeniem izomorficznym**, lub krótko **zanurzeniem**, gdy jest homeomorfizmem na swój obraz $L(V)$.

Uwaga 2. Operator liniowy $L : V \to W$ wtedy i tylko wtedy jest zanurzeniem, gdy

$$c\|v\|_V \leq \|L(v)\|_W \leq C\|v\|_V \text{ dla pewnych } C, c > 0 \text{ i wszystkich } v \in V.$$

Uwaga 3. Każde ciągłe przekształcenie liniowe na przestrzeni V jest wyznaczone przez swe obcięcie do jakiegokolwiek zbioru **liniowo gęstego** w V–tzn. takiego, którego powłoka liniowa jest gęsta w V. (Dwa operatory liniowe, równe na jakimś zbiorze, są bowiem równe na jego powłoce liniowej; a gdy są ciągłe – to i na jej domknięciu.) Przykłady zbiorów liniowo gęstych omówimy na ćwiczeniach.

2 Przestrzenie Banacha i przestrzenie L_p

Przestrzenią Banacha nazywamy każdą przestrzeń unormowaną $(V, \|\ \|)$, która jest zupełna w wyznaczonej przez normę $\|\ \|$ metryce $d(v, w) = \|v - w\|$ $(v, w \in V)$. (Oznacza to, że każdy ciąg, spełniajacy w tej metryce warunek Cauchy'ego, jest w niej zbieżny do pewnego elementu przestrzeni.) Użyteczne okaże się następujące kryterium:

Lemat 1. *Dla wektorowej przestrzeni unormowanej $(V, \|\ \|)$ równoważne są warunki:*
a) Norma $\|\ \|$ jest zupełna (tzn., $(V, \|\ \|)$ jest przestrzenią Banacha);
b) każdy **bezwględnie zbieżny** *szereg $\sum_n v_n$ w $(V, \|\ \|)$ (tzn. taki, że $\sum_n \|v_n\| < \infty$) jest zbieżny (czyli ciąg sum cząstkowych $\sigma_n = v_1 + \cdots + v_n$ ma w $(V, \|\ \|)$ granicę);*
c) zbieżny jest każdy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ taki, że $\|v_n\| < 2^{-n}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Dowód. Implikacje a)$\Rightarrow$ b)$\Rightarrow$ c) są natychmiastowe.

c)$\Rightarrow$a). Niech ciąg $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ spełnia warunek Cauchy'ego w metryce d. Możemy wtedy obrać rosnący ciąg liczb naturalnych k_n tak, by $d(x_p, x_q) < 1/2^n$ dla $p, q \geq k_n$. Przy $v_n = x_{k_{n+1}} - x_{k_n}$ zachodzi więc $\|v_n\| \leq 1/2^n$ i wobec c) istnieje $\lim_n \sum_{j=1}^{n} v_j = \lim_n (x_{k_n} - x_{k_1})$. Zatem podciąg (x_{k_n}) ciągu Cauchy'ego (x_k) jest zbieżny, a tym samym zbieżny jest i sam ciąg (x_k). □

Wszystkie przestrzenie Banacha, które spotkamy w tym wykładzie, otrzymane są przez wykorzystanie jednej z konstrukcji opisanych niżej w twierdzeniu 1 lub w §3. Do końca §2 zakładamy, że:

(*) $\mu : \Sigma \to [0, \infty]$ jest przeliczalnie addytywną miarą na danym sigma–ciele Σ podzbiorów ustalonego zbioru T. (Mniej ściśle lecz krócej mówimy też, że μ jest miarą na T.)

Oznaczmy przez $\mathcal{M}$ zbiór funkcji Σ–mierzalnych, określonych na T μ–p.w. (czyli poza pewnym zbiorem z Σ, miary 0) i mających wartości w $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ (gdy $\mathbb{F} = \mathbb{R}$) lub w $\mathbb{C}$. Dla $f \in \mathcal{M}$ oznaczmy przez $[f]$ klasę tych funkcji $g \in \mathcal{M}$, które są μ–p.w. równe f. Klasy takie można dodawać i mnożyć przez skalary, wyłączywszy mnożenie klasy $[f]$ przez skalar ujemny gdy $\mu(f^{-1}(\infty)) \neq 0$. Gdy $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, na $\mathcal{M}$ i na zbiorze klas określone są relacje $\leq$, wyznaczone przez relację $f(t) \leq g(t)$ dla μ-p.w. $t \in T$.

Przyjmijmy też

$$\|f\|_p = \| \; [f] \; \|_p := \Big(\int_T |f|^p \mathrm{d}\mu \Big)^{1/p} \quad \text{gdy } p \in (0, \infty)$$

$$\|f\|_\infty = \| \; [f] \; \|_\infty := \inf\{C > 0 : |f(t)| \leq C \text{ dla } \mu\text{−p.w. } t \in T\}$$

$$L_p^{\mathbb{F}}(\mu) = L_p^{\mathbb{F}}(T, \Sigma, \mu) := \{[f] : f \in \mathcal{M} \text{ i } \|f\|_p < \infty\}$$

Ostrzeżenie. Poza nielicznymi miejscami, nie odróżniamy oznaczeniami klasy $[f]$ od funkcji f. Piszemy więc (co nie jest precyzyjne, a bywa i mylące[2]), że $f \in L_p^{\mathbb{F}}(\mu)$, jeśli $f \in \mathcal{M}$ i $[f] \in L_p^{\mathbb{F}}(\mu)$.

Przykład 1. Dla miary liczącej μ na danym zbiorze Γ (tzn. takiej, że $\mu(A) \in \{\infty, 0, 1, ...\}$ oznacza liczbę elementów zbiorów $A \subset \Gamma$) otrzymujemy przy $p \in [1, \infty)$ przestrzeń:

$$\ell_p^{\mathbb{F}}(\Gamma) := \{x = (x_\gamma)_{\gamma \in \Gamma} \in \mathbb{F}^\Gamma : \|x\|_p < \infty\}, \quad \text{gdzie } \|x\|_p = \Big(\sum_{\gamma \in \Gamma} |x_\gamma|^p \Big)^{1/p}$$

(Za sumę ostatniego szeregu przyjmujemy kres górny sum jego skończenie wielu składników.) Natomiast przy $p = \infty$ otrzymujemy przestrzeń

$$\ell_\infty^{\mathbb{F}}(\Gamma) := \{x = (x_\gamma)_{\gamma \in \Gamma} \in \mathbb{F}^\Gamma : \|x\|_\infty < \infty\}, \quad \text{gdzie } \|x\|_\infty := \sup_\gamma |x_\gamma|$$

Twierdzenie 1. $(L_p^{\mathbb{F}}(\mu), \| \; \|_p)$ *jest dla* $p \in [1, \infty]$ *przestrzenią Banacha nad* $\mathbb{F}$.

Uwaga 1. Często zaznaczanie ciała skalarów $\mathbb{F}$ pomijamy; piszemy też ℓ_p zamiast $\ell_p(\mathbb{N})$, a także $L_p(I)$ zamiast $L_p(\mu)$ dla miary Lebesgue'a μ na przedziale I.

3 Dowód twierdzenia 1 z p.2 i związane z nim wyniki

Twierdzenie 1. *Niech* $p, q \in [1, \infty]$ *i* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, *gdzie* $\frac{1}{\infty} := 0$. *Wówczas:*

a) (Nierówność Höldera.) $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$ *dla* $f, g \in \mathcal{M}$.[3]

b) Jeśli $p \neq \infty$ *i* $f \in L_p(\mu)$, *to* $\|f\|_p = \max\{\|fg\|_1 : g \in \mathcal{M}$ *i* $\|g\|_q \leq 1\}$.

c) (Nierówność Minkowskiego.) $\|f_1 + f_2\|_p \leq \|f_1\|_p + \|f_2\|_p$ *dla* $f_1, f_2 \in \mathcal{M}$.

Dowód. Ad a). Gdy $\|f\|_p \cdot \|g\|_q = 0$ lub $\infty \in \{p, q, \|f\|_p, \|g\|_q\}$, to nierówność zachodzi. W przeciwnym razie dzielimy ją przez prawą stronę, sprowadzając dowód do przypadku gdy $p \neq \infty \neq q$ i $\|f\|_p = 1 = \|g\|_q$. Wtedy jednak:

[2] Np. gdy $\mu = 0$, to każda funkcja $f \in \mathcal{M}$ spełnia warunek $\int_T |f|^p d\mu < \infty$, choć $L_p(\mu) = \{0\}$.

[3] Dla miary liczącej na zbiorze Γ wynika stąd, że $|\sum_\gamma x_\gamma y_\gamma| \leq (\sum_\gamma |x_\gamma|^p)^{1/p} (\sum_\gamma |y_\gamma|^q)^{1/q}$ gdy $p, q \neq 1$. (Nadal, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ i $\sum_\gamma |x_\gamma|^p + |y_\gamma|^q \leq \infty$.) Należy zauważyć, że wtedy zbiór $\Gamma_0 = \{\gamma : x_\gamma \neq 0\}$ jest przeliczalny (być może skończony) i $\sum_\gamma x_\gamma y_\gamma$ rozumiemy jako $\sum_{\gamma \in \Gamma_0} x_\gamma y_\gamma$. Ostatnia suma nie zależy od porządku sumowania, bo szereg jest zbieżny bezwzględnie: $\sum_{\gamma \in \Gamma_0} |x_\gamma y_\gamma| \leq (\sum_\gamma |x_\gamma|^p)^{1/p} (\sum_\gamma |y_\gamma|^q)^{1/q}$ ze względu na to, że jest tak gdy $\#\Gamma_0 < \infty$.

$\int|fg| \leq (1/p)\int|f|^p + (1/q)\int|g|^q = (1/p)+(1/q) = 1 = \|f\|_p\|g\|_q$
gdzie dla uzyskania $\leq$ wykorzystano nierówność Younga $xy \leq x^p/p + y^q/q$ $(x, y \geq 0)$.

Ad b). Możemy zakładać, że $\|f\|_p \neq 0$. Wobec a), wystarczy wskazać funkcję $g \in L_q(\mu)$, dla której $\|g\|_q = 1$ i $\int|fg| = \|f\|_p$. Gdy $p = 1$, jest nią $g := \mathrm{Sgn} f$. (Tu i dalej, $\mathrm{Sgn} f := \mathrm{Sgn} \circ f$, gdzie $\mathrm{Sgn}(0) := 0$ i $\mathrm{Sgn}(z) := |z|/z$ dla $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$.) Gdy zaś $1 < p < \infty$, to dla $h := (\mathrm{Sgn} f)|f|^{p-1}$ zachodzi $\|fh\|_1 = (\|f\|_p)^p = (\|h\|_q)^q$ (rachunki wykonano na ćwiczeniach), więc możemy wziąć $g := h/\|h\|_q$.

Ad c). Nierówność jest łatwa gdy $p = 1$ lub $\max(p, \|f_1\|_p, \|f_2\|_p) = \infty$. W pozostałym przypadku zauważmy wpierw że $f_1 + f_2 \in L_p(\mu)$: dla $a, b \in \mathbb{R}$ zachodzi $|a+b|^p \leq (2\max(|a|, |b|))^p \leq 2^p(|a|^p + |b|^p)$, więc istotnie $\|f_1 + f_2\|_p^p \leq 2^p(\|f_1\|_p^p + \|f_2\|_p^p) < \infty$. Do $f := f_1 + f_2$ możemy więc zastosować b). A że $\|(f_1 + f_2)g\|_1 \leq \|f_1 g\|_1 + \|f_2 g\|_1$ dla $g \in \mathcal{M}$, to uzyskamy $\|f_1 + f_2\|_p \leq \|f_1\|_p + \|f_2\|_p$. ⊟

Uwaga 1. Uzupełnienie części b) da zadanie 1.

Twierdzenie 2 (o zbieżności monotonicznej; Henri Lebesgue i Beppo Levi)**.** *Gdy ciąg nieujemnych funkcji mierzalnych f_n jest μ–p.w. monotonicznie zbieżny do f i $\int_T f_1 < \infty$, to $f \in \mathcal{M}$ i $\int_T f_n d\mu \to \int_T f d\mu$.* (Twierdzenie to przyjmuję jako znane.)

Twierdzenie 3 (Lebesgue'a o zbieżności majoryzowanej w L_p, $p \neq \infty$)**.** *Niech funkcje f_n $(n \in \mathbb{N})$ i g należą do $L_p^{\mathbb{F}}(\mu)$ i $\forall n\ |f_n| \leq g$. Jeśli ciąg f_n jest μ-p.w. zbieżny do pewnej funkcji f, to $f \in L_p^{\mathbb{F}}(\mu)$ i $\|f - f_n\|_p \to 0$.*

Dowód. Możemy (i będziemy) zakładać, że $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ -inaczej rozpatrzymy oddzielnie części rzeczywiste i urojone. Niech $u_n(t) = \inf\{f_i(t) : i \geq n\}$ i $v_n(t) = \sup\{f_i(t) : i \geq n\}$ dla $t \in T$ i $n \in \mathbb{N}$. Wówczas $(v_n - u_n)(t) \searrow 0$ dla p.w. $t \in T$, przy czym $(v_1 - u_1)^p \leq 2^p g^p$ (bo $|u_n|, |v_n| \leq g$). Z twierdzenia 2 wynika więc, że $\int_T (v_n - u_n)^p d\mu \to 0$ –co daje tezę, bo $|f - f_n| \leq v_n - u_n$. (Gra rolę i to, że -jak wiemy- $f \in \mathcal{M}$.) □

Dowód twierdzenia 1 z p.2. Z nierówności Minkowskiego wynika, że $L_p(\mu)$ jest przestrzenią liniową, zaś $\|\ \|_p$ jest normą. (Gra rolę to, że $(\|f\|_p = 0) \Leftrightarrow ([f] = [0])$.) Niech funkcje $f_n \in L_p(\mu)$ będą takie, że $\|[f_n]\|_p < 1/2^n$ dla $n \in \mathbb{N}$; dowiedziemy zbieżności szeregu $\sum_n [f_n]$w normie $\|\ \|_p$. To zakończy dowód, patrz lemat 1 w p.2.

Gdy $p = \infty$, to dla każdego n istnieje zbiór $T_n \subset T$ taki, że $\mu(T_n) = 0$ i $|f_n(t)| < 1/2^n$ dla $t \notin T_n$. Poza zbiorem $T_\infty := \bigcup_n T_n$, miary 0, szereg $\sum_n f_n$ jest bezwzględnie zbieżny do funkcji f takiej, że $|f - \sum_{i=1}^n f_i| \leq 1/2^n\ \forall n$. Zatem $\|[f] - \sum_{i=1}^n [f_i]\|_\infty \to 0$.

Gdy zaś $p \neq \infty$, to przyjmijmy $g_n = \sum_{i=1}^n |f_i|$. Wobec nierówności Minkowskiego, $\int_T g_n^p\, d\mu \leq (\sum_{i=1}^n \|f_i\|_p)^p \leq 2^p$; a że $0 \leq g_1 \leq g_2 \leq \ldots$, to dla $g := \lim_n g_n$ zachodzi $\int_T g^p \leq 2^p$. W szczególności, zbiór $T_0 := g^{-1}(\infty)$ jest miary 0. Dla $t \notin T_0$ szereg $\sum_i f_i(t)$ jest (bezwzględnie) zbieżny do pewnej liczby $f(t)$. Ponieważ $|\sum_{i=1}^n f_i| \leq g$ dla $n \in \mathbb{N}$, to z twierdzenia 3 wynika, iż $f \in L_p(\mu)$ i $\|f - \sum_{i=1}^n f_i\|_p \to 0$. □

Twierdzenie 4. * *Niech* $p \in [1, \infty]$ *i niech ciąg* (g_n) *będzie w* $L_p(\mu)$ *zbieżny do* g. *Wówczas* (g_n) *zawiera podciąg, który jest zbieżny* μ*-p.w. do* g.

Dowód. Jak w dowodzie lematu 1 w p.2, istnieje podciąg (g_{k_n}) ciągu (g_n) taki, że $\|f_n\|_p \leq 1/2^n$ przy $f_n := g_{k_{n+1}} - g_{k_n}$. Z kolei, wyżej dowiedziono, że $\sum_n f_n$ zbiega p.w. ⊟

Zadanie 1. Niech rozważana miara μ będzie σ–skończona (tzn. T jest sumą przeliczalnie wielu zbiorów mierzalnych skończonej miary) lub licząca. Dla $f \in \mathcal{M}$ dowieść, że:

a) $\|f\|_\infty = \sup\{\|fg\|_1 : g \in L_\infty(\mu) \text{ i } \|g\|_1 \leq 1\}$.

b) Dla $p \in [1, \infty)$, jeśli $\|f\|_p = \infty$, to $\sup\{\|fg\| : \|g\|_q = 1\} = \infty$.

Zadanie 2. Dla $p, r, s, t \in [1, \infty)$ i funkcji μ–mierzalnych f, g, h udowodnić, że:

a) jeśli $\frac{1}{t} = \frac{1}{r} + \frac{1}{s}$, to $\|f \cdot g\|_t \leq \|f\|_r \cdot \|g\|_s$;

b) jeśli $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} + \frac{1}{t} = 1$, to $\|fgh\|_1 \leq \|f\|_r \cdot \|g\|_s \cdot \|h\|_t$;

c)* jeśli $\frac{1}{t} = \frac{c}{r} + \frac{1-c}{s}$ i $c \in [0, 1]$, to $\|f\|_t \leq \|f\|_r^c \cdot \|f\|_s^{1-c}$, zaś jeśli $t = cr + (1 - c)s$ i $c \in [0, 1]$, to $(\|f\|_t)^t \leq (\|f\|_r)^{cr} \cdot (\|f\|_s)^{(1-c)s}$. (Są to **nierówności Littlewooda i Liapunowa**, odpowiednio.) Stąd gdy $f \in L_r(\mu) \cap L_s(\mu)$, gdzie $r < s$, to skończone i wypukłe są funkcje $t \mapsto t \log \|f\|_t$ $(t \in [r, s])$ i $t \mapsto \log \|f\|_{1/t}$ $(t \in [1/s, 1/r])$.

Zadanie 3. Zależnie od liczby $p \geq 1$ znaleźć takie najlepsze stałe $C, c > 0$, że przy $\|(x, y)\|_p := (|x|^p + |y|^p)^{1/p}$ zachodzi $c\|(x, y)\|_2 \leq \|(x, y)\|_p \leq C\|(x, y)\|_2$ dla $x, y \in \mathbb{R}$.

Zadanie 4. a) Niech $x, y \in \mathbb{C}$. Dowieść, że jeśli $p \in [2, \infty)$, to $\|(x, y)\|_p \leq \|(x + y, x - y)\|_p / 2^{1/p}$. (Wskazówka: zadanie 3 i to, że dla $p = 2$ ma miejsce równość.)

b)* Jeśli $p \in (1, 2]$ i $q := p/(p - 1)$, to $\|(x, y)\|_q \leq \|(x + y, x - y)\|_p / 2^{1/p}$, lub inaczej, $(|x|^q + |y|^q)^{p-1} \leq \frac{1}{2}(|x + y|^p + |x - y|^p)$.

Zadanie uzupełniające 1. Dowieść, że dla $p \in (0, 1)$ i funkcji mierzalnych $f, g \geq 0$ prawdziwe są nierówności, powstałe z nierówności Höldera i Minkowskiego przez zastąpienie znaku $\leq$ znakiem $\geq$. (Liczba $q = p/(p-1)$ jest teraz ujemna i w nierówności Höldera zakładamy, że $g(t) \neq 0$ dla p.w. t.)

Zadanie uzupełniające 2. Niech $p \in (1, \infty)$ i $f \in L_p(\mu \otimes \nu)$, gdzie μ i ν są miarami σ–skończonymi. Dowieść, że $\left(\int \left(\int |f(s,t)| d\nu(t)\right)^p d\mu(s)\right)^{1/p} \leq \int \left(\int |f(s,t)|^p d\nu(t)\right)^{1/p} d\mu(s)$. (Wskazówka: twierdzenia 1b) i Fubiniego.)

4 Jednostajna wypukłość przestrzeni L_p dla $p \in (1, \infty)$

Zadanie 1. Dla $f, g \in L_p(\mu)$ udowodnić **nierówności Clarksona:**

a) $\|f\|_p^p + \|g\|_p^p \leq \frac{1}{2}(\|f+g\|_p^p + \|f-g\|_p^p)$ jeśli $p \in [2, \infty)$. (Wskazówka: zad. 4a) z p.3.)

b)* $\left(\|f\|_p^q + \|g\|_p^q\right)^{p-1} \leq \frac{1}{2}(\|f+g\|_p^p + \|f-g\|_p^p)$ jeśli $p \in (1, 2]$, gdzie $q = p/(p-1)$. (Wskazówka: lewą stronę przekształcić w oparciu o tożsamość $\|h\|_p^q = \| \, |h|^q \|_{p-1}$ i

„odwróconą nierówność Minkowskiego” z zadania uzupełniającego 1 w p.3; skorzystać z zadania 4b) w p.3.)

Definicja. Powiemy, że przestrzeń unormowana $(V, \| \ \|)$ jest **jednostajnie wypukła**, jeśli istnieje taka funkcja $\delta : (0,1) \to (0,1)$, że $\lim_{\varepsilon\to 0}\delta(\varepsilon) = 0$ i $\|v - w\| \le \delta(\varepsilon)$ dla wszystkich $v, w \in V$ spełniających warunki $\|v\| \le 1+\varepsilon$, $\|w\| \le 1+\varepsilon$ i $\|(v+w)/2\| \ge 1$.

Na podstawie zadania 1 przy $f = (v + w)/2, g = (v - w)/2$, dla $p \in (1,\infty)$ przestrzenie $L_p(\mu)$ są jednostajnie wypukłe. (Czy tak?) Stosuje się więc do nich:

Twierdzenie 1. *Niech $Y \neq \emptyset$ będzie wypukłym, domkniętym podzbiorem jednostajnie wypukłej przestrzeni Banacha $(V, \| \ \|)$ i niech $v \in V$. Wówczas istnieje jedyny element y_0 zbioru Y, dla którego $\|v - y_0\| = \operatorname{dist}(v, Y)$.*

Dowód. Możemy założyć, że $v \notin Y$. Wykorzystując przesunięcie o $-v$ i jednokładność o skali $1/\operatorname{dist}(v, Y)$ uzyskujemy też, że $v = 0$ i $\operatorname{dist}(0, Y) = 1$. Przyjmijmy dla $\varepsilon > 0$:

$$Y_\varepsilon = Y \cap (1 + \varepsilon)\overline{B}_V$$

Gdy $y_1, y_2 \in Y_\varepsilon$, to $(y_1 + y_2)/2 \in Y$, więc $\|y_1 + y_2\|/2 \ge 1$ (bo $\operatorname{dist}(0, Y) = 1$). Zatem $\|y_1 - y_2\| \le \delta(\varepsilon)$, gdzie δ jest funkcją z powyższej definicji, skąd $\operatorname{diam}(Y_\varepsilon) \le \delta(\varepsilon) \to 0$ przy $\varepsilon \to 0$, wobec dowolności $y_1, y_2 \in Y_\varepsilon$ i własności funkcji δ.

Na podstawie twierdzenia Cantora i zupełności przestrzeni V, zachodzi $\bigcap_n Y_{1/n} = \{y_0\}$ dla pewnego $y_0 \in Y$. Z określenia zbiorów $Y_{1/n}$ i definicji $\operatorname{dist}(0, Y)$ wynika, że $\|y_0\| \le 1 = \operatorname{dist}(0, Y) \le \|y_0\|$. A też gdy $y \in Y$ i $\|y\| = 1$, to $y = y_0$, bo $y \in \bigcap_n Y_{1/n}$. $\square$

Uwaga 1. * „Odskalowując” zauważamy wyżej, że gdy $r \le \operatorname{dist}(0, Y) < (1 + \varepsilon)r$, to zbiór $Y \cap (1 + \varepsilon)r\overline{B}_V$ jest niepusty i ma średnicę $\le r\delta(\varepsilon)$. Wykorzystamy to w §12.4.

§ 3. Konstrukcje prowadzące do przestrzeni Banacha i tematy pokrewne

1 Konstrukcje prowadzące do przestrzeni Banacha

i) Podprzestrzenie domknięte. Gdy mówimy o podprzestrzeni przestrzeni unormowanej $(V, \| \ \|)$ i nie powiedziano inaczej, rozpatrujemy ją z normą indukowaną przez $\| \ \|$. Domknięta podprzestrzeń przestrzeni Banacha jest w tej normie przestrzenią Banacha. Również i odwrotnie, gdy podprzestrzeń wektorowej przestrzeni unormowanej jest przestrzenią Banacha, to jest ona domknięta. Np. przestrzeń $\{(x_n) \in \ell_\infty : x_n = 0 \text{ dla prawie wszystkich } n\}$ nie jest przestrzenią Banacha w normie supremum, bo jest niedomkniętą podprzestrzenią przestrzeni ℓ_∞.

Przykłady przestrzeni Banacha, otrzymanych jako podprzestrzenie domknięte:

a) Przypomnijmy z §2.2 czy z wykładu Topologii I, że $\ell_\infty^{\mathbb{F}}(X)$ = zbiór funkcji ograniczonych z X w $\mathbb{F}$, jest przestrzenią Banacha z normą „sup”: $\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} |f(x)|$.

Gdy X jest przestrzenią zwartą, to przez $C^{\mathbb{F}}(X)$ oznaczymy przestrzeń funkcji ciągłych $X \to \mathbb{F}$, również z normą $\| \, \|_{\sup}$. Jest to przestrzeń Banacha, jako domknięta podprzestrzeń przestrzeni $\ell_\infty^{\mathbb{F}}(X)$.

b) Gdy X jest przestrzenią topologiczną, to przez $C_c^{\mathbb{F}}(X)$ oznaczmy przestrzeń funkcji ciągłych $f : X \to \mathbb{F}$, których **nośnik** $\mathrm{cl}\{x \in X : f(x) \neq 0\}$ jest zwarty. Przez $C_0^{\mathbb{F}}(X)$ oznaczymy zaś domknięcie tej przestrzeni w $\ell_\infty^{\mathbb{F}}(X)$; obie przestrzenie $C_c^{\mathbb{F}}(X)$ i $C_0^{\mathbb{F}}(X)$ rozpatrujemy z normą „sup". Przestrzeń $C_0^{\mathbb{F}}(X)$ jest wiec przestrzenią Banacha, lecz $C_c^{\mathbb{F}}(X)$ nią nie jest np. gdy $X = \mathbb{N}$ (dlaczego?).

c) Przez c oznaczymy przestrzeń wszystkich skalarnych ciągów zbieżnych, a przez c_0 jej podprzestrzeń c_0 wszystkich ciągów zbieżnych do 0, obie rozpatrywane z normą „sup". (Gdy gra rolę to, czy ciągi są zespolone, czy rzeczywiste, zaznaczamy to oddzielnie.) c można utożsamić z $C(X)$ dla przestrzeni $X = \{1, 2, \ldots, \infty\}$ mającej jedyny punkt skupienia ∞; natomiast c_0 – z $C_0(X)$ dla przestrzeni dyskretnej $X = \mathbb{N}$. Są to więc przestrzenie Banacha.

d)* Ogólniej, oznaczamy przez $c_0^{\mathbb{F}}(\Gamma)$ przestrzeń Banacha $C_0^{\mathbb{F}}(\Gamma)$, gdzie zbiór Γ wyposażony jest w topologię dyskretną. Wówczas (co należy sprawdzić) $C_0^{\mathbb{F}}(\Gamma) = \{(x_\gamma) \in \ell_\infty(\Gamma; \mathbb{F}) :$ dla każdego $\varepsilon > 0$ zachodzi $|x_\gamma| < \varepsilon$ dla p.w. $\gamma \in \Gamma\}$, z normą "sup" dziedziczoną z $\ell_\infty^{\mathbb{F}}(\Gamma)$.

e) * Niech D oznacza otwarty dysk jednostkowy $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, zaś $H(D)$ zbiór wszystkich funkcji ciągłych na dysku $\overline{D}$, które są holomorficzne w D. Przestrzeń $H(D)$ traktujemy jako podprzestrzeń przestrzeni $(C(\overline{D}), \| \, \|_{\sup})$. $H(D)$ jest przestrzenią Banacha, bo jest domknięta w $C(\overline{D})$, na mocy twierdzenia Weierstrassa o granicy jednostajnie zbieżnego ciągu funkcji holomorficznych.

ii) Przestrzeń operatorów ograniczonych, w tym przestrzeń sprzężona.

Stwierdzenie 1. *Niech* $(V, \| \, \|_V)$ *i* $(W, \| \, \|_W)$ *będą liniowymi przestrzeniami unormowanymi. Jeśli* $(W, \| \, \|_W)$ *jest przestrzenią Banacha, to* $(\mathcal{L}(V, W), \| \, \|)$ *też nią jest.*

Dowód. Istotnie, gdy $L_n \in \mathcal{L}(V, W)$ i $\|L_n\| < 2^{-n}$ dla $n \in \mathbb{N}$, to przy założeniu zupełności normy $\| \, \|_W$, dla $v \in V$ wektor $Lv = \sum_n L_n v$ jest poprawnie określony, bo $\|L_n v\|_W < 2^{-n}\|v\|_V$. Podobnie, otrzymany operator L spełnia dla $k \in \mathbb{N}$ warunki $\sup_{\|v\| \leq 1} \|Lv - \sum_{n=1}^{k} L_n v\|_W \leq \sum_{i>k} 2^{-i} \to 0$. ⊟

Uwaga 1. W szczególności, **przestrzeń sprzężona** (lub: **dualna**) $V^* = \mathcal{L}(V, \mathbb{F})$ jest zupełna – i to nawet wtedy, gdy przestrzeń unormowana $(V, \| \, \|_V)$ nie jest.

iii) Zmiana normy na równoważną; obraz przy operatorze otwartym.

Stwierdzenie 2. *Niech* $(V, \| \, \|_V)$ *będzie zupełną, a* $(W, \| \, \|_W)$ *dowolną liniową przestrzenią unormowaną. Jeśli istnieje operator* $L \in \mathcal{L}(V, W)$ *który jest otwarty (jako* *przekształcenie z V w W),*[4] *to przestrzeń $(W, \| \ \|_W)$ też jest zupełna.*

Dowód. Ponownie zastosujemy lemat 1 w p.1. Niech $w_n \in W$ i $\|w_n\| < 1/2^n$ (tzn. $w_n \in \frac{1}{2^n}B_W$) dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Z otwartości L wynika, że $L(B_V) \supset rB_W$ dla pewnego $r > 0$. Ponieważ $r2^n w_n \in rB_W \subset L(B_V)$, to $w_n = L(v_n)$ dla pewnych $v_n \in \frac{1}{2^n r}B_V$. A że V jest przestrzenią Banacha, to szereg $\sum_n v_n$ jest zbieżny, skąd i szereg $\sum_n w_n$ jest zbieżny (do $L(\sum_n v_n)$, z ciągłości i addytywności L).

Wniosek 1. *Gdy dwie wektorowe przestrzenie unormowane są liniowo–topologicznie izomorficzne i jedna z nich jest zupełna, to druga też. Gdy więc jedna z dwóch równoważnych (patrz niżej) norm na przestrzeni wektorowej jest zupełna, to druga też.*

Definicja. Normy $\| \ \|$ i $\| \ \|'$ na przestrzeni wektorowej V są **równoważne**, gdy przekształcenie identycznościowe $(V, \| \ \|) \to (V, \| \ \|')$ jest homeomorfizmem. Z uwagi 2 w §2.2 wynika, że jest tak wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją $c, C \in (0, \infty)$ takie, że

$$c\|v\| \leq \|v\|' \leq C\|v\| \ \text{ dla wszystkich } \ v \in V.$$

Uwaga 2. Wielokrotnie wykorzystamy następującą konsekwencję wniosku 1: liniowo–topologiczne zanurzenie przestrzeni Banacha w przestrzeń unormowaną $(W, \| \ \|_W)$, którego obraz zawiera zbiór A, liniowo gęsty w W, jest „na". Obraz ten jest bowiem zupełny w normie $\| \ \|_W$, a przez to domknięty w W – więc jest równy W, bo jako podprzestrzeń liniowa zawiera też zbiór $\mathrm{lin}(A)$, gęsty w W.

iv) Przestrzeń ilorazowa. Niech V_0 będzie podprzestrzenią wektorowej przestrzeni unormowanej $(V, \| \ \|_V)$. Oznaczmy przez $[v]$ warstwę wektora $v \in V$ względem V_0, a przez V/V_0 zbiór wszystkich takich warstw, tzn.:

$$[v] = v + V_0 \text{ dla } \ v \in V \ \text{ oraz } \ V/V_0 = \{[v] : v \in V\}.$$

Przypomnijmy, że poniższe wzory poprawnie określają działania w V/V_0:

$$\lambda[v] = [\lambda v] \ \text{ i } \ [v_1] + [v_2] = [v_1 + v_2] \ \text{ dla } v, v_1, v_2 \in V \ \text{ i } \ \lambda \in \mathbb{F}.$$

Przyjmijmy też (pierwsza równość to definicja, a dalsze to jej przekształcenia):

$$\| \ [v] \ \| := \inf\{\|v'\|_V : v' \in [v]\} = \mathrm{dist}(0, [v]) = \mathrm{dist}(v, V_0). \tag{5}$$

Stwierdzenie 3. *Gdy podprzestrzeń V_0 jest domknięta w V, to $(V/V_0, \| \ \|)$ jest wektorową przestrzenią unormowaną –przy tym zupełną, jeśli $(V, \| \ \|_V)$ zupełna.*

[4] tzn. dla każdego zbioru otwartego $U \subset V$, zbiór $L(U)$ jest otwarty w W. Równoważnie (ze względu na niezmienniczość topologii obu przestrzeni względem przesunięć i jednokładności): zbiór $L(B_V)$ jest otoczeniem zera w W.

Dowód. To, że $\| \ \|$ jest normą wynika z zadania 3 w §1.4 i domkniętości V_0 (powodującej, że $\|[v]\| \neq 0$ gdy $v \notin V_0$). Końcowa zaś część wynika ze swierdzenia 2. (Rzutowanie V na V/V_0 jest otwarte, bo przeprowadza kulę B_V na kulę jednostkową w V/V_0.) $\square$

Własności przestrzeni ilorazowej ujmuje następujące stwierdzenie:

Stwierdzenie 4. *Niech V będzie liniową przestrzenią unormowaną, a V_0 jej domkniętą podprzestrzenią, różną od V; niech też $P(v) := [v] \in V/V_0$ dla $v \in V$. Wówczas $P(B_V) = B_{V/V_0}$, więc rzutowanie ilorazowe P jest otwarte i $\|P\| = 1$. Ponadto, dla każdego przekształcenia liniowego $L : V \to W$ spełniającego warunek $\ker(L) \supset V_0$, istnieje jedyne przekształcenie $Q : V/V_0 \to W$ takie, że $L = Q \circ P$; przy tym $\|Q\| = \|L\|$. Gdy wyżej $\ker(L) = V_0$, to Q jest monomorfizmem liniowym, a gdy ponadto obraz $L(B_V)$ kuli jednostkowej w V zawiera kulę rB_W, to $\|Q^{-1}\| \leq 1/r$.* $\boxminus$

Zadanie 1. Niżej V i W to przestrzenie unormowane i V_0 jest domkniętą podprzestrzenią przestrzeni V, różną od V. W oparciu o stwierdzenie 4 dowieść, że:

a) Przekształcenie $T \in \mathcal{L}(V, W)$ jest otwarte na swój obraz wtedy i tylko wtedy, gdy $\|Tv\|_W \geq c \cdot \mathrm{dist}(v, \ker(T))$ dla pewnej stałej $c > 0$ i wszystkich $v \in V$. Wywnioskować, że wraz z T własność ta przysługuje $T_{|V_0}$, gdy $V_0 \subset V$ jest podprzestrzenią.

b) (Lemat F. Riesza.) Istnieje taki wektor $v \in V$, że $\|v\| = 1$ i $\mathrm{dist}(v, V_0) > 1/2$.

c) Przestrzeń $\{\varphi \in V^* : \varphi_{|V_0} = 0\}$ jest liniowo izometryczna z $(V/V_0)^*$. Ogólniej, $\widetilde{T} \mapsto \widetilde{T} \circ P$ jest izometrią przestrzeni $\mathcal{L}(V/V_0, W)$ na $\{T \in \mathcal{L}(V, W) : T_{|V_0} = 0\}$.

Zadanie uzupełniające 1. Niech V_0 będzie podprzestrzenią przestrzeni unormowanej V. Dowieść, że jeśli V_0 i V/V_0 są przestrzeniami Banacha, to i V nią jest.

v) Suma prosta. Gdy V i W są wektorowymi przestrzeniami unormowanymi, to przestrzeń wektorową $V \times W$ (oznaczaną też przez $V \oplus W$) wyposażyć można w topologię iloczynu kartezjańskiego. Dla każdej normy $\| \ \|$ na $V \times W$, która wyznacza tę topologię, przestrzeń unormowaną $(V \times W, \| \ \|)$ nazywamy **zewnętrzną sumą prostą** lub **iloczynem kartezjańskim** przestrzeni V i W. Wybór normy $\| \ \|$ nie jest jednoznaczny. (Przykładowe dogodne normy to $(v, w) \mapsto \max(\|v\|_V, \|w\|_W)$, czy $(v, w) \mapsto \|v\|_V + \|w\|_W$, czy $(v, w) \mapsto \sqrt{\|v\|_V^2 + \|w\|_W^2}$.) Z definicji, wszystkie możliwe normy $\| \ \|$ są wzajemnie równoważne w sensie opisanym w iii).

Stwierdzenie 5. *Suma prosta dwóch przestrzeni Banacha jest przestrzenią Banacha.*

Dowód. Wziąć $\|(v, w)\| := \max(\|v\|_V, \|w\|_W)$; skorzystać z wniosku 1. $\boxminus$

2 Własności przestrzeni skończenie–wymiarowych

Skończenie–wymiarowa wektorowa przestrzeń unormowana okazuje się być przestrzenią Banacha:

Twierdzenie 1. *Gdy wektorowa przestrzeń $(V, \| \ \|_V)$ jest skończonego wymiaru, to:*

a) każdy funkcjonał liniowy $\varphi : V \to \mathbb{F}$ jest ciągły;

b) każde przekształcenie liniowe przestrzeni V w wektorową przestrzeń unormowaną jest ciągłe;

c) każdy ograniczony i domknięty podzbiór przestrzeni $(V, \| \ \|_V)$ jest zwarty (równoważnie: każdy ograniczony ciąg w V ma podciąg, zbieżny w normie $\| \ \|_V$);

d) każda norma na przestrzeni V jest równoważna normie $\| \ \|_V$ i jest zupełna.

Dowód. Tezy te są oczywiste gdy $\dim V = 0$. Załóżmy ich prawdziwość gdy $\dim V = n-1$, i niech $\dim V = n$.

Ad a). Dla niezerowego funkcjonału $\varphi : V \to \mathbb{F}$, wymiar podprzestrzeni $\ker(\varphi)$ wynosi $n-1$. Z założenia indukcyjnego wynika zupełność, a więc i domkniętość w V zbioru $\ker(\varphi)$. Gdy obrać $v \in V \setminus \ker(\varphi)$, to zbiór $v + \ker(\varphi)$ pozostaje domknięty, wobec czego jego dopełnienie N jest otoczeniem zera, dla którego $\varphi(v) \notin \varphi(N)$. Stąd wynika ciągłość φ; patrz zadanie 2 w §1.4.

Ad b). Gdy przekształcenie $L : V \to W$ jest liniowe i przez $w_1, ..., w_k$ oznaczymy bazę jego obrazu, to dla pewnych funkcjonałów liniowych $\varphi_1, ..., \varphi_k$ zachodzi tożsamość $L(x) = \sum_{i=1}^k \varphi_i(x) w_i$ $(x \in V)$, co wobec a) daje b).

Ad c). Jak wiemy z GALu, istnieje izomorfizm liniowy $L : V \to \mathbb{F}^n$. Wyposażmy $\mathbb{F}^n$ w normę $\|(t_i)_{i=1}^n\|_{\sup} = \sup_i |t_i|$. Z b) wynika, że oba operatory L i L^{-1} są ciągłe, więc przeprowadzają zbiory zwarte na zwarte, zaś ograniczone na ograniczone. A że teza c) jest prawdziwa dla przestrzeni $(\mathbb{F}^n, \| \ \|_{\sup})$, to jest prawdziwa i dla $(V, \| \ \|_V)$.

Ad d). Równoważność normy $\| \ \|_V$ z dowolną inną $\| \ \|$ wynika stąd, że przekształcenie identycznościowe z $(V, \| \ \|_V)$ w $(V, \| \ \|)$ jest na podstawie a) homeomorfizmem. Ponadto, ciąg spełniający warunek Cauchy'ego w normie $\| \ \|$ jest w niej ograniczony, więc na podstawie c) ma podciąg zbieżny. Tym samym, ciąg ten jest zbieżny. $\square$

Uwaga 1. Każda z własności od a) do d) przysługuje tylko przestrzeniom skończonego wymiaru. Patrz niżej twierdzenie 2 i zadanie uzupełniające 1.

Twierdzenie 2 (F. Riesza)**.** *Domknięta kula jednostkowa nieskończenie wymiarowej przestrzeni unormowanej jest niezwarta.*

Dowód. Obierzmy w rozważanej przestrzeni V wektor jednostkowy v_1 dowolnie, a gdy znamy już $v_1, ..., v_{n-1}$, to przyjmijmy $V_0 := \mathrm{lin}(v_1, ..., v_{n-1})$ i w oparciu o zadanie 1b) w p.1 obierzmy $v_n \in V$ tak, by $\|v_n\| = 1$ i $\mathrm{dist}(v_n, V_0)) \geq 1/2$. (Założenia zadania są spełnione: podprzestrzeń V_0 jest domknięta i różna od V, bo $\dim V_0 \leq n < \infty$ i $\dim V = \infty$.) Skonstruowany indukcyjnie ciąg (v_n) wektorów jednostkowych nie zawiera podciągu zbieżnego, bo $\|v_k - v_l\| \geq 1/2$ dla $k \neq l$. $\square$

Zadanie 1. a) Niech operator liniowy $L : V \to W$ pomiędzy przestrzeniami unormowanymi ma domknięte jądro. Dowieść, że jeśli $\dim W < \infty$, to operator ten jest ciągły. (Wskazówka: przedstawić L jako złożenie $V \to V/\ker(L) \to W$.)

b) Wywnioskować, że gdy $V = X_1 \oplus X_2$, gdzie $X_1 = \overline{X_1}$ i $\dim X_2 < \infty$, to ciągłe są rzuty liniowe z V na X_i wzdłuż X_{3-i}, dla $i = 1, 2$.

Zadanie 2. Niech V_0 będzie domkniętą podprzestrzenią liniową przestrzeni unormowanej V, a przestrzeń unormowana W niech będzie skończonego wymiaru. Dowieść, że każdy operator $L_0 \in \mathcal{L}(V_0, W)$ można przedłużyć do operatora $L \in \mathcal{L}(V, W)$. (Nie żądamy, jak w twierdzeniu Hahna–Banacha, by $\|L\| = \|L_0\|$.) Wywnioskować, że jeśli $W \leq V$ jest podprzestrzenią skończenie–wymiarową, to istnieje ciągły rzut liniowy $P : V \to W$ oraz taka <u>domknięta</u> podprzestrzeni $X \leq V$, że $V = W \oplus X$.

Zadanie 3. Niech U i W będą podprzestrzeniami przestrzeni unormowanej V. Dowieść, że jeśli $\dim(W) < \infty$ i podprzestrzeń U jest domknięta, to $U + W$ też jest domknięta. (Wskazówka: $U + W = P^{-1}(P(W))$, gdzie $P : V \to V/U$ to rzutowanie.)

Twierdzenie 1 i zadanie 2 warto zestawić z zadaniem uz. 1 w §1.5 i poniższymi:

<u>Zadanie uzupełniające 1.</u> Dla przestrzeni unormowanej $(V, \| \ \|)$ nieskończonego wymiaru dowieść, że:

a) Istnieje nieciągły funkcjonał liniowy $\varphi : V \to \mathbb{F}$. (Wskazówka: zdefiniować φ na wektorach bazy algebraicznej.)

b) Jądro $\ker \varphi$ tego funkcjonału nie jest domknięte, a norma $||| \ ||| := \| \ \| + |\varphi|$ nie jest zupełna.

c) Istnieje nieciągły operator liniowy $L : V \to V \times \mathbb{F}$, którego jądrem jest $\{0_V\}$.

<u>Zadanie uzupełniające 2.</u> Podprzestrzeń V_0 przestrzeni $(\mathbb{R}^3, \| \ \|_\infty)$ zadana jest równaniem $x - y - z = 0$. Dowieść, że identyczności na V_0 nie można przełużyć do operatora liniowego z $\mathbb{R}^3$ w V_0, mającego normę 1.

3 Dwa przykłady

Omówimy dwa wykorzystywane dalej przykłady, w których istotne jest wyznaczenie normy operatora.

<u>Przykład 1.</u> Rozpatrujemy przestrzeń $L_2(\mu)$, jak opisano w §2.2. Ustalmy funkcję μ–mierzalną u i dla $f \in L_2(\mu)$ niech $M_u f := u \cdot f$. Jeśli $\|u\|_\infty < \infty$, to $\|M_u f\|_2 \leq \|u\|_\infty \|f\|_2$, więc określony jest operator $L_2(\mu) \ni f \mapsto M_u f \in L_2(\mu)$ i $\|M_u\| \leq \|u\|_\infty$.

Dowiedziemy, że jeśli ponadto każdy zbiór μ–miary ∞ zawiera zbiór skończonej miary dodatniej, to $\|M_u\| = \|u\|_\infty$. W tym celu niech $\|u\|_\infty > c$ i przyjmijmy $A := \{t \in T : |u(t)| > c\}$. Z definicji normy $\| \ \|_\infty$ wynika, że $\mu(A) > 0$, a z poczynionego założenia –że $0 < \mu(B) < \infty$ dla pewnego zbioru mierzalnego $B \subset A$. Dla $f := 1_B$ zachodzi więc $|M_u f| \geq c|f|$, skąd $\|M_u f\|_2 \geq c\|f\|_2$; zarazem też $\|f\|_2 = \sqrt{\mu(B)} \in (0, \infty)$. Wobec dowolności $c < \|u\|_\infty$ dowodzi to, że $\|M_u\| \geq \|u\|_\infty$. $\square$

W drugim przykładzie podamy konstrukcję całki jako przedłużenia funkcjonału ograniczonego.

Definicja. a) Niepustą rodzinę Σ podzbiorów danego zbioru T nazywamy **pierścieniem**, jeśli $P \cup Q \in \Sigma$ i $P \setminus Q \in \Sigma$ dla wszystkich $P, Q \in \Sigma$. [5] W b) i c) zakładamy, że Σ jest takim pierścieniem; nadal $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$

b) $\mathbb{F}$–**miarą** na Σ nazywamy[6] każdą funkcję $\mu : \Sigma \to \mathbb{F}$ taką, że $\mu(P \cup Q) = \mu(P) + \mu(Q)$ dla rozłącznych $P, Q \in \Sigma$. (Stąd też $\emptyset \in \Sigma$ i $\mu(\emptyset) = 0$. Przeliczalna addytywność nie jest zakładana!) **Wariacją całkowitą** tej $\mathbb{F}$–miary nazywamy liczbę

$$\|\mu\| = \sup_{\mathcal{P}} \sum_{P \in \mathcal{P}} |\mu(P)|$$

gdzie supremum bierzemy po wszystkich skończonych, rozłącznych rodzinach $\mathcal{P} \subset \Sigma$.

c) Funkcję $f : T \to \mathbb{F}$ nazywamy Σ–**prostą**, gdy przyjmuje tylko skończenie wiele wartości i $f^{-1}(\lambda) \in \Sigma$ dla każdego niezerowego skalara λ.

Przez $1_P : T \to \{0, 1\}$ oznaczmy „indykator” zbioru $P \subset T$, określony tak, by $1_P(x) = 1 \Leftrightarrow x \in P$.

Stwierdzenie 1. *Niech Σ będzie pierścieniem podzbiorów zbioru T.*

a) Zbiór E wszystkich funkcji Σ–prostych jest powłoką liniową w $\ell_\infty(T)$ zbioru $\{1_P : P \in \Sigma\}$.

b) Gdy μ jest $\mathbb{F}$–miarą na Σ, to istnieje jedyny taki funkcjonał liniowy $\varphi_\mu : E \to \mathbb{F}$, że $\varphi_\mu(1_P) = \mu(P)$ dla wszystkich $P \in \Sigma$. Przy tym, $\|\varphi_\mu\| = \|\mu\|$.

c) Jeśli $\|\mu\| < \infty$, to w b) można zastąpić zbiór E przez jego domknięcie $\overline{E}$ w $\ell_\infty(T)$.

Dowód. Dowód a) pozostawiony jest jako zadanie. Przyjmijmy dla $f \in E$:

$$\varphi(f) := \sum_{\lambda \neq 0} \lambda \cdot \mu\big(f^{-1}(\{\lambda\})\big) \text{ (tylko skończenie wiele sumowanych liczb jest niezerowych)}$$

Nietrudno sprawdzić, że funkcjonał φ jest liniowy (jest to ciąg dalszy zadania) i

$$|\varphi(f)| \leq \sum_{\lambda \neq 0} |\lambda| \cdot \left|\mu\left(f^{-1}\left(\{\lambda\}\right)\right)\right| \leq \Big(\sup_{\lambda \in \mathrm{im}(f)} |\lambda|\Big) \sum_{\lambda \neq 0} \left|\mu\left(f^{-1}\left(\{\lambda\}\right)\right)\right| \leq \|f\|_{\sup} \cdot \|\mu\|.$$

Stąd $\|\varphi\| \leq \|\mu\|$. Zarazem $\|\varphi\| \geq \|\mu\|$, bo dla każdej skończonej rozłącznej rodziny $\mathcal{P} \subset \Sigma$ funkcja $f = \sum_{P \in \mathcal{P}} \mathrm{Sgn}(\mu(P)) 1_P$ spełnia warunek $\|f\|_{\sup} = 1$ i $\varphi(f) = \sum_{P \in \mathcal{P}} |\mu(P)|$ – skąd $\sup\{|\varphi(f)| : \|f\|_{\sup} \leq 1\} \geq \|\mu\|$. Możemy więc w b) przyjąć $\varphi_\mu := \varphi$. (Jedyność wynika z liniowości i tego, że $E = \mathrm{lin}\{1_P\}_{P \in \Sigma}$.) Część c) zaś wynika z poniższego ogólnego wyniku, mającego niezależne znaczenie:

[5] Wtedy też $\emptyset \in \Sigma$ i $P \cap Q \in \Sigma$ dla $P, Q \in \Sigma$ (dlaczego?). Nie żądamy jednak, by $T \in \Sigma$.

[6] Nie jest to nazwa przyjęta. Dawniej używano lepszej, lecz dłuższej: „addytywna funkcja zbioru”; teraz pisuje się nierzadko „skończona, znakowana/zespolona miara addytywna”. Odnotujmy, że i nieujemna, σ–addytywna $\mathbb{R}$–miara różni się od „zwykłej” miary z AM II tym, że nie przyjmuje wartości ∞.

Stwierdzenie 2. *Liniowy operator ograniczony L_0, określony na podprzestrzeni liniowej przestrzeni unormowanej i przyjmujący wartości w przestrzeni Banacha, można jednoznacznie przedłużyć do takiegoż operatora L, określonego na domknięciu tej podprzestrzeni. Ponadto, $\|L\| = \|L_0\|$.*

Jest to szczególny przypadek rezultatu, znanego z wykładu topologii 1: przekształcenie lipschitzowskie (ogólniej: jednostajnie ciągłe), określone na podzbiorze przestrzeni metrycznej i przyjmujące wartości w przestrzeni metrycznej zupełnej, przedłuża się w sposób ciągły na domknięcie tego zbioru. W sytuacji opisanej wyżej, przedłużenie jest liniowe i zachodzi $\|L\| = \|L_0\|$ (dlaczego?).

Uwaga 1. a) Funkcjonał φ_μ i jego obcięcia do dogodnych podprzestrzeni przestrzeni $\overline{E}$ nazywamy **całkowaniem** względem $\mathbb{F}$–miary μ; zamiast $\varphi_\mu(f)$ piszemy też $\int_T f \mathrm{d}\mu$ lub $\int f \mathrm{d}\mu$ lub $\int f$ (gdy zbiór T czy $\mathbb{F}$–miara μ są wiadome).

b) Jest widoczne, że $\varphi_{\mu+\lambda\nu} = \varphi_\mu + \lambda\varphi_\nu$ dla $\lambda \in \mathbb{F}$ i $\mathbb{F}$–miar μ, ν na Σ.

c) Jak w teorii całki Lebesgue'a można jeszcze określić całkę względem μ pewnych funkcji nieograniczonych (czego tu nie robimy), a nawet przyjmujących wartości w przestrzeni Banacha. Bez σ–addytywności miary, dotąd <u>nie</u> zakładanej, nie uzyskamy jednak twierdzeń Lebesgue'a z 2.3. Pominęliśmy też wyżej ważne zagadnienie powiększenia pierścienia Σ, na którym miara μ jest określona.

Zadanie 1. Gdy <u>ograniczona</u> funkcja $f : T \to \mathbb{R}$ spełnia warunek $f^{-1}((-\infty, c)) \in \Sigma$ dla każdego $c \in \mathbb{R}$, to $f \in \overline{E}$, więc całka $\int_T f \mathrm{d}\mu$ istnieje i $| \int_T f \mathrm{d}\mu| \leq \|f\|_{\sup} \cdot \|\mu\|$.

§ 4. Funkcjonały na przestrzeniach $L_p(\mu)$ i $C(X)$; związki z teorią miary

1 Funkcjonały na przestrzeniach $L_p(\mu)$

<u>Oznaczenie.</u> Oznaczamy przez $\mathrm{ba}^{\mathbb{F}}(2^\Gamma)$ zbiór tych $\mathbb{F}$–miar μ, które określone są na pierścieniu 2^Γ <u>wszystkich</u> podzbiorów danego zbioru Γ i mają skończoną wariację całkowitą $\|\mu\|$. (Patrz §3.3; „ba" od „bounded additive", za Dunfordem i Schwartzem.)

Twierdzenie 1. *a) Każda $\mathbb{F}$–miara $\mu \in \mathrm{ba}^{\mathbb{F}}(2^\Gamma)$ wyznacza „funkcjonał całkowania" $\varphi_\mu \in \left(\ell^{\mathbb{F}}_\infty(\Gamma)\right)^*$, określony w §3.3; przy tym $\|\varphi_\mu\| = \|\mu\|$.*

b) Każdy funkcjonał $\varphi \in \left(\ell^{\mathbb{F}}_\infty(\Gamma)\right)^*$ jest postaci φ_μ, dla pewnej $\mathbb{F}$–miary $\mu \in \mathrm{ba}^{\mathbb{F}}(\Gamma)$. Miara ta jest jedyna i jest wyznaczona wzorem $\mu(P) = \varphi(1_P)$ dla $P \subset \Gamma$.

<u>Dowód.</u> Część a) wynika ze stwierdzenia 1 w §3.3, bo zbiór $E = \mathrm{lin}\{1_P : P \subset \Gamma\}$ jest gesty w $\ell_\infty(\Gamma)$ (dlaczego?). By uzyskać b) zauważamy wpierw, że podany wzór definiuje $\mathbb{F}$–miarę, tzn. $\mu(P \cup Q) = \mu(P) + \mu(Q)$ gdy $P \cap Q = \emptyset$. Ponadto, $\|\mu\| \leq \|\varphi\|$, bo gdy $P_1, ..., P_n \subset \Gamma$ są parami rozłączne, to dla $f := \sum_i \mathrm{Sgn}(P_i) \cdot 1_{P_i}$ zachodzi $\sum_i |\mu(P_i)| = \varphi(f) \leq \|\varphi\|$ (wobec tego, że $\|f\|_\infty = 1$). Na podstawie a), μ wyznacza

więc ciągły funkcjonał φ_μ. Wreszcie, funkcjonały φ i φ_μ, oba ciągłe i liniowe, są równe na zbiorze $\{1_P : P \subset \Gamma\}$, liniowo gęstym w $\ell_\infty(\Gamma)$. Stąd wynika, że $\varphi = \varphi_\mu$. ⊟

Wniosek 1. *Jeśli za normę adytywnej $\mathbb{F}$–miary obrać jej wariację całkowitą, to* $(\mathrm{ba}^{\mathbb{F}}(2^\Gamma), \|\ \|)$ *jest przestrzenią Banacha, liniowo izometryczną z* $(\ell_\infty^{\mathbb{F}}(\Gamma))^*$. □

Zadanie 1. * a) Zbiór $\mathrm{ba}(\Sigma)$ ograniczonych $\mathbb{F}$–miar na pierścieniu zbiorów $\Sigma \subset 2^\Gamma$ jest, z normą ?, przestrzenią Banacha, sprzężoną do przestrzeni ??. (Uzupełnić i uzasadnić.)

b) Zbiór σ–addytywnych (i ograniczonych) $\mathbb{F}$–miar jest domknięty w $(\mathrm{ba}(\Sigma), \|\ \|)$.

Twierdzenie 1 jest "baby version" ważnego twierdzenia o postaci funkcjonałów na przestrzeni $C(X)$, dla zwartej przestrzeni X; patrz dalej punkty 3 i 5. Pokrewne im jest:

Twierdzenie 2 (o reprezentacji funkcjonałów na przestrzeniach $L_p(\mu)$)**.** *Niech $\mu \geq 0$ będzie σ–addytywną miarą na σ–ciele podzbiorów zbioru T, zaś $p, q \in [1, \infty]$ będą wykładnikami sprzężonymi (tzn. $1/p + 1/q = 1$, gdzie $1/\infty = 0$). Wówczas:*

a) Każda funkcja $g \in L_q(\mu)$ wyznacza wzorem

$$\varphi_g(f) = \int_T fg\mathrm{d}\mu \quad \text{dla } f \in L_p(\mu) \tag{6}$$

funkcjonał liniowy $\varphi_g : L_p(\mu) \to \mathbb{F}$, taki, że $\|\varphi_g\| \leq \|g\|_q$.

b) Jeśli $p \neq 1$, to wyżej $\|\varphi_g\| = \|g\|_q$, tzn. **przekształcenie kanoniczne** $L_q(\mu) \ni [g] \mapsto \varphi_g \in (L_p(\mu))^*$ *jest izometrycznym zanurzeniem liniowym $L_q(\mu)$ w $(L_p(\mu))^*$.*

c) Jeśli $p \neq 1$ i $p \neq \infty$, to przekształcenie to jest izometrią $L_q(\mu)$ na $(L_p(\mu))^*$.

Uwaga 1. i) Teza c) jest słuszna i dla $p = 1$, jeśli μ jest miarą liczącą lub σ-skończoną (tzn. T jest przeliczalną sumą zbiorów skończonej miary μ). Patrz zadania 3a) i 4).

ii) Ogólnie jednak, już teza b) może być nieprawdziwa dla $p = 1$. Np. dla miary nieskończonej na zbiorze jednopunktowym, przekształcenie kanoniczne $L_\infty(\mu) \to L_1(\mu)^*$ nie jest różnowartościowe, bo $L_1(\mu) = \{0\} = L_1(\mu)^*$ i $L_\infty(\mu) \cong \mathbb{F}$.

iii) Podobnie, założenie $p \neq \infty$ gra rolę w c) –nawet, gdy $T = \mathbb{N}$ i μ jest miarą liczącą. Istotnie, przestrzeń ℓ_1 nie jest izometryczna z ℓ_∞^*, bo jest ośrodkowa, a ℓ_∞^* – nie (wiedza z ćwiczeń).

iv) W ważnym przypadku $p = 2$, teza c) wyniknie też łatwo z twierdzenia 3 w §6.3.

Dowód twierdzenia 2. Nierówność $\|\varphi_g\| \leq \|g\|_q$ wynika z nierówności Höldera, a odwrotna (gdy $p > 1$) z twierdzenia 1b) w §2.3. Do dowodu c) wykorzystamy:

Zadanie 2. Niech $f, v \in L_p^{\mathbb{R}}(\mu)$ (nadal $p \in (1, \infty)$). Dowieść, że funkcja $t \mapsto \int |f - tv|^p$ ma w zerze pochodną, równą $\int hv$, gdzie $h := -p|f|^{p-1}\mathrm{Sgn} f \in L_q(\mu)$. (Wskazówka: dowieść, że dla $a, b \in \mathbb{R}$ funkcja $t \mapsto |a + tb|^p$ ma w zerze pochodną, równą $(p|a|^{p-1}\mathrm{Sgn}\ a)b$; skorzystać z twierdzenia o różniczkowaniu pod znakiem całki.)

Kontynuujmy dowód c). Niech $p \in (1, \infty)$ i $\varphi \in L_p(\mu)^* \setminus \{0\}$; wobec b) pozostaje dowieść, że $\varphi = \varphi_g$ dla pewnego $g \in L_q(\mu)$. W tym celu przyjmijmy wpierw, że $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. Obierzmy $f \in L_p(\mu) \setminus \ker(\varphi)$ dowolnie. Jak wiemy z §2.4, istnieje w $\ker(\varphi)$ wektor f_0, najbliższy wektorowi f. Zastępując f przez $f - f_0$ uzyskujemy to, że $f_0 = 0$. Gdy $v \in \ker(\varphi)$, to 0 pozostaje wektorem najbliższym wektorowi f w zbiorze $\mathbb{R}v$, wobec czego funkcja $\mathbb{R} \ni t \mapsto (\|f - tv\|_p)^p$ przyjmuje w zerze swe minimum. Ale (patrz zadanie 2) pochodna w zerze tej funkcji istnieje i jest równa $\int hv$, dla pewnej niezależnej od v funkcji $h \in L_q(\mu)$. Tym samym $\int hv = 0$ dla $v \in \ker(\varphi)$ – co oznacza, że funkcjonał φ_h zeruje się na $\ker(\varphi)$. Stąd i GALowego zadania z ćwiczeń, $\varphi_h = c\varphi$ dla pewnego skalara c. A że $\|\varphi_h\| = \|h\|_q$ i $\|h\|_q \neq 0$ (rachunek), to $c \neq 0$ i $\varphi = \frac{1}{c}\varphi_h = \varphi_g$, gdzie $g := \frac{1}{c}h \in L_q(\mu)$. To kończy dowód, jeśli $\mathbb{F} = \mathbb{R}$.

Jeśli $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, to na podstawie powyższego istnieją funkcje $g_1, g_2 \in L_q^{\mathbb{R}}(\mu)$ takie, że $(\mathrm{Re}\varphi)(v) = \int g_1 v$ i $(\mathrm{Im}\varphi)(v) = \int g_2 v$ dla $v \in L_p^{\mathbb{R}}(\mu)$. Przy $g := g_1 + \mathbf{i}g_2 \in L_q^{\mathbb{C}}(\mu)$ zachodzi $\varphi(v) = \varphi_g(v)$ dla $v \in L_p^{\mathbb{R}}(\mu)$, a więc i dla $v \in \mathrm{lin}_{\mathbb{C}}(L_p^{\mathbb{R}}(\mu)) = L_p^{\mathbb{C}}(\mu)$. $\square$

Zadanie 3. a) W przypadku, gdy μ jest miarą liczącą na zbiorze T, dać samodzielny dowód tego, że kanoniczne przekształcenie z tw. 1 jest dla $p \in [1, \infty)$ izometrią $L_q(\mu)$ na $L_p(\mu)^*$. (Wskazówka: gdy $\varphi \in \ell_p(T)^*$ przyjąć $g_\varphi(t) := \varphi(1_{\{t\}})$ dla $t \in T$. Rozważając skończone zbiory $S \subset T$ i obcięcia $\varphi_{|\{f \in \ell_p(T): f_{|T\setminus S}=0\}}$ dowieść, że $\|g_\varphi\|_q \leq \|\varphi\|$.)

b) Dowieść podobnie, że każdy wektor $g \in \ell_1$ wyznacza formułą $\varphi_g(x) = \sum_\gamma g(\gamma)x(\gamma)$ funkcjonał $\varphi_g \in c_0$, a $g \mapsto \varphi_g$ jest izometrią z ℓ_1 na c_0^*.

Zadanie 4. Przy oznaczeniach tw. 2 i skończonej mierze μ (wyjąwszy iv)), niech $p \in [1, 2)$ i $\varphi \in L_p(\mu)^*$. Uzupełnić szczegóły poniższego rozumowania H. Steinhausa:

i) Identycznościowe włożenie $J : L_2(\mu) \hookrightarrow L_p(\mu)$ jest poprawnie określone i ciągłe, skąd funkcjonał $\varphi \circ J$ jest ciągły na $L_2(\mu)$.

ii) Istnieje taka funkcja $g \in L_2(\mu)$, że $\varphi(f) = \int fg \, \mathrm{d}\mu$ dla wszystkich $f \in L_2(\mu)$.

iii) Zachodzi $\|g\|_q < \infty$ i $\varphi_g = \varphi$. (Wykorzystać zad.1 w §2.3 i gęstość $L_2(\mu)$ w $L_p(\mu)$.)

iv) Gdy miara μ jest tylko σ–skończona, to przedstawić T jako sumę zbiorów mierzalnych skończonej miary, $T_1 \subset T_2 \subset ...$ Dla każdego n uzyskać z iii) istnienie jedynej klasy $g_n \in L_q(\mu_{|T_n})$, takiej że $\|g_n\|_q \leq \|\varphi\|$ i $\varphi(f \cdot 1_{T_n}) = \int_{T_n} fg_n \, \mathrm{d}\mu$ dla wszystkich $f \in L_p(\mu)$. Wywnioskować, że ciąg (g_k) wyznacza klasę $g \in L_q(\mu)$, dla której $\varphi_g = \varphi$.

2 Zastosowanie przypadku $p = 2$: dowód von Neumanna twierdzenia Radona-Nikodyma

Twierdzenie 1 (Radona–Nikodyma). *Niech μ i ν będą skończonymi, σ–addytywnymi miarami nieujemnymi, określonymi na wspólnym σ–ciele podzbiorów zbioru T. Jeśli*

$$\mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0 \quad \textit{dla mierzalnych } A \subset T, \tag{7}$$

to istnieje taka funkcja mierzalna $h : T \to \mathbb{R}$, że

$$\int_T f \mathrm{d}\nu = \int_T fh \ \mathrm{d}\mu \quad \text{dla} \quad f \in L_\infty(\mu). \tag{8}$$

Uwaga 1. a) Gdy zachodzi (7), to piszemy $\nu \ll \mu$ i mówimy, że miara ν jest **absolutnie ciągła** względem μ. Zależność (8) zapisywana jest symbolicznie $\mathrm{d}\nu = h\mathrm{d}\mu$, a funkcję h nazywamy **gęstością** miary ν względem miary μ. Nietrudno zauważyć, że tożsamość (8) jest równoważna temu, by

$$\nu(A) = \int_A h \ \mathrm{d}\mu \quad \text{dla każdego zbioru mierzalnego } A. \tag{9}$$

b) Z (9) wynika, że $h \geq 0$ μ–p.w. i $h \in L_1(\mu)$ (bo $\int_T h \ \mathrm{d}\mu = \nu(T) < \infty$).

Dowód twierdzenia (metodą von Neumanna; por. [Rudin ARiZ, str. 134]). Ponieważ w (8) wystarcza rozpatrzeć rzeczywiste funkcje f, więc przyjmujemy $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. Niech $\lambda := \mu + \nu$ oraz $\varphi(f) := \int_T f \mathrm{d}\mu$ dla $f \in L_2(\lambda)$. Dla tych f, z nierówności CBS:

$$|\varphi(f)| \leq \|f\|_{L_2(\mu)} \sqrt{\mu(T)} \leq \|f\|_{L_2(\lambda)} \sqrt{\mu(T)}$$

skąd $\varphi \in L_2(\lambda)^*$. Wobec tw.2 w p.1 istnieje więc funkcja $g \in L_2(\lambda)$ taka, że $\int_T f \mathrm{d}\mu = \int_T fg \mathrm{d}\lambda$ dla $f \in L_2(\lambda)$. Uzyskujemy:

$$\int_T fg \mathrm{d}\nu = \int_T f(1-g) \mathrm{d}\mu \quad \text{dla} \quad f \in L_2(\lambda) \tag{10}$$

Niech $S_0 := \{t : g(t) \leq 0\}$ i $S_1 = \{t : g(t) > 1\}$). Dla $f = 1_{S_0}$ zauważamy, że lewa strona w (10) jest ≤ 0, a prawa $\geq \mu(S_0)$, skąd $\mu(S_0) = 0$. Podobnie, $\mu(S_1) = 0$, bo przy $f = 1_{S_1}$ lewa strona jest ≥ 0, a prawa mniejsza od $-\mu(S_1)$. Przyjmijmy

$$S := S_0 \cup S_1 \quad \text{i} \quad T_n := \{t : 1 \geq g(t) > 1/n\} \ (n \in \mathbb{N}).$$

Niech też $h(t) := (1 - g(t))/g(t)$ dla $t \in T \setminus S$. Wobec (10), dla $f \in L_2(\lambda)$ i $n \in \mathbb{N}$ zachodzi $\int_T \frac{f}{g} 1_{T_n} g \mathrm{d}\nu = \int_T \frac{f}{g} 1_{T_n}(1-g) \mathrm{d}\mu$, bo $\frac{f}{g} \cdot 1_{T_n} \in L_2(\lambda)$. A że $1_{T_n}(t) \nearrow 1_{T \setminus S}$, to

$$\int_{T \setminus S} f \mathrm{d}\nu = \int_{T \setminus S} fh \mathrm{d}\mu \quad \text{dla } \underline{\text{nieujemnych}} \ f \in L_2(\lambda). \tag{11}$$

(Wykorzystano twierdzenia Lebesgue'a i Beppo Leviego.) Jak już wiemy, $\mu(S) = 0$, skąd $\nu(S) = 0$ (bo $\nu \ll \mu$). Pozwala to w (11) zastąpić $T \setminus S$ przez T i otrzymać (8) dla $f \geq 0$ – bo wobec $\nu \ll \mu$ i skończoności miar, $L_\infty(\mu) \subset L_\infty(\lambda) \subset L_2(\lambda)$). Pozostaje więc w (8) przedstawić f jako różnicę funkcji nieujemnych. □

Uwaga 2. Pomińmy założenie, że $\nu \ll \mu$. Wówczas nadal $\mu(S) = 0$ i zachodzi (11). Wobec tego miary ν_a i ν_s , zdefiniowane dla zbiorów mierzalnych A wzorami

$$\nu_s(A) := \nu(A \cap S), \qquad \nu_a(A) := \nu(A \setminus S) = \int_{A \setminus S} h \mathrm{d}\mu \tag{12}$$

są takie, że $\nu = \nu_a + \nu_s$, $\nu_s(T \setminus S) = 0$ i $\nu_a \ll \mu$. (Ostatnią równość w (12) uzyskujemy biorąc $f = 1_A$ w (11); to na jej podstawie $\nu_a \ll \mu$.) Z rozumowania von Neumanna wynika więc też **twierdzenie Lebesgue'a o rozkładzie**: gdy skończone, σ–addytywne miary μ i ν są określone na tym samym σ–ciele zbiorów, to ν jest sumą dwóch miar ν_a i ν_s, z których ν_a jest względem μ absolutnie ciągła, a ν_s **singularna**, tzn. taka, że $\nu_s(T \setminus S) = 0$ dla pewnego zbioru $S \subset T$ o zerowej mierze μ.

Uwaga 3. Tak samo jest, gdy ν ma wartości w $\mathbb{F}$, bo jest ona wtedy kombinacją liniową „prawdziwych" miar, skończonych i absolutnie ciągłych względem μ; patrz dalej w p.4 uwaga 1 i twierdzenie 1.

To zaś prowadzi do dalszego klasycznego wyniku z teorii miary.

Uwaga 4. * Niech nadal ν będzie σ–addytywną $\mathbb{R}$–miarą na σ–ciele Σ podzbiorów zbioru T. Wówczas miara $\mu := |\nu|$ jest przeliczalnie addytywna, skończona i taka, że $\nu \ll \mu$. (Patrz dalej w p.4 twierdzenie 1 i (13).) Istnieje więc taka funkcja $h \in L_1(\mu)$, że $\nu(A) = \int_A h d\mu$ dla $A \in \Sigma$. Latwo dowieść (por. zdanie 3 w p.4), że $\int_A |h| d\mu = |\nu|(A) = \mu(A)$ dla wszystkich $A \in \Sigma$, wobec czego $|h| = 1$ p.w. Możemy założyć, że $|h| = 1$ (gdy nie, zmieniamy h na zbiorze miary 0). Przyjmując $T_+ := h^{-1}(1)$ i $T_- := h^{-1}(-1)$ otrzymujemy więc **rozkład Hahna**: $T = T_+ \cup T_-$, gdzie zbiory $T_+, T_- \in \Sigma$ są rozłączne i dla $A \in \Sigma$ zachodzi:

$$\nu(A) \geq 0 \text{ gdy } A \subset T_+ \;\text{ i }\; \nu(A) \leq 0 \text{ gdy } A \subset T_- .$$

3 Funkcjonały na przestrzeni $C(X)$, dla zwartej przestrzeni X

Definicja. a) Gdy Σ jest pierścieniem zbiorów, to $\mathbb{F}$–miarę $\mu : \Sigma \to \mathbb{F}$ nazywamy **przeliczalnie addytywną** (krócej: **σ–addytywną**), gdy dla każdego ciągu $\{M_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \Sigma$, jeśli $M_n \nearrow M \in \Sigma$, to $\lim_n \mu(M_n) = \mu(M)$. (Warunek ten można zastąpić przez: jeśli $M_k \cap M_l = \emptyset$ dla $k \neq l$ i $\bigcup_n M_n \in \Sigma$, to $\mu(\bigcup_n M_n) = \sum_n \mu(M_n)$ – dlaczego?)

b) Dla przestrzeni topologicznej X, przez $\mathcal{B} = \mathcal{B}_X$ oznaczamy najmniejsze σ-ciało zbiorów, zawierające wszystkie zbiory domknięte w X. Jest to tzw. **σ–ciało zbiorów borelowskich** (w X).

c) Zbiór $E \subset X$ nazywamy **regularnym** względem $\mathbb{F}$–miary $\mu : \mathcal{B}_X \to \mathbb{F}$, jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$ zachodzi $|\mu|(G \setminus F) < \varepsilon$ dla pewnego zbioru zwartego $F \subset E$ i pewnego zbioru otwartego $G \supset E$. Tu, $|\mu|(G \setminus F)$ oznacza **wariację miary μ na zbiorze** $G \setminus F$, patrz dalej w p.4. $\mathbb{F}$–miarę μ nazwiemy **regularną**, gdy każdy zbiór borelowski jest regularny względem niej. (Spotkać też można inne wersje pojęcia regularności, por. dalej uwaga 2 w p.4.)

Twierdzenie 1. [7] *Niech X będzie zwartą przestrzenią topologiczną. Wówczas:*

[7] F. Riesz udowodnił je dla odcinka w 1911r., J. Radon w 1912r. dla $X \subset \mathbb{R}^n$, a S. Banach w 1937r. dla (zwartych) przestrzeni metrycznych. Natomiast S. Kakutani w 1941r. i A. Markov w 1938r. nie wykorzystywali metryzowalności.

a) Każda regularna $\mathbb{F}$*–miara* $\mu : \mathcal{B}_X \to \mathbb{F}$ *o skończonej wariacji całkowitej* $\|\mu\|$*, wyznacza „funkcjonał całkowania”* $\varphi_\mu \in (C(X))^*$*, o normie równej tej wariacji.*

b) Każdy funkcjonał $\varphi \in \left(C^{\mathbb{F}}(X)\right)^*$ *jest postaci* φ_μ*, dla pewnej* σ*–addytywnej, regularnej miary* $\mu : \mathcal{B}_X \to \mathbb{F}$ *o skończonej wariacji całkowitej.* [8]

Uwaga 1. Jeśli $\varphi_\mu = \varphi_\nu$, gdzie μ i ν są jak w a), to $\mu = \nu$ (bo $\varphi_{\mu-\nu} = 0$, skąd $\|\mu - \nu\| = 0$). Z twierdzenia wynika więc, że można w b) zastąpić „pewnej” przez „jedynej”, a też, że każda regularna $\mathbb{F}$–miara $\nu : \mathcal{B}_X \to \mathbb{F}$, z $\|\nu\| < \infty$, jest σ–addytywna –bo jest równa mierze μ danej przez b) dla funkcjonału φ_ν. □

Dowód twierdzenia (częściowy). Ad a). Gdy μ jest $\mathbb{F}$–miarą na $\mathcal{B}_X$ i $\|\mu\| < \infty$, to na podstawie wyników z §3.3 (stwierdzenia 1 i zadania 1) określony jest liniowy funkcjonał całkowania względem μ, oznaczany tam $\varphi_\mu : C^{\mathbb{F}}(X) \to \mathbb{F}$, przy czym $\|\varphi_\mu\| \le \|\mu\|$.

Gdy nadto miara μ jest regularna, to dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ i rozłącznej rodziny $\{M_1, ..., M_n\} \subset \mathcal{B}_X$ istnieją takie zbiory zwarte $K_i \subset M_i$ i otwarte $U_i \supset K_i$, że $|\mu|(M_i \setminus K_i) < \varepsilon/n$, $|\mu|(U_i \setminus K_i) < \varepsilon/n$ oraz $U_i \cap U_j = \emptyset$ dla $i \ne j$. (Tu i niżej gra rolę normalność X.) Na podstawie tw. Tietzego–Urysohna istnieje też funkcja $f \in C^{\mathbb{F}}(X)$, o module ≤ 1, równa $\mathrm{Sgn}(\mu(K_i))$ na K_i $(i = 1, ..., n)$, zaś 0 poza $\bigcup_i U_i$. [9] Bez trudu sprawdzamy, że przy $K := \bigcup_i K_i$ zachodzi $\int_K f d\mu = \sum_i |\mu(K_i)|$, a także $|\int_{X\setminus K} f d\mu| < \varepsilon$, skąd $|\int_X f d\mu - \sum_i |\mu(M_i)|\,| < \varepsilon + \sum_i |\mu|(M_i \setminus K_i) < 2\varepsilon$. A że $\int_X f d\mu = \varphi_\mu(f)$ i $|f| \le 1$, to z dowolności $\varepsilon > 0$ i rodziny $(M_i)_{i=1}^n$ wynika, że $\|\varphi_\mu\| = \sup\{|\varphi_\mu(f)| : \|f\|_\infty, f \in C^{\mathbb{F}}(X)\} \ge \|\mu\|$.

Ad b). Przypuśćmy, że istnienie odpowiedniej miary zostało wykazane, gdy $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. Możemy więc znaleźć σ–addytywne $\mathbb{R}$–miary ν_1 i ν_2 takie, że $\mathrm{Re}\varphi(h) = \int h d\nu_1$ i $\mathrm{Im}\varphi(h) = \int h d\nu_2$ dla $h \in C^{\mathbb{R}}(X)$. Przy $\nu := \nu_1 + \mathbf{i}\nu_2$ zachodzi wówczas $\varphi(f) = \int f d\nu$ dla $f \in C^{\mathbb{C}}(X)$ –bo równość ta zachodzi dla $f \in C^{\mathbb{R}}(X)$. Obserwacja ta pozwala przyjąć, że $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, a wtedy φ jest różnicą dwóch funkcjonałów nieujemnych. (Patrz uwaga 2 w Dodatku 1 do tego paragrafu.) Tym samym pozostaje rozpatrzeć przypadek, gdy $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ i funkcjonał φ jest nieujemny, a ten relegujemy do Dodatku 2.

Zadanie 1. Rozumując jak w „Ad a)” powyżej dowieść, że gdy μ jest miarą Lebesgue’a na $\mathbb{R}^n$, to zbiór wszystkich funkcji ciągłych o zwartych nośnikach jest gęsty: i) w $(L_1(\mu), \| \ \|_1)$, ii) w $(L_1(\mu) \cap L_2(\mu), \| \ \|_1 + \| \ \|_2)$.

Zadanie 2. Dowieść podobnie, że gdy X jest przestrzenią zwartą, a $\mu : \mathcal{B}_X \to [0, \infty)$ σ–addytywną miarą regularną, to zbiór $C(X)$ jest gęsty w $L_2(\mu)$.

Zadanie 3. a) Udowodnić wprost, nie korzystając z twierdzenia 1, że każda funkcja $g \in L_1([a, b], \lambda)$, gdzie λ to miara Lebesgue’a, wyznacza wzorem $C([a, b]) \ni f \mapsto \int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t$ funkcjonał liniowy na $C([a, b])$, o normie $\|g\|_1$. (Wskazówka: jak wyżej.)

[8] $\|\mu\| < \infty$ jest też konsekwencją σ-addytywności μ; por. dalej twierdzenie 1 w p.4. (Nie gra to roli w dowodzie.)

[9] Bierzemy np. $f = \sum_{i=1}^n u_i \cdot \mathrm{Sgn}(\mu(K_i))$, gdzie „funkcja Urysohna” $u_i : X \to [0, 1]$ jest równa 1 na K_i i 0 poza U_i.

b) Udowodnić, że funkcjonału $f \mapsto f(a)$ nie można tak przedstawić.

4. Dla $x \in \ell_1(\mathbb{Z}_{\geq 0})$ i $y \in c$ przyjmijmy $\varphi_x(y) := \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i + x_0 \lim y$. Dowieść, że $x \mapsto \varphi_x$ jest poprawnie określoną izometrią z $\ell_1(\mathbb{Z}_{\geq 0})$ na c^*. (Por. zadanie 3b) w p.1.)

4 Dodatek 1 do §4.3: Wariacja ograniczonych $\mathbb{F}$–miar i ich rozkład Jordana.

Niżej, μ jest $\mathbb{F}$–miarą na pierścieniu Σ podzbiorów zboru T.

Dla $A \subset T$ zdefiniujmy **wariację** $|\,\mu\,|\,(A)$ **miary** μ **na** A jako wariację całkowitą miary μ obciętej do pierścienia $\Sigma_A := \{P \in \Sigma : P \subset A\}$. [10] Zachodzi więc

$$|\mu(A)| \leq |\,\mu\,|\,(A) \leq \|\mu\| \quad \text{dla } A \in \Sigma \tag{13}$$

Zadanie 1. $|\,\mu\,|\,(A) \leq c \cdot \sup_{P \in \Sigma_A} |\mu(P)|$, gdzie $c = 2$ gdy $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ i $c = 4$ gdy $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. W szczególności, gdy $\mathbb{F}$–miara μ jest ograniczona, jako funkcja w $\mathbb{F}$, to $\|\mu\| < \infty$.

Zadanie 2. Funkcja $|\,\mu\,|$, nazywana **wariacją $\mathbb{F}$–miary** μ, jest addytywna na Σ, zaś przeliczalnie addytywna na Σ gdy μ ma tę własność.

Uwaga 1. Niech $\|\mu\| < \infty$. Jeśli $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, to pisząc $\mu = |\,\mu\,| - (|\,\mu\,| - \mu)$ stwierdzamy, że μ jest różnicą dwóch $\mathbb{R}$–miar, które obie są nieujemne i ograniczone (i są σ–addytywne jeśli μ ma tę własność). A jeśli $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, to μ jest więc kombinacją liniową, o współczynnikach $\pm 1, \pm \mathbf{i}$, czterech takich $\mathbb{R}$–miar. Jest to **rozkład Jordana** ograniczonej $\mathbb{F}$–miary μ.

Uwaga 2. Wynika stąd, że gdy V jest podprzestrzenią liniową przestrzeni $(\ell_\infty^{\mathbb{R}}(X), \|\ \|_{\sup})$, to każdy funkcjonał $\varphi \in V^*$ jest różnicą dwóch liniowych, ciągłych funkcjonałów nieujemnych. Istotnie, możemy φ przedłużyć do $\widetilde{\varphi} \in (\ell_\infty^{\mathbb{R}}(X))^*$, zapisać $\widetilde{\varphi}$ jako φ_μ, gdzie $\mu \in \mathrm{ba}(\Gamma)$ (patrz p.1), a za szukane funkcjonały przyjąć φ_{μ_i} (czy raczej ich obcięcia do V), dla $\mu_1 = |\,\mu\,|$ i $\mu_2 = |\,\mu\,| - \mu$.

Zadanie 3. * Niech f będzie jednostajną granicą funkcji Σ–prostych. Dowieść, że gdy $A \in \Sigma$, to $f_{|A}$ jest jednostajną granicą funkcji Σ_A–prostych i $\int f \cdot 1_A d\mu = \int f_{|A} d\mu_A$, gdzie $\mu_A := \mu_{|\Sigma_A}$. Oznaczając tę wspólną wartość przez $\int_A f d\mu$ dowieść, że wzór $\nu(A) = \int_A f d\mu$ zadaje $\mathbb{F}$-miarę $\nu : \Sigma \to \mathbb{F}$ i $|\,\nu\,|\,(A) = \int_A |f| d\,|\,\mu\,|$ dla $A \in \Sigma$.

Dla σ-addytywnej miary na σ–ciele zbiorów, warunek $\|\mu\| < \infty$ jest spełniony:

Twierdzenie 1. * *Gdy $\mathbb{F}$–miara μ na σ–ciele zbiorów jest σ–addytywna, to $\|\mu\| < \infty$.*

Dowód. Wystarczy dowieść, że $\|\mathrm{Re}\ \mu\| < \infty$ i $\|\mathrm{Im}\ \mu\| < \infty$; można więc założyć, że $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. Przypuśćmy, że liczba $\|\mu\| = |\,\mu\,|\,(T)$ jest nieskończona. Skonstruujemy indukcyjnie wstępujący ciąg zbiorów $A_n \in \Sigma$ takich, że $|\mu(A_n)| \geq n$ i $|\,\mu\,|\,(T \setminus A_n) =$

[10] Oznaczenie $|\,\mu\,|\,(A)$ w tym znaczeniu jest powszechnie przyjęte, choć na ogół $|\,\mu\,|\,(A) \neq |\mu(A)|$, tzn. funkcja $|\,\mu\,|$ nie jest wartością bezwzględną funkcji μ.

∞ dla każdego n. W tym celu niech $A_0 = \emptyset$, a gdy znamy już zbiór A_{n-1}, to przyjmijmy $B = T \setminus A_{n-1}$. Korzystając z tego, że $|\mu|(B) = \infty$, obierzmy zbiór $B' \in \Sigma$, zawarty w B i taki, że $|\mu(B')| > |\mu(B)| + s$, gdzie liczbę s określimy poniżej. (Istnienie zbioru B', dla każdego s, wynika z zadania 1.) Przy $B'' = B \setminus B'$ zachodzi $|\mu(B'')| \geq |\mu(B')| - |\mu(B)| > s$ oraz $\mid \mu \mid (C) = \infty$ dla pewnego zbioru $C \in \{B', B''\}$. (Wynika to stąd, że $\mid \mu \mid (B') + \mid \mu \mid (B'') = \mid \mu \mid (B) = \infty$.) Przyjmiemy więc $A_n = T \setminus C$, zaś pozostały warunek $|\mu(A_n)| \geq n$ uzyskamy z nierówności $|\mu(A_n)| \geq |\mu(C)| - |\mu(T)|$ –o ile przyjmiemy $s = |\mu(T)| + n$.

Ciąg $(\mu(A_n))_{n=1}^{\infty}$ nie ma granicy w $\mathbb{R}$, wbrew temu, że z założenia powinien być zbieżny do $\mu(\bigcup_n A_n) \in \mathbb{R}$. Sprzeczność ta dowodzi, że $\|\mu\| < \infty$. $\square$

5 Dodatek 2 do §4.3: Istnienie miary, reprezentującej nieujemny funkcjonał na $C(X)$

Twierdzenie 1. *Niech X będzie zwartą przestrzenią topologiczną, a φ nieujemnym funkcjonałem liniowym na $C(X)$. Wówczas istnieje taka regularna, σ–addytywna miara $\mu \geq 0$ na $\mathcal{B}_X$, że $\varphi(f) = \int_X f d\mu$ dla $f \in C(X)$. (Tu, $C(X) := C^{\mathbb{R}}(X)$.)*

Poniżej, przez $\mathcal{K}$ oznaczamy rodzinę wszystkich zwartych, a przez $\mathcal{G}$ – wszystkich otwartych podzbiorów przestrzeni X. Dowód oparty jest na stwierdzeniu podobnym do omawianych przy konstrukcji miary Lebesgue'a:

Stwierdzenie 1. *Niech dana będzie funkcja $\mu_0 : \mathcal{K} \to [0, \infty)$ taka, że $\mu_0(K \cup L) \leq \mu_0(K) + \mu_0(L)$ dla $K, L \in \mathcal{K}$, przy czym $\mu_0(K \cup L) = \mu_0(K) + \mu_0(L)$ jeśli $K \cap L = \emptyset$. Wówczas formuły*

$$\mu_1(G) := \sup\{\mu_0(K) : K \subset G, K \in \mathcal{K}\}, \quad \mu(E) := \inf\{\mu_1(G) : G \supset E, G \in \mathcal{G}\} \quad (14)$$

wyznaczają funkcję $\mu : 2^X \to [0, \infty]$, taką, że $\mu_{|\mathcal{B}_X}$ jest miarą σ–addytywną i dla $E \in \mathcal{B}_X$ i $G \in \mathcal{G}$ spełnione są następujące warunki regularności:

$$\mu(G) = \sup\{\mu(K) : K \subset G, K \in \mathcal{K}\}, \quad \mu(E) = \inf\{\mu(G') : G' \supset E, G' \in \mathcal{G}\} \quad (15)$$

<u>Dowód.</u> Wyróżnimy cztery części rozumowania. (Zwartość X nie gra w nim roli).

i) Wpierw zauważmy, że $\mu_1(G_1) \leq \mu_1(G_2)$ gdy $G_1 \subset G_2$, więc też $\mu(E_1) \leq \mu(E_2)$ gdy $E_1 \subset E_2$. Dla $G \in \mathcal{G}$ uzyskujemy stąd $\mu(G) = \mu_1(G)$, co pociąga za sobą, że $\mu_0(K) \leq \mu(K) \leq \mu(G)$ dla $K \in \mathcal{K}$ takich, że $K \subset G$. Stąd i z (14) wynika (15).

ii) Funkcja μ jest przeliczalnie pod-addytywna, tzn. $\mu(\bigcup_i E_i) \leq \sum_i \mu(E_i)$ dla $E_1, E_2, \dots \subset X$.

Dla dowodu załóżmy wpierw otwartość wszystkich zbiorów E_i, a więc i zbioru $G := \bigcup_i E_i$. Wobec (14) i równości $\mu(G) = \mu_1(G)$ pozostaje wtedy dowieść, że gdy zbiór $K \subset G$ jest zwarty, to $\mu_0(K) \leq \sum_i \mu(E_i)$. Jednak wobec zwartości (a więc i normalności) zbioru K, z jego z otwartego pokrycia $\{E_i \cap K\}_{i=1}^{\infty}$ możemy wybrać pokrycie skończone $E_1 \cap K, \dots, E_n \cap K$, a następnie obrać takie zbiory zwarte $K_i \subset K \cap E_i$, , że $\bigcup_{i=1}^n K_i = K$. Zatem $\mu_0(K) \le \sum_{i=1}^n \mu_0(K_i) \le \sum_{i=1}^n \mu(E_i) \le \sum_i \mu(E_i)$.

W ogólnym przypadku, dla $\varepsilon > 0$ obierzmy zbiory otwarte $G_i \supset E_i$ tak, by $\mu(G_i) \le \mu(E_i) + 2^{-i}\varepsilon$ dla $i = 1, 2 \dots$. Ponieważ $\mu(\bigcup_i E_i) \le \mu(\bigcup_i G_i) \le \sum_i (\mu(E_i) + \varepsilon/2^i)$, więc z dowolności $\varepsilon > 0$ wynika, że $\mu(\bigcup_i E_i) \le \sum_i \mu(E_i)$.

iii) Gdy $\mu(E) < \infty$, to $\mu(E) \ge \mu(E \cap G) + \mu(E \setminus G)$ dla każdego zbioru otwartego G.

Istotnie, niech wpierw zbiór E będzie otwarty. Dla danego $\varepsilon > 0$ istnieje taki zbiór zwarty $K \subset E \cap G$, że $\mu_0(K) > \mu(E \cap G) - \varepsilon$. Wówczas $\mu(E \setminus K) \ge \mu(E \setminus G)$ i zbiór $E \setminus K$ jest otwarty; istnieje więc też taki zbiór zwarty $L \subset E \setminus K$, że $\mu_0(L) > \mu(E \setminus G) - \varepsilon$. A że $K \cup L \subset E$ i $\mu_0(K \cup L) > \mu(E \cap G) + \mu(E \setminus G) - 2\varepsilon$, to teza wynika z dowolności $\varepsilon > 0$. (Dwukrotnie wykorzystano to, że $\mu = \mu_1$ na zbiorach otwartych.)

Gdy zbiór E nie jest otwarty, to dla dowolnej liczby $r > \mu(E)$ istnieje zbiór otwarty E' taki, że $E' \supset E$ i $\mu(E') < r$. Uzyskamy $r > \mu(E') \ge \mu(E' \cap G) + \mu(E' \setminus G) \ge \mu(E \cap G) + \mu(E \setminus G)$, więc pozostaje skorzystać z dowolności liczby $r > \mu(E)$.

iv) Niech $\Sigma := \{G : \mu(E) \ge \mu(E \cap G) + \mu(E \setminus G) \text{ dla każdego zbioru } E \subset X\}$. Na podstawie i), ii) i twierdzenia Caratheodory'ego, rodzina Σ jest σ-ciałem zbiorów i $\mu_{|\Sigma}$ jest miarą σ-addytywną. Z iii) wynika, że Σ zawiera wszystkie zbiory otwarte, a więc i generowane przez nie σ–ciało $\mathcal{B}_X$. Funkcja $\mu_{|\mathcal{B}_X}$ jest więc σ-addytywna. $\square$

Uwaga 1. Ze wzoru (14) wynika, że jeśli funkcja μ_0 jest monotoniczna, to $\mu(E) < \infty$ dla każdego zbioru E o zwartym domknięciu.

Dowód twierdzenia 1. Przyjmijmy

$$\mu_0(K) := \inf\{\varphi(f) : f \in C(X) \text{ i } f \ge 1_K\} \text{ dla } K \in \mathcal{K}.$$

Wówczas $\mu_0(K) \le \varphi(1_X) < \infty$, a też $\mu_0(K \cup L) \le \mu_0(K) + \mu_0(L)$ wobec addytywności φ. (K i L zwarte; gra rolę to, że $1_{K \cup L} \le 1_K + 1_L$.) Gdy ponadto $K \cap L = \emptyset$, to istnieją funkcje ciągłe $u, v : X \to [0, 1]$, równe 1 na K i L, odpowiednio, i spełniające warunek $u + v \le 1$. (Korzystamy z normalności przestrzeni X i lematu Urysohna.) Dla każdej fukcji ciągłej $f \ge 1_{K \cup L}$ zachodzi $\varphi(uf) \ge \mu_0(K)$ i $\varphi(ug) \ge \mu_0(L)$, bo $uf \ge 1_K$ i $vf \ge 1_L$. A że $\varphi(f) \ge \varphi(uf) + \varphi(vf)$, bo funkcjonał φ jest nieujemny i addytywny, to z dowolności $f \ge 1_{K \cup L}$ wynika, że $\mu_0(K \cup L) \ge \mu_0(K) + \mu_0(L)$.

Można więc zastosować stwierdzenie 1 i uzyskać σ–addytywną miarę $\mu : \mathcal{B}_X \to [0, \infty)$, zadaną wzorami (14). Ponieważ $\mu(X) = \varphi(1) \ne \infty$, to z (15) i poniższego zadania 1a) wynika jej regularność. Pozostaje dowieść, że $\varphi(f) = \int_X f d\mu$ dla $f \in C(X)$; a że $f = f^+ - f^-$, to zażądamy bez straty ogólności, by $f \ge 0$.

W tym celu zauważmy wpierw, że gdy funkcja h jest ciągła i $1_{G'} \le h \le 1_K \le 1_G$ dla pewnych $G, G' \in \mathcal{G}$ i $K \in \mathcal{K}$, to $\mu(G') \le \varphi(h) \le \mu(G)$. Istotnie, z definicji μ_0 wynika, że $\mu_0(K') \le \varphi(h)$ dla zwartych $K' \subset G'$, a następnie z dowolności K'

–że $\mu(G') = \mu_1(G') \le \varphi(h)$. (Tu i dalej gra rolę (14) i i) z dowodu stwierdzenia 1.) Ponadto, $\varphi(h) \le \mu_0(K)$, bo dla ciągłych funkcji $h^+ \ge 1_K$ zachodzi $h \le h^+$, a więc i $\varphi(h) \le \varphi(h^+)$. Stąd istotnie $\mu(G') \le \varphi(h) \le \mu_0(K) \le \mu_1(G) = \mu(G)$.

Niech teraz $f : X \to [0, \infty)$ będzie funkcją ciągłą. Dla $i = 0, 1, \ldots$ przyjmijmy

$$G_i = \{x \in X : f(x) > i\} \text{ oraz } \ f_i = \min(1, \max(f - i, 0))$$

Wtedy $G_n = \emptyset$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$ (bo funkcja f jest ograniczona) i

$$f = f_0 + \ldots + f_n, \ \text{ przy czym } \ 1_{G_{i+1}} \le f_i \le 1_{G_i} \text{ i } \overline{G_{i+1}} \subset G_i \text{ dla } 0 \le i < n.$$

W związku z tym, $\mu(G_{i+1}) \le \varphi(f_i) \le \mu(G_{i-1})$ i $\mu(G_{i+1}) \le \int_X f_i d\mu \le \mu(G_{i-1})$, skąd $|\int_X f_i \mathrm{d}\mu - \varphi(f_i)| \le \mu(G_{i-1}) - \mu(G_{i+1})$ dla $0 \le i < n$. (Za G_{-1} przyjmujemy pewne otoczenie zbioru $\overline{G_0}$.) Dodanie tych nierówności stronami wykazuje, że $|\int_X f \mathrm{d}\mu - \varphi(f)| \le 5\mu(G_{-1})$.

Gdy zastąpić funkcję f przez $k \cdot f$, to otrzymamy $k \cdot |\int_X f \mathrm{d}\mu - \varphi(f)| \le 5\mu(G_{-1})$ dla $k = 1, 2, \ldots$. Stąd $|\int_X f \mathrm{d}\mu - \varphi(f)| = 0$, bo $\mu(G_{-1}) < \infty$. $\square$

Uwaga 2. a) Twierdzenie pozostanie słuszne dla lokalnie zwartej przestrzeni Hausdorffa X, jeśli $C(X)$ zmienić na $C_c(X)$, a regularność miary μ rozumieć jako spełnienie warunku (15). (W dowodzie należy w miejsce dowolnych funkcji $f \in C(X)$ używać tylko takich, których nośnik jest zwarty. Uzasadnienie skończoności liczb $\mu_0(K)$ czy $\mu(G_{-1})$, dla odpowiedniego zbioru G_{-1}, należy uzupełnić w oparciu o lemat Urysohna i to, że każdy zbiór zwarty $K \subset X$ ma zwarte otoczenie.)

b) Po tych zmianach, nadal uzyskamy $\|\varphi\| = \mu(X)$ – lecz może być, że $\|\varphi\| = \infty$. Gdy $X = \mathbb{R}^n$, a φ jest całkowaniem względem miary Riemanna, otrzymamy jako μ miarę Lebesgue'a.

Zadanie 1. Niech σ–addytywna miara $\mu : \mathcal{B}_X \to [0, \infty]$ spełnia warunek (15).

a) Dowieść, że jeśli $\mu(X) < \infty$, to miara ta jest regularna.

b)* Ogólniej dowieść, że gdy zbiór borelowski E jest σ–skończonej miary μ, to dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieją takie zbiory $K \in \mathcal{K}$ i $G \in \mathcal{G}$, że $K \subset E \subset G$ i $\mu(G \setminus K) < \varepsilon$.

§ 5. Zasady jednostajnej ograniczoności i otwartości

1 Twierdzenie Banacha-Steinhausa

Twierdzenie 1. *Niech $\mathcal{L}$ będzie rodziną ciągłych operatorów liniowych z przestrzeni Banacha V do przestrzeni unormowanej W. Wówczas albo $\sup_{L\in\mathcal{L}} \|L\| < \infty$, albo też istnieje zbiór $G \subset V$, który jest gęsty w V (w szczególności, jest niepusty!) i taki, że*

$$\sup_{L\in\mathcal{L}} \|L(v)\|_W = \infty \quad \textit{dla każdego} \quad v \in G. \tag{16}$$

Dowód. (Metodą S. Saksa.) Dla $n \in \mathbb{N}$ niech (piszę już $\| \ \|$ w miejsce $\| \ \|_W$):

$$G_n = \{v \in V : \|L(v)\| > n \ \text{ dla pewnego } L \in \mathcal{L}\}.$$

Każdy zbiór G_n jest otwarty, jako suma rodziny zbiorów otwartych $L^{-1}(\{w \in W : \|w\| > n\})$. (Sumujemy po $L \in \mathcal{L}$.) Są dwie możliwości:

a) Każdy zbiór G_n jest gęsty w V. Wtedy dla $G = \bigcap_n G_n$ zachodzi (16), przy czym zbiór G jest gęsty w V na podstawie zupełności przestrzeni V i otwartości gęstych zbiorów G_n. (Orzeka o tym twierdzenie Baire'a; należy sobie przypomnieć jego treść.)

b) Pewien zbiór zbiór G_n jest rozłączny z kulą $B(v_0, r)$, gdzie $v_0 \in V$ i $r > 0$. Wtedy dla $v \in rB_V$ i $L \in \mathcal{L}$ zachodzi $\|L(v)\| = \|L(v_0 + v) - L(v_0)\| \leq 2n$, bo $v_0, v_0 + v \in B(v_0, r)$. Stąd wynika, że $\|L\| = \sup_{v \in B_V} \|L(v)\| \leq 2n/r, \ \forall L \in \mathcal{L}$. $\square$

Uwaga 1. Niech założenia twierdzenia będą spełnione.

a) Dowód pokazuje, że za G z tezy twierdzenia można obrać zbiór **typu** G_δ **w** V, tzn. taki, który jest przecięciem przeliczalnie wielu zbiorów otwartych w V.

b) Z twierdzenia wynika, że jeśli rodzina $\mathcal{L}$ jest **punktowo ograniczona**, tzn. dla każdego $v \in V$ zachodzi $\sup_{L \in \mathcal{L}} \|L(v)\|_W < \infty$, to jest ona normowo ograniczona – czyli $\sup_{L \in \mathcal{L}} \|L\| < \infty$. (Jest to **zasada jednostajnej ograniczoności**). Przykładem rodziny punktowo ograniczonej jest każdy ciąg operatorów $\{L_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, który jest **punktowo zbieżny**: taki, że dla każdego $v \in V$ istnieje granica $\lim_n L_n(v)$.

Wniosek 1. *Niech V i W będą przestrzeniami Banacha. Wówczas dla każdego ciągu operatorów $L_n \in \mathcal{L}(V, W)$, $n \in \mathbb{N}$, równoważne są warunki:*

a) ciąg ten jest punktowo zbieżny;

b) $\sup_n \|L_n\| < \infty$ i granica $\lim_n L_n(v)$ istnieje dla każdego v z pewnego liniowo gęstego zbioru $E \subset V$.

Gdy warunki te są spełnione, to operator $L(v) := \lim_n L_n(v)$ jest ograniczony i $\|L\| \leq \lim_n \inf \|L_n\|$.

Dowód. To, że *a*) $\Rightarrow$ *b*) wynika z uwagi 1. (Przyjmujemy $E = V$.) Gdy zaś zachodzi b), to nietrudno sprawdzić, że dla każdego wektora v ciąg $(L_n(v))_n$ spełnia warunek Cauchy'ego i wobec tego jest zbieżny, jak też, że norma granicznego operatora L jest ograniczona przez $\sup_n \|L_n\|$ –a więc i przez $\sup_i \|L_{n_i}\|$, dla każdego ciągu $n_1 < n_2 < ....$ (Zmieniamy (L_n) na (L_{n_i}).) Kresem dolnym tych ograniczeń jest $\lim_n \inf \|L_n\|$. $\boxminus$

2 Twierdzenia o otwartości i o wykresie domkniętym

Twierdzenie 1 (zasada otwartości Schaudera)**.** *Ciągła surjekcja liniowa jednej przestrzeni Banacha na drugą jest przekształceniem otwartym, tzn. przeprowadza zbiory otwarte na otwarte.*

Uwaga 1. Otwartość operatora $T \in \mathcal{L}(V, W)$ jest równoważna temu, by $T(B_V) \supset rB_W$ dla pewnego $r > 0$, a też istnieniu stałej $C > 0$ takiej, że dla każdego $w \in W$ istnieje rozwiązanie równania $T(x) = w$, mające normę $< C\|w\|$. (Tu $C = 1/r$; uzasadnienie jest zadaniem.) Twierdzenie orzeka więc, że jeśli każde z tych równań ma rozwiązanie x, a V i W są przestrzeniami Banacha, to taka stała C istnieje.

Przed udowodnieniem twierdzenia wskażemy na jego ważne konsekwencje.

Twierdzenie 2 (twierdzenie Banacha o izomorfizmie)**.** *Ciągła bijekcja liniowa jednej przestrzeni Banacha na drugą jest izomorfizmem liniowo–topologicznym.* $\boxminus$

Wniosek 1. *Gdy V i W są przestrzeniami Banacha, a przekształcenie $T \in \mathcal{L}(V, W)$ jest „na", to przestrzeń W jest liniowo–topologicznie izmorficzna z $V/\ker(T)$.*

Dowód. Indukowana bijekcja $V/\ker(T) \to W$ jest wówczas homeomorfizmem. $\square$

Uwaga 2. Rzutowanie $V \to V/\ker(T)$ jest otwarte (patrz §3.1iv)), więc na tej drodze z twierdzenia 2 uzyskujemy też twierdzenie 1. Zasługą Schaudera było jednak nie tylko sformułowanie twierdzenia 1, ale i jego prostszy bezpośredni dowód. (Patrz poniżej.)

Twierdzenie 3 (Banacha o wykresie domkniętym)**.** *Dla przekształcenia liniowego $T : V \to W$, gdzie V i W to przestrzenie Banacha, równoważne są warunki:*

a) operator T jest ciągły;

b) dla każdego zbieżnego do zera ciągu wektorów $v_n \in V$, jeśli ciąg $(T(v_n))$ ma granicę w W, to jest nią 0;

c) wykres $\{(v, T(v)) : v \in V\}$ operatora T jest zbiorem domkniętym w $V \times W$.

Dowód. Niech warunek c) będzie spełniony; wówczas omawiany wykres Gr jest przestrzenią Banacha, jako domknięta podprzestrzeń przestrzeni $V \times W$. Oznaczmy przez $P : Gr \to V$ i $Q : Gr \to W$ naturalne rzutowania; są one liniowymi przekształceniami ciąglymi, przy czym P jest zarazem bijekcją. Na podstawie twierdzenia Banacha o izomorfiźmie, przekształcenie $P^{-1} : V \to Gr$ jest ciągłe. Tym samym ciągłe jest też przekształcenie $T = Q \circ P^{-1}$, co dowodzi implikacji c)⇒a).

Implikacje a)⇒b)⇒c) są łatwe i nie zależą od zupełności V czy W. $\boxminus$

Zadanie 1. Dowieść, że operator różniczkowania $T(f) := f'$, z $(C^1([0,1]), \| \|_{\sup})$ w $(C([0,1]), \| \|_{\sup})$, ma domknięty wykres. Czy jest tu sprzeczność z twierdzeniem 2?

Dowód twierdzenia 1 rozbity jest na dwa lematy, mające niezależne znaczenie.

Niech V i W będą przestrzeniami unormowanymi. Przekształcenie liniowe $T : V \to W$ nazwiemy **niemal otwartym**, jeśli domknięcie w W obrazu $T(B_V)$ kuli jednostkowej $B_V = \{v \in V : \|v\| < 1\}$ zawiera pewną kulę rB_W, $r > 0$.

Lemat 1. *Jeśli przestrzeń W jest zupełna, to każda surjekcją liniowa $T : V \to W$ jest niemal otwarta.*

Lemat 2. *Jeśli przestrzeń V jest zupełna, to każde niemal otwarte i ciągłe przekształcenie liniowe $T : V \to W$ jest otwarte (w tym jest „na").*

<u>Dowód lematu 1.</u> Przyjmijmy $C = T(B_V)$; ponieważ T jest surjekcją, to $W = \bigcup_n nC$ i wobec tego $W = \bigcup_n n\overline{C}$. Stąd i z twierdzenia Baire'a wynika, że $\mathrm{int}(n\overline{C}) \neq \emptyset$ dla pewnego $n \geq 1$, a więc i dla $n = 1$ (bo jednokładność $w \mapsto \frac{1}{n}w$ jest homeomorfizmem przestrzeni W). A że zbiór $\mathrm{int}\overline{C}$ jest wypukły i symetryczny względem zera, w ślad za C, to $0 \in \mathrm{int}\overline{C}$. ⊟

<u>Dowód lematu 2.</u> Niech $T \in \mathcal{L}(V, W)$ i $\overline{T(B_V)} \supset rB_W$, gdzie $r > 0$. Wtedy dla każdego wektora $w \in W$ i zachodzi $w \in \overline{T((\|w\|/r)B_V)}$ (bo $w \in \|w\|\overline{B_W}$). Zatem:

$$\forall w \in W\ \forall \varepsilon > 0\ \exists v \in V \text{ taki, że } \|w - T(v)\| < \varepsilon \text{ i } \|v\| < \|w\|/r \qquad (*)$$

Niech $w \in W$. Z (*) wynika istnienie takiego wektora $v_1 \in V$, że $\|w - T(v_1)\| < \|w\|/2$ i $\|v_1\| \leq \|w\|/r$. Następnie, stosując (*) do wektora $w' = w - T(v_1)$ stwierdzamy istnienie takiego wektora $v_2 \in V$, że $\|w - T(v_1) - T(v_2)\| < \|w\|/4$ i $\|v_2\| < \|w\|/2r$. Indukcyjnie otrzymujemy takie wektory v_n, że $\|w - \sum_{i=1}^n T(v_i)\| < \|w\|/2^n$ i $\|v_n\| < \|w\|/2^{n-1}r$ dla $n \in \mathbb{N}$. Wobec zupełności V, istnieje $v = \sum_n v_n$, przy czym $T(v) = w$ i $\|v\| < 2\|w\|/r$. Gdy więc $\|w\| < r/2$, to $w \in T(B_V)$, co oznacza, że $\frac{r}{2}B_W \subset T(B_V)$. □

Uwaga 3. * Rozumowanie to dowodzi, że jeśli $\overline{T(B_V)} \supset rB_W$, to $T(B_V) \supset rB_W$ – bo $T(B_V) \supset (1 - \frac{1}{k})rB_W$ dla $k \in \mathbb{N}$, o czym przekonujemy się zastępując wyżej 2^n przez k^n.

3 Przykłady zastosowań wyników z punktów 1 i 2

<u>A. Zbieżność wielomianów Bernsteina.</u> (Za A. Pełczyńskim.) Dla $n \geq 1$ i zdefiniujmy $B_n : C^{\mathbb{R}}([0, 1]) \to C^{\mathbb{R}}([0, 1])$ formułą $(B_n f)(t) := \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f(\frac{k}{n}) t^k (1-t)^{n-k}$. Zachodzi $\sup_n \|B_n\| \leq 1$, bo $|B_n f(t)| \leq \sum_{n=0}^n \|f\|_{\sup} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} = \|f\|_{\sup}$. Podobnie, przy $f_j(t) := e^{jt}$ zachodzi $(B_n f_j)(t) = (te^{j/n} + 1 - t)^n$, co na $[0, 1]$ jedostajnie zbiega do f_j. A że zbiór $\{f_j\}_{j=0}^\infty$ jest liniowo gęsty w $C^{\mathbb{R}}([0, 1])$ (można to uzasadnić n.p. w oparciu o twierdzenie Stone'a–Weierstrassa), to z implikacji b)⇒a) we wniosku 1 w p.1 wynika twierdzenie Bernsteina: $\lim_n \|B_n f - f\|_{\sup} = 0$ dla $f \in C^{\mathbb{R}}([0, 1])$.

<u>B. Uogólnienie Landaua twierdzenia o postaci funkcjonałów na ℓ_p.</u>

Twierdzenie 1 (Landaua)**.** *Niech $p \in [1, \infty)$ i niech ciąg skalarów $y = (y_n)$ ma tę własność, że dla każdego $x \in \ell_p$ szereg $\sum_n x_n y_n$ jest zbieżny. Wtedy $y \in \ell_q$, gdzie wykładnik q jest sprzężony do p.*

<u>Dowód.</u> Zdefiniujmy funkcjonały $\varphi_n : \ell_p \to \mathbb{F}$ wzorem $\varphi_n(x) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$. Z założenia, ciąg (φ_n) jest zbieżny punktowo, skąd $\sup \|\varphi_n\| < \infty$ na podstawie twierdzenia Banacha-Steinhausa. Wiemy jednak, że $\|\varphi_n\| = \|(y_1, \ldots, y_n)\|_q$ (gra rolę twierdzenie 1b) w §2.3), wobec czego $\|y\|_q = \sup_n \|(y_1, \ldots, y_n)\|_q < \infty$. □

C. Rozbieżność szeregów Fouriera.

Twierdzenie 2. *W zbiorze $C_{2\pi}$ funkcji ciągłych $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o okresie 2π istnieje taka, której szereg Fouriera jest w danym punkcie $x \in [0, 2\pi]$ rozbieżny.*

Szkic dowodu. Z AM I wiadomo, że n–ta suma częściowa szeregu Fouriera funkcji $f \in C_{2\pi}$ przyjmuje w x wartość równą

$$s_n^f := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t) D_n(x-t)\mathrm{d}t, \text{ gdzie } D_n(y) = \frac{\sin((n+0.5)y)}{\sin(0.5y)}.$$

Oznaczmy funkcjonał $C_{2\pi} \ni f \mapsto s_n^f \in \mathbb{R}$ przez φ_n. Wobec zadania 3a) z §4.3 i okresowości funkcji D_n:

$$\|\varphi_n\| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |D_n(x-t)|\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Big|\frac{\sin((n+0.5)y)}{\sin(0.5y)}\Big|\mathrm{d}y.$$

Nietrudno jednak stwierdzić, że ostatnia całka dąży do ∞ gdy $n \to \infty$. (Szczegóły w książce Rudina, str. 113.) Z uwagi 1 b) w p.1 wynika więc istnienie funkcji $f \in C_{2\pi}$ takiej, że ciąg liczb $|\varphi_n(f)| = |s_n^f(x)|$ jest nieograniczony –a więc ciąg $s_n^f(x)$ sum cząstkowych jest rozbieżny. □

Twierdzenie to jest interesujące przez to, że szereg Fouriera funkcji z $C_{2\pi}$ (ogólniej, funkcji z $L_2([0, 2\pi])$) jest zbieżny w $L_2([0, 2\pi])$. Wiadomo też z AM I, że jest on zbieżny w każdym punkcie, jeśli funkcja jest przedziałami monotoniczna.

D. Kryterium ograniczoności zbioru.

Twierdzenie 3. *Podzbiór A przestrzeni unormowanej $(V, \|\ \|)$, przeprowadzany przez każdy funkcjonał $\varphi \in V^*$ na ograniczony podzbiór ciała skalarów, jest ograniczony w $(V, \|\ \|)$.*

Dowód. Każdy wektor $a \in A$ wyznacza funkcjonał ψ_a na przestrzeni V^*, zdefiniowany wzorem $\psi_a(\varphi) = \varphi(a)$ dla $\varphi \in V^*$. Z założenia, rodzina funkcjonałów $\{\psi_a : a \in A\}$ jest punktowo ograniczona, więc jest normowo ograniczona na podstawie wniosku 1 w p.1. (Gra rolę zupełność przestrzeni V^*; patrz uwaga 1 w §3.1ii).) Przy $C := \sup_{a\in A} \|\psi_a\|$ zachodzi więc $|\varphi(a)| \leq C\|\varphi\|$ dla każdego $\varphi \in V^*$, i tym samym $\|a\| \leq C$ dla każdego $a \in A$. (Patrz wniosek 1 w §1.4.) □

Uwaga 1. Niech operator $T : V \to W$, pomiędzy przestrzeniami unormowanymi, będzie liniowy. Z twierdzenia 3 zastosowanego przy $A := T(B_V)$ wynika, że jeśli złożenie $\psi \circ T$ jest ciągłe dla każdego $\psi \in W^*$, to operator T jest ciągły. ⊟

E. Ciągłość rzutów liniowych.

Twierdzenie 4. *Gdy przestrzeń Banacha V jest algebraiczną sumą prostą swych domkniętych podprzestrzeni liniowych Y, Z, to jej rzut liniowy na Y wzdłuż Z jest ciągły. (Równoważnie: istnieje wówczas stała $C > 0$ taka, że $\|y\| \leq C\|y + z\|$ dla wszystkich $y \in Y$ i $z \in Z$.)*

Dowód. Wyposażmy $Y \times Z$ w normę $|||(y,z)||| := \max(\|y\|, \|z\|)$ i rozpatrzmy operator $T : Y \times Z \to V$ dany wzorem $T(y,z) = y+z$. Z założenia, T jest bijekcją. Z ciągłości T i twierdzenia Banacha o izomorfizmie wynika więc, że $\|T^{-1}\| < \infty$. Jest widoczne, że teza jest spełniona przy $C := \|T^{-1}\|$. □

Niech V będzie przestrzenią unormowaną. Nazwijmy jej podprzestrzeń Y **dopełnialną**, jeśli jest domknięta i istnieje domknięta podprzestrzeń $Z \subset V$ taka, że $V = Y \oplus Z$ algebraicznie.

Wniosek 1. *Podprzestrzeń przestrzeni Banacha wtedy i tylko wtedy jest dopełnialna, gdy jest obrazem pewnego ciągłego rzutu liniowego tej przestrzeni.* □

Uwaga 2. a) W przestrzeni unormowanej V, każda podprzestrzeń skończonego wymiaru, a także każda domknięta podprzestrzeń $Y \subset V$ taka, że $\dim(V/Y) < \infty$, jest dopełnialna. (Wynika to z zadań 1 i 2 w §3.2 – jak?)

b) Istnieją niedopełnialne domknięte podprzestrzenie przestrzeni Banacha, np. niedopełnialna jest podprzestrzeń c_0 przestrzeni ℓ_∞. (Dowód można znaleźć w .....)

F. Równoważność porównywalnych norm zupełnych.

Wniosek 2. *Gdy jedna z dwóch zupełnych norm na przestrzeni wektorowej jest ciągła względem drugiej, to normy te są równoważne.* ⊟

Twierdzenie 5. * *Niech X będzie przestrzenią zwartą, zaś $\| \ \|$ normą zupełną na $C(X)$, w której ewaluacje we wszystkich punktach $x \in X$ są ciągłe. Wówczas norma ta jest równoważna normie $\| \ \|_{\sup}$.*

Dowód. Skoro ewaulacje są ciągłe w normie $\| \ \|$, to gdy ciąg $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset C(X)$ jest zbieżny do 0 w normie $\| \ \|$, zaś do f w normie $\| \ \|_{\sup}$, to $f = 0$. Na podstawie twierdzenia 2 w p.2, identyczność jest więc ciągłym przekształceniem z $(C(X), \| \ \|)$ w $(C(X), \| \ \|_{\sup})$, a teza wynika z zupełności obu norm i wniosku 2. □

G. Ko–uniwersalność przestrzeni ℓ_1.

Twierdzenie 6. *Gdy V jest ośrodkową przestrzenią Banacha, to istnieje ciągła surjekcja liniowa $T : \ell_1 \to V$.*

Dowód. Obierzmy zbiór $\{v_n\}_{n=1}^\infty$, gęsty w kuli jednostkowej B_V, i dla $x = (x_n) \in \ell_1$ niech $T(x) = \sum x_n v_n$. Wobec zupełności V, szereg jest zbieżny i $\|T(x)\|_V \le \sum_n |x_n| \cdot \|v_n\| \le \sum_n |x_n| \cdot 1 = \|x\|_{\ell_1}$, skąd $\|T\| \le 1$. Przekształcenie T jest też niemal otwarte, bo skoro $v_n = T(e_n) \in T(\overline{B}_{\ell_1})$, to $\mathrm{cl}(T(B_{\ell_1})) \supset \mathrm{cl}\{v_n\}_{n=1}^\infty \supset B_V$. Na podstawie lematu 2 w p.2, jest ono otwarte i wobec tego „na”. (Odnotujmy, że z konstrukcji tej i uwagi 1 w p.2 wynika, iż $T(B_{\ell_1}) = B_V$.) □

H. Twierdzenie Helly'ego, c.d.

Niech V i W będą przestrzeniami Banacha, zaś operator $L \in \mathcal{L}(V,W)$ będzie surjektywny. Z zasady otwartości wynika, że $L(B_V) \supset rB_W$ dla pewnej liczby $r > 0$. Dla każdego zbioru $A \subset V$ i $\varepsilon > 0$ zachodzi więc $L(A + \varepsilon B_V) \supset L(A) + \varepsilon r B_W$, wobec czego $\bigcap_{\varepsilon>0} L(A + \varepsilon B_V) \supset \mathrm{cl}_W L(A)$.

Stąd i z przykładu 1 w §1.5 wynika, że warunek $|\psi(w)| \leq \|\psi \circ L\|\ \forall \psi \in W^*$ jest nie tylko równoważny temu, by $w \in \mathrm{cl}_W L(B_V)$, ale i temu, by $w \in \bigcap_{\varepsilon>0} L((1+\varepsilon)B_V)$.

I. Wykorzystywane później zadanie.

Zadanie 1. Niech V i W będą przestrzeniami Banacha, a operator $T \in \mathcal{L}(V,W)$ będzie taki, że $T(V) \oplus X = W$ dla pewnej podprzestrzeni X z $\dim X < \infty$ (ogólniej: domkniętej w W). Dowieść domkniętości $T(V)$ w W. (Wskazówka: przekształcenie $(v,x) \mapsto T(v) + x$, z $V \times X$ na W, jest otwarte na podstawie zasady otwartości, więc przeprowadza $V \times (X \setminus \{0\})$ na zbiór otwarty, którego $T(V)$ jest dopełnieniem.)

§ 6. Przestrzeń Hilberta

1 Definicja i wstępne własności

Niech H będzie przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Definicja. a) **Iloczynem skalarnym** nazywamy taką funkcję $\langle\cdot,\cdot\rangle$ z $H \times H$ w $\mathbb{F}$, że dla $v_1, v_2, v, w \in H$ i $\lambda \in H$ spełnione są warunki:

1) $\langle \lambda v_1 + v_2, w\rangle = \lambda\langle v_1, w\rangle + \langle v_2, w\rangle$.
2) liczby zespolone $\langle v, w\rangle$ i $\langle w, v\rangle$ są wzajemnie sprzężone;
3) $\langle v, v\rangle \in (0,\infty)$ dla $v \neq 0$. (Wyżej, $v, v_1, v_2, w \in H$ i $\lambda \in \mathbb{F}$ są dowolne.)

b) Gdy na H wyróżniono pewien iloczyn skalarny $\langle\cdot,\cdot\rangle$, nazywamy ją **przestrzenią pre-hilbertowską**. (Przestrzenią tą jest więc para $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. Przyjmujemy wtedy:

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle} \quad \text{dla} \quad v \in H. \tag{17}$$

Dla $A, B \subset H$ piszemy $A \perp B$ gdy $\langle a, b\rangle = 0$ dla każdych $a \in A$ i $b \in B$; zamiast $\{v\} \perp \{w\}$ piszemy $v \perp w$. (Są to relacje symetryczne.)

Układ $\{u_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma} \subset H$ nazywamy **ortogonalnym**, jeśli $u_\gamma \neq 0$ i $u_\gamma \perp u_{\gamma'}$ dla $\gamma, \gamma' \in \Gamma, \gamma \neq \gamma'$. Gdy ponadto $\|u_\gamma\| = 1\ \forall\gamma \in \Gamma$, to nazywamy go **ortogonalnym unormowanym** lub **ortonormalnym**.

Uwaga 1. Dla wektorów przestrzeni pre-hilbertowskiej H i zbioru $A \subset H$ zachodzi:

a) $\langle \sum_{i=1}^k \lambda_i v_i, \sum_{j=1}^l \mu_j w_j\rangle = \sum_{1\leq i\leq k, 1\leq j\leq l} \lambda_i \overline{\mu_j} \langle v_i, w_j\rangle$, skąd $(v \perp A) \Rightarrow (v \perp \mathrm{lin} A)$.
b) $\|\sum_{i=1}^k v_i\|^2 = \sum_{i=1}^k \|v_i\|^2 + 2\sum_{1\leq i<j\leq k} \mathrm{Re}\langle v_i, v_j\rangle$.
c) **tożsamość równoległoboku**: $\|v - w\|^2 + \|v + w\|^2 = 2(\|v\|^2 + \|w\|^2)$.
d) Gdy skończony układ $\{v_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ jest ortogonalny i $v = \sum_{\gamma\in\Gamma} v_\gamma$, to
$\|v\|^2 = \sum_{\gamma\in\Gamma} \|v_\gamma\|^2$ (**równość Pitagorasa**), oraz

dla $\gamma \in \Gamma$ zachodzi $\|v\| > \|v_\gamma\|$ lub $v = v_\gamma$ (**nierówność Euklidesa**).

e) $\mathrm{Re}(\langle v, w\rangle) = \frac{1}{2}(\|v+w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2)$,

$\mathrm{Im}(\langle v, w\rangle) = \frac{1}{2}(\|v+\mathbf{i}w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2)$ gdy $\mathbb{F} = \mathbb{C}$.

(Są to przykładowe **tożsamości polaryzacyjne**, wyznaczające $\langle\cdot,\cdot\rangle$ przez $\|\cdot\|$). ⊟

Stwierdzenie 1 (i definicja). *Niech H_0 będzie podprzestrzenią przestrzeni pre-hilbertowskiej H i niech $h \in H$. Wektor $h_0 \in H_0$ nazwiemy* **rzutem ortogonalnym wektora** *h* **na** *H_0 jeśli $h - h_0 \perp H_0$.*

a) Jeśli taki wektor h_0 istnieje, to jest jedyny i zachodzą nierówności $\|h_0\| \le \|h\|$ i $\|h - h_0\| < \|h - g\|$ dla $g \in H_0 \setminus \{h_0\}$.

b) Jeśli $H_0 = \mathrm{lin}(u_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$, gdzie $(u_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ jest skończonym układem ortogonalnym, to powyższy wektor $h_0 \in H_0$ istnieje i jest zadany wzorem

$$h_0 = \sum_{\gamma\in\Gamma} \frac{\langle h, u_\gamma\rangle}{\|u_\gamma\|^2} u_\gamma \tag{18}$$

Dowód. a) Zachodzi $\|h_0\| \le \|h\|$ i $\|h-h_0\| < \|h-g\|$ dla $g \in H_0 \setminus \{h_0\}$ na podstawie nierówności Euklidesa zastosowanych do układów ortogonalnych $h_0, h-h_0$ i $h-h_0, h_0-g$, odpowiednio. (Zauważamy też, że $\|h_0\| < \|h\|$ jeśli $h \notin H_0$, bo wtedy $h \neq h_0$.)

b) Zdefiniujmy teraz h_0 wzorem (18). Nietrudno sprawdzić, że wtedy $\langle h-h_0, w\rangle = 0$ gdy w jest którymkolwiek z wektorów u_γ. Na podstawie uwagi 1a) jest tak więc i dla wszystkich $w \in \mathrm{lin}\{u_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma} = H_0$. □

Stwierdzenie 2. *Dla $v, w \in H$ prawdziwe są:*

a) **nierówność Cauchy'ego–Buniakowskiego–Schwarza***: $|\langle v, w\rangle| \le \|v\|\|w\|$;*

b) **nierówność Minkowskiego***: $\|v+w\| \le \|v\| + \|w\|$.*

W szczególności, $\|\ \|$ jest normą na H.

Dowód. a) Wystarczy rozpatrzeć przypadek, gdy $w \neq 0$. Wtedy jednak, stosując stwierdzenie 1 do wektora $h := v$ i układu ortogonalnego $\{w\}$, otrzymujemy $h_0 = \langle v, w\rangle w/\|w\|^2$ i dalej $\|v\| \ge \|h_0\| = |\langle v, w\rangle|/\|w\|$ –co jest równoważne tezie a).

b) $\|v+w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\mathrm{Re}\langle v, w\rangle \le \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\|v\|\cdot\|w\| = (\|v\| + \|w\|)^2$.

Definicja. $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ nazywamy **przestrzenią Hilberta**, jeśli norma $\|\ \|$ jest zupełna.

Zasadniczy przykład przestrzeni Hilberta: przestrzeń $L_2(\mu)$ z §2.2, z iloczynem skalarnym $\langle f, g\rangle = \int f\overline{g}\mathrm{d}\mu$.

(Całka ma sens, bo $|f\overline{g}| \le \frac{1}{2}(|f|^2 + |g|^2)$; zupełność wynika z twierdzenia 1 w §2.2.)

Gdy μ jest miarą liczącą na zbiorze Γ jest to przestrzeń$(\ell_2(\Gamma), \langle\cdot,\cdot\rangle)$, gdzie $\langle (x_\gamma), (y_\gamma)\rangle = \sum_\gamma x_\gamma \overline{y_\gamma}$. (Rozumienie prawej strony jak w odnośniku 3 na str. 9.)

Zadanie 1. Udowodnić, że iloczyn skalarny jest ciągłą funkcją na $H \times H$. Dla $A, B \subset H$ wywnioskować, że $A \perp B \Rightarrow \overline{\mathrm{lin}}A \perp \overline{\mathrm{lin}}B$, gdzie $\overline{\mathrm{lin}}$ to domknięcie powłoki liniowej.

Zadanie uz. 1. Dowieść, że gdy $(H,\cdot)$ jest rzeczywistą przestrzenią (pre–)hilbertowską, to wzory $(s+t\mathbf{i})(x,y) := (su-ty, tx+sy)$ i $\langle (x,y),(u,v)\rangle := x\cdot u+y\cdot v+\mathbf{i}(y\cdot u-x\cdot v)$ wprowadzają w $H\times H$ strukturę zespolonej przestrzeni (pre-)hilbertowskiej.

2 Ogólne rozwinięcie Fouriera i jego związek z rzutem ortogonalnym

Przypomnijmy, że sumą układu $(t_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ nieujemnych liczb t_γ nazywamy kres górny sum skończonych jego podukładów. Gdy suma ta, oznaczana $\sum_{\gamma\in\Gamma} t_\gamma$, jest skończona, to $t_\gamma\neq 0$ tylko dla przeliczalnie wielu $\gamma\in\Gamma$ (dlaczego?).

Definicja. Szereg $\sum_{\gamma\in\Gamma} v_\gamma$ wektorów przestrzeni Banacha V jest **zbieżny bezwarunkowo**, jeśli zbiór $\Gamma_0=\{\gamma\in\Gamma : v_\gamma\neq 0\}$ jest przeliczalny i szereg $\sum_{i=1}^\infty v_{\gamma_i}$ jest zbieżny do wektora, który nie zależy od ponumerowania $\gamma_1,\gamma_2,\ldots$ elementów zbioru Γ_0. (Odnośnie możliwych modyfikacji tej definicji patrz zadanie na końcu.)

Przykład 1. Szereg $\sum_n e_n/n$ w przestrzeni ℓ_2 jest zbieżny bezwarunkowo, lecz nie bezwzględnie (suma norm jego wyrazów jest nieskończona).

Stwierdzenie 1 (Równość Pitagorasa, c.d.). *Niech wektory v_γ $(\gamma\in\Gamma)$ w przestrzeni Hilberta H będą parami ortogonalne i takie, że $\sum_\gamma \|v_\gamma\|^2<\infty$. Wówczas szereg $\sum_\gamma v_\gamma$ jest w H bezwarunkowo zbieżny i $\|\sum_\gamma v_\gamma\|^2=\sum_\gamma\|v_\gamma\|^2$.*

Dowód. Skoro $\sum_\gamma\|v_\gamma\|^2<\infty$, to $v_\gamma\neq 0$ tylko dla przeliczalnie wielu $\gamma\in\Gamma$. Można więc ograniczyć się do przypadku, gdy $\Gamma=\mathbb{N}$. Niech $\mathbb{N}\ni k\mapsto j(k)\in\mathbb{N}$ będzie dowolną bijekcją i przyjmijmy $s_n:=\sum_{i=1}^n v_i$ i $\sigma_n:=\sum_{i=1}^n v_{j(i)}$.

Gdy $k,l,n\in\mathbb{N}$ i $k,l\geq\max\{j^{-1}(i)\}_{i=1}^n$, to $s_k-\sigma_l$ jest sumą skończenie wielu wektorów postaci $\pm v_i$, gdzie $i\geq n$; zatem wtedy $\|s_k-\sigma_l\|^2\leq\sum_{i=n}^\infty\|v_i\|^2$ na podstawie równości Pitagorasa z uwagi 1d) w p.1. A że $\sum_i\|v_i\|^2<\infty$, to: a) $\lim_k\|s_k-\sigma_k\|=0$, i b) $(s_n)_n$ jest ciągiem Cauchyego (do tego, przyjmujemy za j permutację identycznościową). Szereg $\sum_n v_n$ jest więc bezwarunkowo zbieżny i $\|\sum_n v_n\|^2=\lim_n\|s_n\|^2=\lim_n\sum_{i=1}^n\|v_i\|^2=\sum_i\|v_i\|^2$. $\square$

Uwaga 1. Wynika stąd, że gdy układ $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ortogonalny i szereg $\sum_n v_n$ jest zbieżny, to jest zbieżny bezwarunkowo. (Jest tak, bo wtedy skończoną granicę ma ciąg $(\|\sum_{i=1}^n v_i\|^2)_n$, równy ciągowi $(\sum_{i=1}^n\|v_i\|^2)_n$.)

Twierdzenie 1. *Niech $(u_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ będzie unormowanym układem ortogonalnym w przestrzeni Hilberta H i niech $h\in H$. Wówczas szereg $\sum_\gamma\langle h,u_\gamma\rangle u_\gamma$ jest bezwarunkowo zbieżny, a jego suma h_0 jest rzutem ortogonalnym wektora h na podprzestrzeń $H_0:=\overline{\mathrm{lin}}\{u_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$. Ponadto, $\|h_0\|^2=\sum_\gamma|\langle h,u_\gamma\rangle|^2$.*

Wyżej, $\overline{\mathrm{lin}}\{u_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ oznacza domknięcie powłoki liniowej zbioru $\{u_\gamma:\gamma\in\Gamma\}$.

Dowód. Jak wiemy z p.1, dla każdego skończonego zbioru $\Gamma'\subset\Gamma$, norma rzutu wektora h na podprzestrzeń $\mathrm{lin}\{u_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma'}$ nie przekracza $\|h\|$ i jest równa $(\sum_{\gamma\in\Gamma'}|\langle h,u_\gamma\rangle|^2)^{1/2}$.

Wobec dowolności Γ' zachodzi $\sum_\gamma |\langle h, u_\gamma\rangle|^2 \leq \|h\|^2 < \infty$.
Na podstawie stwierdzenia 1 szereg $\sum_\gamma \langle h, u_\gamma\rangle u_\gamma$ jest więc bezwarunkowo zbieżny do pewnego wektora h_0, takiego, że $\|h_0\|^2 = \sum_\gamma |\langle h, u_\gamma\rangle|^2$.

Ponieważ suma szeregu jest granicą jego skończonych sum cząstkowych, to $h_0 \in H_0$. Mnożąc zaś skalarnie równość $h_0 = \sum_\gamma \langle h, u_\gamma\rangle u_\gamma$ przez u_μ i korzystając z tego, że $\langle u_\gamma, u_\mu\rangle = \delta^\gamma_\mu$ stwierdzamy, że $\langle h_0, u_\mu\rangle = \langle h, u_\mu\rangle$. Tym samym $h - h_0 \perp u_\mu$ dla $\mu \in \Gamma$, skąd $h - h_0 \perp H_0$. (Patrz zadanie 1 w p.1.) $\square$

Wniosek 1. *Przy oznaczeniach twierdzenia, prawdziwa jest* **nierówność Bessela** $\sum_\gamma |\langle h, u_\gamma\rangle|^2 \leq \|h\|^2$, *zaś równość* $\sum_\gamma |\langle h, u_\gamma\rangle|^2 = \|h\|^2$ *jest równoważna każdemu z warunków* $h \in H_0$ *czy* $h = \sum_\gamma \langle h, u_\gamma\rangle u_\gamma$ *(zbieżność jest bezwarunkowa).*

Dowód. Jak wiemy z p.1, $\|h_0\| \leq \|h\|$, a też $\|h_0\| = \|h\| \Leftrightarrow h = h_0 \Leftrightarrow h \in H_0$. $\square$

Definicja. Szereg $\sum_{\gamma\in\Gamma} \langle h, u_\gamma\rangle u_\gamma$ nazywamy **(ogólnym) rozwinięciem Fouriera** wektora $h \in H$ względem układu ortonormalnego $\{u_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$, a skalary $\langle h, u_\gamma\rangle$ – **współczynnikami Fouriera** wektora h względem tego układu. Okazuje się więc, że wyznaczają one tak normę rzutu wektora h na $\overline{\mathrm{lin}}\{u_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$, jak i (wraz z wektorami u_γ) sam ten rzut.

Przez rozwinięcie Fouriera wektora h względem nieunormowanego układu ortogonalnego (v_γ) rozumiemy rozumiemy jego rozwinięcie względem układu $(\frac{1}{\|v_\gamma\|}v_\gamma)$.

Zadanie uzupełniające 1. Niech $(v_n)_{n=1}^\infty$ będzie układem wektorów przestrzeni Banacha V. Dowieść równoważności warunków (w nich „zbieżność" oznacza zbieżność w V):

a) Dla każdej bijekcji $\mathbb{N} \ni i \mapsto n(i) \in \mathbb{N}$, szereg $\sum_i v_{n(i)}$ jest zbieżny.

b) Dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje liczba $N_\varepsilon > 0$ taka, że gdy zbiór $F \subset \mathbb{N}$ jest skończony i $\inf F > N_\varepsilon$, to $\|\sum_{i\in F} v_i\| < \varepsilon$.

c) Suma szeregu w a) nie zależy od rozważanej bijekcji.

d) Dla każdego rosnącego ciągu $(i_n)_{n=1}^\infty$ liczb naturalnych, szereg $\sum_n v_{i_n}$ jest zbieżny.

e) Dla każdych $\varepsilon_n = \pm 1$, szereg $\sum_{n=1}^\infty \varepsilon_n v_n$ jest zbieżny.

3 Istnienie rzutu ortogonalnego i przestrzeń sprzężona do hilbertowskiej

Definicja. **Bazą ortonormalną** (odp. **ortogonalną**) przestrzeni Hilberta H nazywamy każdy ortonormalny (odp. ortogonalny) układ wektorów, liniowo gęsty w H. [11]

Twierdzenie 1. *Dla ortonormalnego układu* $(u_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ *wektorów przestrzeni Hilberta* H, *równoważne są warunki:*

a) układ ten jest liniowo gęsty w H *(tzn. jest bazą ortonormalną w* H*);*

b) $v = \sum_{\gamma\in\Gamma} \langle v, u_\gamma\rangle u_\gamma$ *dla każdego wektora* $v \in H$ *(zbieżność jest bezwarunkowa);*

c) jedynym wektorem, ortogonalnym do każdego wektora u_γ $(\gamma \in \Gamma)$, *jest 0.*

[11] Gdy $\dim H = \infty$, to „GALowe" bazy Hamela (tzn. liniowo niezależne układy, rozpinające H) są mało przydatne. Należy podkreślić, że w warunku b) twierdzenia 1, chrakteryzującego bazy o.n., sumowanie jest wtedy nieskończone.

Dowód. Gdy zachodzi a) i $v \in H$, to v jest swym rzutem ortogonalnym na $\overline{\text{lin}}\{u_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma} = H$, więc na podstawie twierdzenia 1 w p.2 zachodzi b). Zaś gdy zachodzi b) i $v \perp \{u_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$, to $v = \sum_\gamma 0u_\gamma = 0$, tzn. zachodzi c).

Ad c)$\Rightarrow$ a). Niech $H_0 := \overline{\text{lin}}\{u_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$. Gdy $v \in H$ i przyjąć $h_0 := \sum_{\gamma\in\Gamma}\langle v, u_\gamma\rangle u_\gamma$, to $h_0 \in H_0$ i $v - h_0 \perp H_0$, na podstawie twierdzenia 1 w p.2. Jeśli więc zachodzi c), to $v - h_0 = 0$, tzn. $v \in H_0$ – co wobec dowolności v oznacza prawdziwość a). $\square$

Twierdzenie 2. *W przestrzeni Hilberta H, każdy układ ortonormalny w można rozszerzyć do bazy ortonormalnej. W szczególności, jeśli $H \neq \{0\}$, to istnieją bazy ortonormalne w H.*

Dowód. Na podstawie lematu Kuratowskiego–Zorna, badany układ można rozszerzyć do maksymalnego układu ortonormalnego – a ten spełnia warunek c) twierdzenia 1. $\boxminus$

Wniosek 1. *Dla domkniętej podprzestrzeni H_0 przestrzeni Hilberta H i wektora $v \in H$, istnieje jego rzut ortogonalny na H_0.*

Dowód. Można założyć, że $H_0 \neq \{0\}$. Na podstawie twierdzenia 2 istnieje baza ortonormalna przestrzeni Hilberta H_0, więc pozostaje skorzystać z twierdzenia 1 w p.2.

Wniosek 2. *a) Dla dowolnego podzbioru X przestrzeni Hilberta H, zbiór*

$$X^\perp := \{h \in H : h \perp X\} = \bigcap\{x^\perp : x \in X\} \tag{19}$$

jest domkniętą podprzestrzenią liniową przestrzeni H.

b) (twierdzenie o rozkładzie ortogonalnym). *Dla dowolnej domkniętej podprzestrzeni liniowej H_0 zachodzi $H = H_0 \oplus H_0^\perp$.*

Dowód. a) wystarcza sprawdzić gdy $H_0 = \{x\}$, co nie nastręcza trudności.

Ad b). Zachodzi $H_0 \cap H_0^\perp = \{0\}$, zaś z wniosku 1 wynika, że $H_0 + H_0^\perp = H$. $\boxminus$

Rzut liniowy przestrzeni H na jej domkniętą podprzestrzeń H_0, wzdłuż podprzestrzeni $H_0^\perp$, nazywamy **operatorem rzutu ortogonalnego** H na H_0. Na podstawie stwierdzenia 1a) w p.1, jeśli $H_0 \neq \{0\}$, to rzut ten ma normę 1.

Twierdzenie 3 (Fischera–Frécheta–Riesza)**.** *Gdy $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ jest przestrzenią Hilberta, to:*

1) Każdy element $v \in H$ wyznacza wzorem $\psi_v(h) = \langle h, v\rangle$ funkcjonał $\psi_v \in H^*$, przy czym $\|\psi_v\| = \|v\|$.

2) Zachodzi $\psi_{v+w} = \psi_v + \psi_w$ i $\psi_{\lambda v} = \overline{\lambda}\psi_v$ dla $v, w \in H$ i $\lambda \in \mathbb{F}$.

3) Każdy funkcjonał $\varphi \in H^*$ jest postaci ψ_v, dla $v \in H$ jednoznacznie wyznaczonego przez φ.

Dowód. Części 1) i 2) wynikają z definicji i nierówności CBS. (Zupełność H nie gra roli.) Dla dowodu 3) niech $\varphi \in H^*$. Gdy $\varphi = 0$ przyjmiemy $v = 0$; niech więc $\varphi \neq 0$. Wtedy stosujemy wniosek 2 do domkniętej podprzestrzeni $\ker\varphi \neq H$, uzyskując wektor $u \neq 0$, ortogonalny do $\ker\varphi$. Ponieważ $\ker\psi_u \supset \ker\varphi$, to $\psi_u = \lambda\varphi$ dla pewnego $\lambda \in \mathbb{F}$. (GAL!) A że $\lambda \neq 0$ (bo $\|\psi_u\| = \|u\| \neq 0$), to istnieje $v := \overline{\lambda}^{-1}u$ i $\varphi = \psi_v$. Jedyność w 3) wynika stąd, że gdy $\psi_v = \psi_w$, to $\psi_{v-w} = 0$, skąd $\|v-w\| = 0$. (Patrz 1) i 2).) □

Wniosek 3 (i nazwa). *Wzór $Tv = \psi_v$ $(v \in V)$ wyznacza* **izometrię kanoniczną** *przestrzeni Hilberta H na przestrzeń H^*. Izometria ta jest liniowa gdy $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, zaś* **antyliniowa** *(tzn. spełnia warunek 2) twierdzenia) gdy $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Zatem $(H^*, \|\ \|)$ można iloczynem skalarnym $\langle\varphi, \psi\rangle^* := \langle T^{-1}\psi, T^{-1}\varphi\rangle$ zamienić w przestrzeń Hilberta.* ⊟

4 Liniowa izometryczność przestrzeni Hilberta z przestrzenią $\ell_2(\Gamma)$

Twierdzenie 1 (dalsze własności baz ortonormalnych, por. twierdzenia 1 i 2 w p.3.). *Niech $(u_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ będzie bazą ortonormalną przestrzeni Hilberta H. Wówczas:*

i) Prawdziwa jest **tożsamość Parsevala***: $\sum_\gamma |\langle v, u_\gamma\rangle|^2 = \|v\|^2$ dla $v \in H$.*

ii) Przekształcenie $H \ni v \mapsto (\langle v, u_\gamma\rangle)_{\gamma\in\Gamma}$, przyporządkowujące każdemu wektorowi $v \in H$ układ jego współczynników Fouriera względem $(u_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$, jest poprawnie określoną izometrią liniową przestrzeni H na $\ell_2(\Gamma)$.

iii) $\langle v, w\rangle = \sum_{\gamma\in\Gamma}\langle v, u_\gamma\rangle\overline{\langle w, u_\gamma\rangle}$ dla $v, w \in H$ (zbieżność jest bezwarunkowa).

Dowód. Ad i). Skoro $(u_\gamma)_\gamma$ jest bazą, to tożsamościowo $v = \sum_\gamma\langle v, u_\gamma\rangle u_\gamma$. Pozostaje więc skorzystać z równosci Pitagorasa, patrz wniosek 1 w p.2.

Ad ii). Na podstawie i), rozważane przekształcenie (oznaczmy je przez L) przyjmuje wartości w $\ell_2(\Gamma)$ i spełnia warunek $\|L(v)\|_2 = \|v\|$ dla $v \in H$. A że jest ono liniowe i $L(u_\gamma) = e_\gamma$ dla $\gamma \in \Gamma$, to jest zanurzeniem izometrycznym, którego obraz zawiera zbiór $\{e_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$, liniowo gęsty w $\ell_2(\Gamma)$. Stąd już wynika, że $\mathrm{im}(L) = \ell_2(\Gamma)$; patrz uwaga 2 w §3.1iii).

Ad iii). Ze względu na tożsamości polaryzacyjne, liniowa izometria L zachowuje iloczyn skalarny, tzn. $\langle v, w\rangle = \langle L(v), L(w)\rangle_{\ell_2(\Gamma)}$ dla $v, w \in H$ –co daje iii). □

Wniosek 1 (o izometrycznej reprezentacji przestrzeni Hilberta). *Przestrzeń Hilberta H nad ciałem $\mathbb{F}$ jest liniowo izometryczna z pewną przestrzenią $\ell_2^{\mathbb{F}}(\Gamma)$. Jeśli przestrzeń jest ośrodkowa, to można przyjąć $\Gamma = \mathbb{N}$ (gdy $\dim(H) = \infty$; por. niżej §7.1A) lub $\Gamma = \{1, ..., n\}$ (gdy $\dim(H) = n < \infty$).* ⊟

§ 7. Przykłady baz ortogonalnych i twierdzenie Plancherela

1 Przykłady baz i układów ortogonalnych

A. Każda przestrzeń Hilberta ma bazę ortogonalną – lecz wskazanie jej niekoniecznie jest łatwe. Gdy przestrzeń jest ośrodkowa i znamy układ $(v_n)_{n=1}^{\infty}$, liniowo gęsty w przestrzeni, to bazę możemy utworzyć stosując ortogonalizację Grama–Schmidta. To znaczy, przyjmujemy $u_1 := v_1$ i indukcyjnie $u_n := v_n - w_n$ dla $n > 1$, gdzie w_n jest rzutem ortogonalnym wektora v_n na $\mathrm{lin}(v_1, ..., v_{n-1}) = \mathrm{lin}(u_1, ..., u_{n-1})$, który umiemy wyznaczyć w oparciu o stwierdzenie 1 w §6.1. (Wektory u_n równe 0 pomijamy; pojawią się one, gdy układ $(v_n)_{n=1}^{\infty}$ jest liniowo zależny.) Otrzymamy układ ortogonalny, który jest przeliczalny (skończony jeśli $\dim H < \infty$) i liniowo gęsty (dlaczego?).

B. Niektóre klasyczne konstrukcje prowadzą do opisu bazy jawnymi wzorami.

1. Układy funkcji trygonometrycznych i wykładniczych w $L_2([-\pi, \pi])$.

a). Układ funkcji $\{1/\sqrt{2\pi}\} \cup \{\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nt)\}_{n=1}^{\infty} \cup \{\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nt)\}_{n=1}^{\infty}$ jest bazą ortonormalną w $L_2([-\pi, \pi])$.

b). Układ funkcji $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ jest bazą ortonormalną w $L_2^{\mathbb{C}}([-\pi, \pi])$.

Najłatwiej jest dowieść ortonormalności dla układu b) i wywnioskować ją dla a). Liniową gęstość układu z a) w $\{f \in C^{\mathbb{R}}([-\pi, \pi]) : f(-\pi) = f(\pi)\}$ udowodniono na AM I; z niej zaś wynika liniowa gęstość obu układów w $L_2([-\pi, \pi])$. W a) i niżej, ciałem skalarów może być tak $\mathbb{C}$, jak i $\mathbb{R}$.

c). Z a) wynika, że $\overline{\mathrm{lin}}(\{\cos(nt)\}_{n=0}^{\infty})$ jest zbiorem funkcji parzystych w $L_2([-\pi, \pi])$. Każda taka funkcja jest wyznaczona przez swe obcięcie do $[0, \pi]$, wobec czego $\{\cos(nt)\}_{n=0}^{\infty}$ jest bazą ortogonalną w $L_2([0, \pi])$ –podobnie, jak układ $\{\sin(nt)\}_{n=0}^{\infty}$ (tym razem rozważamy funkcje nieparzyste).

Zadanie 1. Rozwinąć funkcję $t_{|[-\pi,\pi]}$ w szereg Fouriera względem układu $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ i wypisać wynikającą stąd tożsamość Parsevala.

2. Układy Haara i Rademachera.

a) Oznaczmy przez $\mathcal{P}$ rodzinę przedziałów postaci $P = [k/2^n, (k+1)/2^n)$, gdzie $0 \leq k < 2^n$ i $n = 0, 1, \ldots$. Dla każdego przedziału $P = [a, b) \in \mathcal{P}$ oznaczmy przez h_P funkcję równą $(b-a)^{-1/2}$ na $[a, (a+b)/2)$, równą $-(b-a)^{-1/2}$ na $[(a+b)/2, b)$ i równą 0 na $[0, 1] \setminus P$. **Układem Haara** na $[0, 1]$ nazywamy zbiór funkcji $\{1\} \cup \{h_P : P \in \mathcal{P}\}$. Jest on bazą ortonormalną w $L_2([0, 1])$: ortonormalność układu wynika z definicji, a liniowa gęstość stąd, że jego powłoka liniowa zawiera funkcję charakterystyczną każdego przedziału z $\mathcal{P}$. (Szczegóły pozostawione są jako zadanie.)

b) Dla każdej liczby całkowitej $n \geq 0$ przyjmijmy $r_n = \sum_{0 \leq i < 2^n} (-1)^i f_{n,i}$, gdzie $f_{n,0}, \ldots, f_{n,2^n-1}$ to indykatory kolejnych przedziałów z $\mathcal{P}$ o długości 2^{-n} (w kolejności, w jakiej początki przedziałów położone są na osi). Tak więc $r_0 = 1$, zaś np. r_2 jest funkcją, która na przedziałach $[0, 1/4), [1/4, 2/4), [2/4, 3/4), [3/4, 1)$ przyjmuje kolejno wartości $1, -1, 1, -1$. Zbiór funkcji $\{r_n\}_{n=0}^{\infty}$ to **układ Rademachera** na $[0, 1]$. Jest on ortonormalny (co łatwo sprawdzić), lecz nie jest liniowo gęsty w $L_2([0, 1])$ –np. funkcja $f_{2,2} + f_{2,3}$ jest ortogonalna do każdej funkcji układu.

3. Wielomiany Czebyszewa. Z GALu wiemy, że $\cos(nt)$ można wyrazić jako

$T_n(\cos t)$, dla jedynego wielomianu $T_n \in \mathbb{R}[t]$. Jest to n–ty **wielomian Czebyszewa pierwszego rodzaju**. Układ $(T_n)_{n=0}^\infty$ jest bazą ortogonalną przestrzeni Hilberta $H = L_2([-1,1], \mathrm{d}t/\sqrt{1-t^2})$, bo a) $H \ni f \mapsto f \circ \cos \in L_2([0,\pi])$ jest izometrią, i b) przeprowadza ona $(T_n)_{n=0}^\infty$ na bazę $(\cos(nt))_{n=0}^\infty$ przestrzeni $L_2([0,\pi])$.

4. **Wielomiany Legendre'a** otrzymujemy stosując do ciągu $1, t, t^2, \ldots$ ortogonalizację Grama-Schmidta w $L_2([-1,1])$, połączoną z taką „normalizacją" (= mnożeniem przez odpowiednie skalary), która wartość każdego wielomianu w punkcie 1 czyni równą 1. (Norma jest będzie na ogół $\neq 1$.) Patrz zadanie poniżej, a wykresy obejrzeć można pod `http://en.wikipedia.org/wiki/Legendre_polynomials`.

5. **Wielomiany Hermite'a** i **wielomiany Laguerre'a** powstają w wyniku ortogonalizacji Grama-Schmidta, zastosowanej do układu $(t^n)_{n=0}^\infty$ w przestrzeniach $L_2(\mathbb{R}, e^{-t^2}dt)$ i $L_2((0,\infty), e^{-t}dt)$, odpowiednio.Tworzą one bazy ortogonalne odpowiadającej im przestrzeni Hilberta. (Uzasadnienie liniowej gęstości jest pozostawione jako zadanie; por. dalej w p.3 część „Ad b)".)

Zadanie 2. Niech $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}[t]$ będzie ciągiem wielomianów, otrzymanych z ciągu $(t^n)_{n=0}^\infty$ przez ortogonalizację Grama–Schmidta w przestrzeni $L_2([-1,1])$. Dowieść, że:

a) Jeśli $(w_n)_{n=0}^\infty$ jest ciągiem wielomianów, w którym każdy wielomian $w_n (n \geq 1)$ jest w $L_2([-1,1])$ ortogonalny do $\mathrm{lin}(1, t, ..., t^{n-1})$ i jest stopnia n, to każdy wielomian w_n jest proporcjonalny do v_n, tzn. $w_n = c_n v_n$ dla pewnego $c_n \in \mathbb{R}$.

b) Jeśli przez w_n znaczyć n-tą pochodną wielomianu $(t^2-1)^n$, podzieloną przez $2^n n!$, to $w_n(1) = 1$ i układ $(w_n)_{n=0}^\infty$ spełnia warunki z a). Wywnioskować, że w_n jest n-tym wielomianem Legendre'a.

Zadanie 3. Dla σ–skończonych miar μ i ν, niech $(f_\alpha)_{\alpha\in A}$ będzie bazą ortonormalną w $L_2(\mu)$, a $(g_\beta)_{\beta\in B}$ będzie taką bazą w $L_2(\nu)$. Dowieść, że $\mathcal{F} := \{f_\alpha \otimes g_\beta : \alpha \in A, \beta \in B\}$ jest bazą ortonormalną w $L_2(\mu\otimes\nu)$, gdzie $\mu\otimes\nu$ to miara produktowa, zaś $(f_\alpha \otimes g_\beta)(s,t) := f_\alpha(s)\cdot g_\beta(t)$ dla s i t z dziedzin funkcji f_α i g_β, odpowiednio.

2 Transformata Fouriera na $\mathbb{R}^n$ i twierdzenie Plancherela

Poniżej, ustalamy wymiar n przestrzeni $\mathbb{R}^n$ i literami a, b, x, y oznaczamy jej elementy. Dla $x, y \in \mathbb{R}^n$, standardowy iloczyn skalarny $\sum_i x_i y_i$ oznaczamy przez xy. (Przy pierwszym czytaniu można przyjąć $n = 1$; wtedy xy jest „zwykłym" iloczynem.) Przez $(L_p, \|\ \|_p)$ oznaczamy przestrzeń $L_p^{\mathbb{C}}(\mu_n)$, gdzie μ_n to miara Lebesgue'a na $\mathbb{R}^n$. Niech

$$\widehat{f}(y) := \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-\mathrm{i}xy}\, \mathrm{d}x \qquad \text{dla } f \in L_1 \text{ i } y \in \mathbb{R}^n. \tag{20}$$

Całka po prawej istnieje, bo $f \in L_1$ i $|e^{-\mathrm{i}xy}| = 1$. Funkcję $\widehat{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ oznaczamy też przez Ff, a przyporządkowanie $f \mapsto Ff$ nazwiemy **transformatą Fouriera** na $\mathbb{R}^n$.

Twierdzenie 1 (Plancherela dla $\mathbb{R}^n$). *Zachodzi $\widehat{f} \in L_2$ dla $f \in L_1 \cap L_2$. Istnieje też jednoznacznie wyznaczona (surjektywna) izometria liniowa $F_2 : L_2 \to L_2$ taka, że $F_2(f) = \widehat{f}$ dla $f \in L_1 \cap L_2$.*

Poniższy dowód wykorzysta następujące własności transformaty Fouriera:

Zadanie 1. a) Dla $f \in L_1$, funkcja $\widehat{f}$ jest ciągła i $\|\widehat{f}\|_\infty \leq (2\pi)^{-n/2}\|f\|_1$.

b) Niech $f \in L_1$ i $a, b \in \mathbb{R}^n$, $\lambda > 0$. Funkcje u, v, w, zdefiniowane wzorami $u(x) = f(\frac{1}{\lambda}x)$, $v(x) = f(x + a)$, $w(x) = e^{ibx}f(x)$, są całkowalne, przy czym

$$\widehat{u}(y) = \lambda^n \widehat{f}(\lambda y), \quad \widehat{v}(y) = e^{\mathrm{i}ay}\widehat{f}(y), \quad \widehat{w}(y) = \widehat{f}(y - b).$$

c) $\overline{Ff} = F(\overline{f} \circ \sigma)$, gdzie $\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ to symetria centralna $\sigma(x) = -x$, a $^-$ to sprzężenie w $\mathbb{C}$. (Nadal, $f \in L_1$.)

Oznaczmy przez γ gęstość rozkładu Gaussa, $\gamma(x) = e^{-x^2/2}$.

Zadanie 2. Dowieść, że $\int \gamma = (2\pi)^{n/2}$ i $\widehat{\gamma} = \gamma$. (Wskazówka: $\int \gamma = C^n$, gdzie $C = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}dx$, więc wystarczy rozważyć przypadek $n = 2$ –a wtedy warto przejść do współrzędnych biegunowych.)

Przyjmijmy dla $a, b \in \mathbb{R}^n$ i $\lambda > 0$:

$$\gamma_{b,\lambda,a}(x) := e^{ibx}\gamma(\lambda(x - a)) \text{ dla } x \in \mathbb{R}^n. \tag{21}$$

Dowód twierdzenia. Niech $\mathcal{P} := \mathrm{lin}_{\mathbb{C}}(\Gamma)$, gdzie Γ oznacza zbiór wszystkich funkcji $\gamma_{b,\lambda,a}$. Wyróżnimy kilka kroków.

1. Zachodzi $\mathcal{P} \subset L_1 \cap L_2$, bo $\gamma \in L_1 \cap L_2$. Dalej, z zadań 1 i 2 wynika, że $F(\gamma_{b,\lambda,a}) = \frac{1}{\lambda^n}\gamma_{a,\frac{1}{\lambda},-b} \in \mathbb{R} \cdot \Gamma$. Tym samym $F^2(\gamma_{b,\lambda,a}) = \gamma_{-b,\lambda,-a} = \gamma_{b,\lambda,a} \circ \sigma$, gdzie σ to symetria centralna: $\sigma(x) = -x$ dla $x \in \mathbb{R}^n$. (Gra rolę to, że $\gamma \circ \sigma = \gamma$.)

2. Dla $f \in \mathcal{P}$ zachodzi więc $Ff \in \mathcal{P}$ i $F^2 f = f \circ \sigma$. Stąd $F^4 f = f$ i $F(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$.

3. Gdy $f, g, Ff, Fg \in L_1$, to $\int (Ff) \cdot g = \int f \cdot Fg$. (Równosć i istnienie całek wynika z definicji transformaty F i twierdzeń Tonelliego i Fubiniego.)

4. Gdy $f \in \mathcal{P}$, to $F(\overline{Ff}) = \overline{f}$. Istotnie, $F(\overline{Ff}) = F(F(\overline{f} \circ \sigma)) = (\overline{f} \circ \sigma) \circ \sigma = \overline{f}$. (Korzystamy z zadania 1c), z 2 i z tego, że $\overline{f} \circ \sigma \in \mathcal{P}$ dla $f \in \mathcal{P}$.)

5. Dla $f, g \in \mathcal{P}$ zachodzi $\langle Ff, Fg\rangle_{L_2} = \langle f, g\rangle_{L_2}$. Z 3 i 4 wynika bowiem, że:

$$\langle Ff, Fg\rangle = \int Ff \cdot \overline{Fg} = \int f \cdot F(\overline{Fg}) = \int f\overline{g} = \langle f, g\rangle.$$

6. Ponieważ, na podstawie poniższego lematu, zbiór $\mathcal{P}$ jest gęsty w $(L_2, \| \ \|_2)$, to izometryczne zanurzenie liniowe $F_{|\mathcal{P}} : \mathcal{P} \to L_2$ przedłuża się do izometrycznego zanurzenia liniowego $F_2 : L_2 \to L_2$. Jego obraz jest domknięty w L_2 (bo jest izometryczny z przestrzenią zupełną) i gęsty w L_2 (bo $F_2(\mathcal{P}) = F(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$). Zatem $F_2(L_2) = L_2$.

7. Gdy $f \in L_1 \cap L_2$, to istnieje taki ciąg $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathcal{P}$, że $\|f - f_k\|_p \to 0$ dla $p = 1, 2$. (Znów korzystamy z lematu.) Wtedy $\|F_2 f - F f_k\|_2 = \|F_2 f - F_2 f_k\|_2 = \|f - f_k\|_2 \to 0$ i $\lim_n \|Ff - Ff_k\|_{\sup} = 0$, na podstawie zadania 1a). Stąd $Ff = F_2 f$, bo na każdej kuli $B \subset \mathbb{R}^n$ zachodzi $\|(Ff_k - F_2 f)_{|B}\|_2 \to 0$ i $\|(Ff_k - Ff)_{|B}\|_2 \to 0$. $\square$

Lemat 1 (wykorzystany w krokach 6 i 7; dowód w „Dodatku" do §7)**.** *Zbiór $\mathcal{P}$ jest gęsty w każdej z następujących przestrzeni:*
a) w $(C_0(\mathbb{R}^n), \| \|_\infty)$, b) w $(L_1 \cap L_2, \| \|_1 + \| \|_2)$, c) w $(L_p, \| \|_p)$, dla $p = 1$ i dla $p = 2$.

Uwaga 1. a) Tożsamości z kroków 2, 3, 4 i zadania 1 b),c), czy $F(f \circ \sigma) \equiv (Ff) \circ \sigma$, pozostają prawdziwe przy F zastąpionym przez F_2, zaś $f, g \in L_2$. Jest tak, bo obie strony tożsamości dla F_2 są ciągłymi funkcjami swych argumentów, równymi – co już wiemy – na zbiorze gęstym (którym jest $\mathcal{P}$ lub $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$, odowiednio).

b) Z $F_2^2 f \equiv f \circ \sigma$ i $F_2(g \circ \sigma) \equiv (F_2 g) \circ \sigma$ uzyskujemy wzór na **odwrotną transformatę Fouriera–Plancherela**: $f = F_2^2(f \circ \sigma)$, czy $F_2^{-1} f = F_2(f \circ \sigma)$. Stąd zaś

$$\text{gdy } f \in L_1 \cap L_2 \ \text{ i } \ \widehat{f} \in L_1, \text{ to } f = \widehat{g} \ \text{ p.w. dla } g := \widehat{f} \circ \sigma\ ,$$

przy czym jawny wzór na g to $g(y) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{\mathbf{i}xy}\, dx$ dla $y \in \mathbb{R}^n$. (Jeśli funkcja f jest ciągła, to równość $\widehat{g} = f$ zachodzi wszędzie, bo funkcja $\widehat{g}$ też jest ciągła.) Założenie, że $f \in L_1 \cap L_2$, można osłabić do $f \in L_1$; patrz zadanie poniżej.

Uwaga 2. a) Choć $\widehat{f}$ jest dla $f \in L_1$ poprawnie określoną funkcją, to $F_2 f$ jest dla $f \in L_2$ tylko klasą funkcji równych p.w. (Nie można więc mówić o wartości $F_2 f$ w ustalonym punkcie.)

b) Dla $f \in L_2 \setminus L_1$ całka we wzorze (20) może nie być określona, i wtedy wzór ten nie posłuży do określenia $F_2 f$. Tym niemniej, $F_2 f = \lim_{r\to\infty} F(f \cdot 1_{B_r})$, gdzie $B_r = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < r\}$, zaś granica jest w normie przestrzeni L_2. (Zbieżność p.w. nie musi zachodzić.) Jest tak, bo $\lim_{r\to\infty} \|f - f \cdot 1_{B_r}\|_2 = 0$ i $f \cdot 1_{B_r} \in L_1 \cap L_2$ dla $f \in L_2$, skąd $\|F_2 f - F(f \cdot 1_{B_r})\|_2 = \|F_2 f - F_2(f \cdot 1_{B_r})\|_2 = \|f - f \cdot 1_{B_r}\|_2 \to 0$ gdy $r \to \infty$. Podobnie, $F_2^{-1} f = \lim_{r\to\infty} F(f \cdot 1_{B_r}) \circ \sigma$ (zbieżność w L_2).

Zadania uzupełniające.

1. Wyrazić $F(1_{[-1,1]})$ przez funkcję $g(y) := \sin(y)/y$ i wyznaczyć $\int_{\mathbb{R}} g^2$.

2. Dowieść, że gdy $f \in L_1$ i $\widehat{f} \in L_1$, to $F\widehat{f} = f \circ \sigma$ p.w., skąd $f = F(\widehat{f} \circ \sigma)$ p.w. (Wskazówka: dla $g \in L_1 \cap L_2$ mamy, patrz krok 3 i uwaga 1: $\int g \cdot F\widehat{f} = \int F^2 g \cdot f = \int (g \circ \sigma) \cdot f = \int g \cdot (f \circ \sigma)$, skąd $\int 1_K \cdot (F\widehat{f} - f \circ \sigma) = 0$ dla zwartych $K \subset \mathbb{R}^n$.)

2. Funkcje Hermite'a $h_0, h_1, \ldots$ otrzymujemy stosując w $L_2 = L_2^{\mathbb{C}}(\mathbb{R}, dt)$ ortogonalizację Grama–Schmidta do ciągu $\gamma, x\gamma, x^2\gamma, \ldots$. Dowieść, że i) $(h_n)_{n=0}^\infty$ jest bazą ortogonalną przestrzeni L_2, oraz ii) $F_2 f = \sum_n (-\mathbf{i})^n \langle f, h_n\rangle h_n / \|h_n\|^2$ dla $f \in L_2$.
Wskazówka: dowieść kolejno, że:

a) Gdy $f \in L_2$ lub $f(x) = x^n$ dla pewnego $n \geq 0$, to $f\gamma \in L_1 \cap L_2$.

b) $F(f\gamma)(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\mathbf{i}t)^n}{n!} \int_{\mathbb{R}} f(x)x^n\gamma(x)dx$ dla $f \in L_2$. Wywnioskować, że $\{\gamma, x\gamma, x^2\gamma, ...\}^{\perp} = \{0\}$, tzn. zachodzi i).

c) $F(x^n\gamma) = \mathbf{i}^n\gamma^{(n)}$ dla $n \geq 0$, więc podprzestrzeń $\mathrm{lin}(h_0, ..., h_n)$ jest F_2–niezmiennicza.

d) Wywnioskować, że $F_2 h_n = (-\mathbf{i})^n h_n$ i uzyskać **wzór Wienera** ii).

3 Dodatek: dowód lematu z p.2

Ad a). Nietrudno zauważyć, że $\Gamma \subset C_0(\mathbb{R}^n)$ i zbiór $\mathbb{C} \cdot \Gamma$ jest zamknięty względem mnożenia funkcji. $\mathcal{P}$ jest więc podprzestrzenią liniową przestrzeni $C_0(\mathbb{R}^n)$, zamkniętą względem mnożenia i operacji sprzęgania zespolonego (bo Γ ma ostatnią własność). Ponadto, dla różnych $a, b \in \mathbb{R}^n$ istnieje taka funkcja $f \in \mathcal{P}$, że $f(a) \neq f(b)$ (jest nią $f(x) = \gamma(x - a)$). Teza a) lematu wynika więc z twierdzenia Stone'a–Weierstrassa, orzekającego, że zbiór o tych własnościach musi być gęsty w $C_0(\mathbb{R}^n)$.

Ad b). Przyjmijmy $\|u\| := \|u\|_1 + \|u\|_2$ dla $u \in L_1 \cap L_2$. Należy dowieść, że gdy $\varepsilon \in (0, 1)$ i $f \in L_1 \cap L_2$ są dane, to $\|f - g\| < 2\varepsilon$ dla pewnej funkcji $g \in \mathcal{P}$. W tym celu zauważmy, że na podstawie zadania 1ii) w §4.3 istnieje taka funkcja $w \in C_c(\mathbb{R}^n)$, że $\|f - w\| < \varepsilon$. Korzystając z a) możemy też znaleźć taką funkcję $h \in \mathcal{P}$, że $\|(w/\gamma) - h\|_\infty < \varepsilon/\|\gamma\|$. Wówczas $|w - \gamma h| < \varepsilon\gamma/\|\gamma\|$, skąd $\|w - \gamma h\| < \varepsilon$ i ostatecznie $\|f - \gamma h\| < 2\varepsilon$, gdzie $\gamma h \in \mathcal{P}$ (bo $h, \gamma \in \mathcal{P}$).

Ad c). Teza wynika stąd, że zbiór $\mathcal{P}$ jest gęsty w $(L_1 \cap L_2, \| \ \|_p)$, na podstawie b), a $L_1 \cap L_2$ jest gęsty w $(L_p, \| \ \|_p)$. (Porównaj zadanie 1i) w §4.3.) $\square$

§ 8. Sprzężenie operatora

1 Sprzężenie „banachowskie" i zanurzenie w drugą sprzężoną

Niżej, przez U, V, W oznaczamy przestrzenie unormowane. Przypomnijmy, że **przestrzenią sprzężoną** lub **dualną** do V nazywamy przestrzeń Banacha $V^* = \mathcal{L}(V, \mathbb{F})$ wszystkich ograniczonych funkcjonałów na V, rozpatrywaną z normą operatorową.

Dla $T \in \mathcal{L}(V, W)$ definiujemy operator $T^* : W^* \to V^*$ wzorem

$$T^*(\psi) = \psi \circ T \text{ dla } \psi \in W^* \tag{22}$$

Nazywamy go **operatorem sprzężonym** (banachowsko) do T.

Przykład 1. a) Gdy V jest podprzestrzenią liniową przestrzeni W, to operatorem sprzężonym do inkluzji $J : V \hookrightarrow W$ jest operator obcięcia $W^* \ni \psi \mapsto \psi_{|V} \in V^*$. Na podstawie tw. Hahna–Banacha przeprowadza on kulę jednostkową w W^* na kulę jednostkową w V^*. Jest on więc otwarty i „na"; ponadto, $\ker(J^*) = \{\psi \in W^* : \psi_{|V} = 0\} \cong (W/\overline{V})^*$, gdzie $\cong$ to izometryczność. (Patrz w §3.1 zadanie 1c).)

b) Gdy $P : V \to V/V_0$ jest rzutowaniem na przestrzeń ilorazową (zakładamy domkniętość V_0 w V), to P^* jest zanurzeniem izometrycznym. (Istotnie, P przekształca kulę B_V na kulę B_{V/V_0}, skąd $\|P^*(\psi)\| = \|\psi\|$ dla każdego funkcjonału $\psi \in (V/V_0)^*$.) Ponadto, $\mathrm{im}(P^*) = \{\varphi \in V^* : \varphi_{|V_0} = 0\} \cong (V/V_0)^*$ (ponownie patrz zad. 1c) w §3.1).

Stwierdzenie 1 (o podstawowych własnościach sprzężenia)**.** *Przyporządkowanie $T \mapsto T^*$ jest liniowym włożeniem izometrycznym przestrzeni $\mathcal{L}(V,W)$ w $\mathcal{L}(W^*,V^*)$, tzn.:*

$$(\lambda S + T)^* = \lambda S^* + T^* \quad \text{ i } \quad \|T^*\| = \|T\| \text{ dla } S, T \in \mathcal{L}(V,W), \lambda \in \mathbb{F}.$$

Ponadto:

$$(T \circ L)^* = L^* \circ T^* \text{ dla } L \in \mathcal{L}(U,V) \text{ i } T \in \mathcal{L}(V,W).$$

W szczególności, jeśli T jest izomorfizmem, to jest nim T^* i $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

Dowód. Mamy $\|T^*\| = \sup_{\|\psi\|\le 1} \|T^*\psi\| = \sup_{\|\psi\|\le 1} \|\psi \circ T\| = \sup_{\|\psi\|\le 1} \sup_{\|x\|\le 1} |(\psi \circ T)(x)| = \sup_{\|x\|\le 1} \sup_{\|\psi\|\le 1} |\psi(Tx)| = \sup_{\|x\|\le 1} \|Tx\| = \|T\|$, gdzie przedostatnia równość wynika z wniosku 1 w §1.4 i nierówności $|\psi(Tx)| \le \|\psi\| \cdot \|Tx\|$.

Zatem $\|T^*\| = \|T\|$, a pozostałe części tezy nie sprawiają kłopotu. $\boxminus$

Zadanie 1. Niech $T \in \mathcal{L}(V,W)$. Dowieść, że:
a) (Obraz T jest gęsty w W) $\Leftrightarrow$ ($\ker(T^*) = \{0\}$).
b) Jeśli T jest zanurzeniem, to T^* jest „na" (więc i otwarte, z zasady otwartości i zupełności V^* i W^*).
c) Jeśli przekształcenie T jest niemal otwarte [12], to T^* jest zanurzeniem.
d) $\ker(T^*) = \{\psi \in W^* : \psi_{|\mathrm{im}(T)} = 0\} \cong (W/\overline{\mathrm{im}}(T))^*$, gdzie $\cong$ to izometryczność.

Operację sprzęgania przestrzeni i operatorów można iterować, tworząc ciągi przestrzeni $V, V^*, V^{**} := (V^*)^*, \ldots$ i operatorów $T, T^*, T^{**} := (T^*)^*, \ldots$. **Kanoniczne włożenie** $J_V : V \to V^{**}$ określamy przez zdefiniowanie dla $v \in V$ funkcjonałów $J_V(v)$ na przestrzeni V^* następująco:

$$J_V(v)(\varphi) = \varphi(v) \text{ dla } \varphi \in V^*. \tag{23}$$

Stwierdzenie 2. *$J_V : V \to V^{**}$ jest liniowym zanurzeniem izometrycznym.* $\boxminus$

Uwaga 1. Z dokładnością do (kanonicznego) zanurzenia izometrycznego, możemy więc zawsze traktować V jako podprzestrzeń liniową przestrzeni V^{**}. Gdy V jest przestrzenią Banacha, to jej obraz w V^{**} jest domknięty, bo jest izometryczny z przestrzenią zupełną.

Wniosek 1 (o uzupełnianiu przestrzeni unormowanych)**.** *Każdą przestrzeń unormowaną V można zanurzyć liniowo–izometrycznie jako gęstą podprzestrzeń przestrzeni Banacha. (Za tę ostatnią można obrać domknięcie zbioru $\mathrm{im}(J_V)$ w V^{**}.)* $\square$

[12] Definicja i związek z innymi warunkami są w §5.2. (Patrz lematy 1 i 2).

Stwierdzenie 3. *Dla $T \in \mathcal{L}(V,W)$ zachodzi $T^{**} \circ J_V = J_W \circ T$ (równoważnie: ${T^{**}}_{|V} = T$, gdy traktować V i W jako zanurzone w V^{**} i W^{**}, odpowiednio).*

Dowód. Na podstawie przyjętych definicji, dla $\psi \in W^*$ i $v \in V$ zachodzi:

$$T^{**}(J_V(v))(\psi) = J_V(v) \circ T^*(\psi) = T^*(\psi)(v) = \psi(Tv) = J_W(Tv)(\psi). \qquad \square$$

Oto typowe zastosowanie tego stwierdzenia (będzie ich więcej):

Wniosek 2. *Przy oznaczeniach zadania 1, ma miejsce implikacja odwrotna do b).*

Dowód. Gdy operator T^* jest „na", to jest otwarty na podstawie zasady otwartości i zupełności V^* i W^*. Stąd T^{**} jest zanurzeniem, patrz c), więc $T = T^{**}_{|V}$ też nim jest. $\square$

Zadanie 2. * Udowodnić, że złożenie $(J_V)^* \circ J_{V^*}$ jest identycznością na V^*, gdzie $J_V : V \to V^{**}$ i $J_{V^*} : V^* \to V^{***}$ to zanurzenia kanoniczne.

Definicja. Przestrzeń unormowaną V nazywamy **refleksywną**, gdy kanoniczne zanurzenie izometryczne $J_V : V \to V^{**}$ jest „na".

Uwaga 2. a) Przestrzeń refleksywna jest zupełna, bo przestrzeń $V^{**} = (V^*)^*$ jest zupełna, a zupełność jest zachowywana przez izomorfizmy. (Patrz ii) i iii) w §3.1.)

b) Przestrzeń refleksywna V jest izometryczna z V^{**}, lecz implikacja odwrotna nie ma miejsca. Odpowiedni przykład jest znany pod nazwą „przestrzeni Jamesa".

c) Przykładem nierefleksywnej przestrzeni Banacha jest c_0, bo $c_0^* \cong \ell_1$, $\ell_1^* \cong \ell_\infty$, a nieośrodkowa przestrzeń ℓ_∞ nie jest izomorficzna z c_0. Z twierdzenia 1 wyniknie więc, że przestrzenie $\ell_1, \ell_\infty, \ell_\infty^*, \ldots$ też są nierefleksywne.

d) Gdy $\dim V < \infty$, to przestrzeń V jest refleksywna, bo $\dim V = \dim V^{**}$.

e) Refleksywne są też przestrzenie $L_p = L_p(\mu)$, dla $p \in (1, \infty)$. Istotnie, przy q obranym tak, by $p^{-1} + q^{-1} = 1$ i utożsamieniu L_p^* z L_q, a L_q^* z L_p, zgodnie z twierdzeniem 2 z §4.1, działanie na L_q elementu $f \in L_q^* = L_p$ dane jest wzorem $L_q \ni g \mapsto \int fg d\mu$. Tak samo jednak działa element $J_{L_p}(f) \in L_q^* = L_p$, zgodnie z definicjami zanurzenia J_{L_p} i utożsamienia elementów przestrzeni L_q z funkcjonałami na L_p. Tak więc J_{L_p} jest „na", bo (przy tych utożsamieniach) $f = J_{L_p}(f)$ dla $f \in L_p$.

Twierdzenie 1. * *a) Przestrzeń Banacha wtedy i tylko wtedy jest refleksywna, gdy refleksywna jest jej sprzężona.*

b) Wraz z daną przestrzenią, refleksywna jest też każda jej domknięta podprzestrzeń i każdy jej obraz przy ciągłym i otwartym przekształceniu liniowym.

Dowód. * i). Z równości $(J_V)^* \circ J_{V^*} = I_{V^*}$ z zadania 2b) wynika, że J_{V^*} jest izomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy jest nim $(J_V)^*$. To ostatnie zaś ma na podstawie zadania 1b) miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy J_V jest izomorfizmem. Stąd wynika a).

ii) Niech teraz przestrzeń V będzie refleksywna, a podprzestrzeń $W \subset V$ domknięta. Element $\Psi \in W^{**}$ wyznacza $\Phi \in V^{**}$ wzorem $\Phi(\varphi) = \Psi(\varphi_{|W})$ dla $\varphi \in V^*$. Wobec refleksywności V, dla pewnego $v \in V$ i wszystkich $\varphi \in V^*$ zachodzi więc $\Phi(\varphi_{|W}) = \varphi(v)$.

Jeśliby $v \notin W$, to na podstawie twierdzenia o oddzielaniu istniałby taki funkcjonał $\varphi \in V^*$, że $\varphi(v) = 1$ i $\varphi_{|W} = 0$, wbrew poprzedniej równości. Stąd $v \in W$; a że każdy funkcjonał $\psi \in W^*$ ma pewne przedłużenie $\varphi \in V^*$, więc z tejże równości wnosimy, że $\Psi(\psi) = \psi(v)$ dla $\psi \in W^*$. Wobec dowolności $\Psi \in W^{**}$ dowodzi to refleksywności W.

iii) Gdy operator $T \in \mathcal{L}(V, W)$ jest otwarty, to $T^* : W^* \to V^*$ jest zanurzeniem na podstawie zadania 1c). Gdy więc przestrzeń V jest refleksywna to stosując kolejno i), ii) i i) uzyskujemy refleksywność $V^*, T^*(W^*)$ (a więc i W^*) i W. □

Zadanie 3. Niech $V = X \oplus Y$ i $P : V \to X$ będzie rzutowaniem na X wzdłuż Y. Dowieść, że $\varphi \mapsto (\varphi_{|X}, \varphi_{|Y})$ jest izomorfizmem V^* na $X^* \oplus Y^*$, przy którym operatorowi $P^* : X^* \to V^*$ odpowiada włożenie $X^* = X^* \times \{0\} \hookrightarrow X^* \oplus Y^*$. Wywnioskować, że $V^*/\mathrm{im}(P^*) \cong Y^*$.

Zadanie 4. a) Dowieść implikacji odwrotnej do c) w zadaniu 1.

b) Niech $T \in \mathcal{L}(V, W)$, gdzie V i W są przestrzeniami Banacha. Wywnioskować z wcześniejszych rezultatów, że T izomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy jest nim T^*.

c)* Przy założeniu z b) dowieść, że gdy któryś z operatorów T i T^* ma domknięty obraz, to drugi też. (Wskazówka: przy $J : \overline{T(V)} \hookrightarrow W$ oznaczającym włożenie napisać $T = JS$; w oparciu o przykład 1a) i zadanie 1a) zauważyć, że $\mathrm{im}(T^*) = \mathrm{im}(S^*)$ i S^* jest 1-1, więc z twierdzenia Banacha o izomorfiźmie S^* ma domknięty obraz wtedy i tylko wtedy, gdy jest izomorfizmem. Skorzystać z b).)

2 Sprzężenie hermitowskie

Stwierdzenie 1. *Gdy $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$, gdzie $(H_1, \langle\ \rangle_1)$ i $H_2, \langle\ \rangle_2)$ są przestrzeniami Hilberta, to każdemu wektorowi $w \in H_2$ odpowiada jedyny wektor $T^h(w) \in H_1$ taki, że*

$$\langle T(v), w\rangle_2 = \langle v, T^h(w)\rangle_1 \quad \textit{dla każdego wektora} \quad v \in H_1 \ . \tag{24}$$

Dowód. Wynika to stąd, że przy ustalonym $w \in H_2$, lewa strona jest funkcjonałem ograniczonym na przestrzeni H_1. Zgodnie z twierdzeniem 3 w §6.3, jest to mnożenie skalarne przez jednoznacznie wyznaczony wektor, który przyjmujemy za $T^h(w)$. □

Definicja. Wyznaczone powyższym stwierdzeniem przekształcenie $T^h : H_2 \to H_1$ nazywamy **hermitowskim sprzężeniem operatora** $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. [13]

Przykład 1. Gdy rzutowanie ortogonalne P przestrzeni Hilberta na jej domkniętą podprzestrzeń H_0 traktować jako operator z H w H_0, to jego sprzężeniem hermitowskim jest włożenie $H_0 \hookrightarrow H$; gdy zaś traktować P jako operator z H w H, to $P^h = P$.

Stwierdzenie 2 (podstawowe własności sprzężenia hermitowskiego)**.** *Zachodzi:*

[13] Ta nazwa i oznaczenie T^h nie są jedynymi stosowanymi. Tak „hermitowskie", jak i „banachowskie" sprzężenie operatora T często oznaczane jest przez T^*; niekiedy zaś pisze się T^* w miejsce T^h, a $T^\#$ czy T' czy T^t w miejsce T^*.

a) $T^* \circ R_2 = R_1 \circ T^h$*, gdzie* $T^* : H_2^* \to H_1^*$ *to sprzężenie operatora* T*, rozpatrywane w p.1, zaś* $R_i : H_i \to H_i^*$ *oznacza kanoniczną izometrię (*$i = 1, 2$*).*

b) operator T^h *jest liniowy i mają miejsce równości* $(T^h)^h = T$ *i* $\|T^h\| = \|T\|$*, a także* $(\lambda S + T)^h = \overline{\lambda} S^h + T^h$ *i* $(T \circ L)^h = L^h \circ T^h$*. (Tu* $S, T \in \mathcal{L}(H_1, H_2), \lambda \in \mathbb{F}$ *i* $L \in \mathcal{L}(H_0, H_1)$*, gdzie* H_0 *też jest przestrzenią Hilberta).*

c) Stąd gdy T *jest izomorfizmem, to jest nim też* T^h *i* $(T^h)^{-1} = (T^{-1})^h$*.*

Dowód. Ad a) Wykażemy, że dla dowolnych $w \in H_2$ i $v \in H_1$ funkcjonały $T^*(R_2(w))$ i $R_1(T^h(w))$ przyjmują na wektorze v tę samą wartość. Jednak $R_2(w) = \psi_w$ (oznaczenia z twierdzenia 3 w §6.3), więc $T^*(R_2(w)) = \psi_w \circ T$ i dalej $T^*(R_2(w))(v) = \psi_w(T(v)) = \langle T(v), w\rangle = \langle v, T^h(w)\rangle$. Podobnie $R_1(T^h(w))(v) = \psi_{T^h(w)}(v) = \langle v, T^h(w)\rangle$.

Ad b) i c). Ponieważ $T^h = R_1^{-1} \circ T^* \circ R_2$, gdzie $\|T^*\| = \|T\|$ i R_1 i R_2 są izometriami, to $\|T^h\| = \|T\|$. Pozostałe tezy wynikają łatwo z definicji i tego, że tożsamość $\langle T(v), w\rangle_2 = \langle v, T^h(w)\rangle_1$ wyznacza T^h, a też zaświadcza (po zespolonym sprzęgnięciu obu stron), że T spełnia analogiczną tożsamość definiującą $(T^h)^h$. □

Zadanie 1. Niech $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$, gdzie H_1 i H_2 to przestrzenie Hilberta. Dowieść, że:

a) $\ker(T^h) = (\mathrm{im}(T))^\perp$ i $(\ker(T^h))^\perp = \overline{\mathrm{im}}(T)$.

b) T jest zanurzeniem izometrycznym (odp. izometrią) wtedy i tylko wtedy, gdy $T^h T = I$ (odp. $T^h = T^{-1}$). W szczególności jeśli T jest izometrią, to T^h też nią jest.

c)* $\|T\|^2 = \|TT^h\| = \|T^h T\|$.

d) Gdy $H_1 = H_2$, to $(T^2 = T = T^h) \Leftrightarrow (T$ jest rzutowaniem ortogonalnym$)$.

Zadanie 2. (Hellinger i Toeplitz) Operatory liniowe $K, L : H \to H$ na przestrzeni Hilberta H spełniają warunek $\langle Kx, y\rangle = \langle x, Ly\rangle$ dla każdych $x, y \in H$. Dowieść, że są one ciągłe. (Wskazówka: twierdzenie o wykresie domkniętym.)

Zadanie 3. a) Niech $(v_\alpha)_\alpha$ i $(w_\beta)_\beta$ będą bazami ortonormalnymi przestrzeni Hilberta H i niech $T \in \mathcal{L}(H, H)$. Przekształcając liczbę $\sum_\alpha \sum_\beta |\langle Tv_\alpha, w_\beta\rangle|^2$ przy pomocy tożsamości Parsevala dowieść, że jest ona równa tak $\sum_\alpha \|Tv_\alpha\|^2$, jak i $\sum_\beta \|T^h w_\beta\|^2$. Wywnioskować, że liczba $\|T\|_{HS} := \sqrt{\sum_\alpha \|Tv_\alpha\|^2} \in [0, \infty]$ nie zależy od bazy (v_α), i że $\|T\|_{HS} = \|T^h\|_{HS}$. Dowieść też, że $\|T\| \le \|T\|_{HS}$.

Zadanie 4. Niech miara μ będzie σ–skończona i $K : L_2(\mu) \to L_2(\mu)$ będzie **operatorem całkowym z jądrem** $k \in L_2(\mu \otimes \mu)$, tzn. niech $(Kf)(s) := \int k(s,t) f(t) d\mu(t)$ dla $f \in L_2(\mu)$. Dowieść, że $\|K\|_{HS} = \|k\|_2$. (Wskazówka: obrać w $L_2(\mu)$ bazę o.n. $(f_\alpha)_\alpha$ i wykazać, że jeśli $k = \sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha\beta} \overline{f_\alpha} \otimes f_\beta$, por. zad. 3 w §7.1, to $\langle Kf_\alpha, f_\beta\rangle = c_{\beta\alpha}$.)

Zadanie 5. * Niech $T \in \mathcal{L}(H)$, gdzie przestrzeń Hilberta H jest zespolona. Dowieść, że $T = T^h$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$ dla każdego $x \in H$.

Zadanie 6. * Niech $T \in \mathcal{L}(H)$, gdzie H jest przestrzenią Hilberta nad $\mathbb{R}$. Na kompleksyfikacji $\widetilde{H} = H \times H$ przestrzeni H, zdefiniowanej w zadaniu 2* z §6.1, określmy operator $\widetilde{T}$ wzorem $\widetilde{T}(v,w) := (Tv, Tw)$. Dowieść, że $\|\widetilde{T}\| = \|T\|$ i $\widetilde{T}^{\,h} = \widetilde{T^h}$, jak też, że $\inf_{\|v\|=1}\|Tv\| = \inf_{\|(v,w)\|=1}\|\widetilde{T}(v,w)\|$.

§ 9. Własności spektralne operatorów normalnych

1 Dwa twierdzenia spektralne dla operatorów normalnych (wstępna dyskusja)

Gdy V jest przestrzenią unormowaną, to przez $\mathcal{L}(V)$ oznaczamy zbiór operatorów ograniczonych z V do V. Z operacjami składania i dodawania operatorów, $\mathcal{L}(V)$ jest pierścieniem z jedynką, oznaczaną tu I_V lub I, a też jest unormowaną przestrzenią liniową z normą operatorową; zaś wymienione operacje $\mathcal{L}(V)\times\mathcal{L}(V) \to \mathcal{L}(V)$ są ciągłe. Gdy V jest przestrzenią Hilberta, to określona jest też izometria $T \mapsto T^h$.

Niżej, H, H_1, H_2 to przestrzenie Hilberta nad $\mathbb{F}$. Operator $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ jest:
unitarny, gdy $T^hT = I_{H_1}$ i $TT^h = I_{H_2}$ (por. zadanie 1b) w §8.2);
samosprzężony (inaczej: **hermitowski**), gdy $H_1 = H_2$ i $T = T^h$;
normalny, gdy $H_1 = H_2$ i operatory T i T^h są przemienne (tzn. $T^hT = TT^h$).

Operatory unitarne tworzą zbiór zamknięty względem składania operatorów i brania ich odwrotności, a operatory samosprzężone – zbiór zamknięty względem względem dodawania. Zaś względem sprzęgania hermitowskiego zamknięty jest każdy z tych zbiorów. Tak operatory unitarne z H w H, jak i samosprzężone, są normalne.

Zadanie 1. Niech operatory $S, T \in \mathcal{L}(H)$ będą normalne. Dowieść, że jeśli $TS^h = S^hT$ lub $TS^h = T^hS$, to operator $S+T$ jest normalny. Wywnioskować normalność $\sum_{i=0}^n c_iT^i$, dla $\{c_i\}_{i=0}^n \subset \mathbb{F}$.

Zadanie 2. Dla $u \in L_\infty(\mu)$ oznaczmy przez $M_u : L_2(\mu) \to L_2(\mu)$ **operator mnożenia przez** u, dany wzorem $M_uf = uf$ ($f \in L_2(\mu)$). (Por. przykład 1 w §2.5.) Dowieść, że $M_u \circ M_v = M_{uv}$ i $(M_u)^h = M_{\overline{u}}$, wobec czego operator M_u jest normalny, a jego samosprzężoność jest równoważna temu, by $u(t) \in \mathbb{R}$ dla μ–p.w. argumentów t.

Ważny przykład operatorów samosprzężonych stanowią rzutowania ortogonalne (zadanie 1c) w §8.2).

Definicja. Operatory $T_1 \in \mathcal{L}(H_1)$ i $T_2 \in \mathcal{L}(H_2)$ nazwiemy **unitarnie podobnymi**, jeśli istnieje taki operator unitarny $U : H_1 \to H_2$, że $UT_1 = T_2U$.

Relacja ta jest symetryczna i przechodnia (dlaczego?). Zachowuje ona wiele własności operatorów, por. dalej zadanie 3.

Przykład 1. Niech dla operatora $T \in \mathcal{L}(H)$ istnieje baza ortonormalna $(u_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ przestrzeni H, złożona z jego wektorów własnych: $Tu_\gamma = \lambda_\gamma u_\gamma$, gdzie $\lambda_\gamma \in \mathbb{F}$. Oznaczmy przez $U : H \to \ell_2(\Gamma)$ „izometrię Fouriera" dla bazy (u_γ), daną wzorem $Uv = (\langle v, u_\gamma\rangle)_{\gamma\in\Gamma}$, a przez $S \in \mathcal{L}(\ell_2(\Gamma))$ operator mnożenia przez (λ_γ), dany wzorem $S(x) := (\lambda_\gamma x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$. (Jest on poprawnie określony i ciągły, bo $\sup_\gamma|\lambda_\gamma| \le \|T\| < \infty$.) Wówczas $UT = SU$, bo operatory UT i SU są ciągłe i dla wszystkich x z liniowo gęstego zbioru $\{u_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ zachodzi równość $UTx = SUx$. (Czy tak?)

Gdy $\dim H = n < \infty$ i operator $T \in \mathcal{L}(H)$ jest samosprzężony, to żądana baza istnieje (GAL!) – skąd operator T jest unitarnie podobny do operatora mnożenia na przestrzeni $\ell_2(\{1, ..., n\})$. W poniższym twierdzeniu 1 i w §11.5 (por. §11.7) rozszerzymy to na dwa sposoby na przypadek, gdy $\dim H = \infty$.

Twierdzenie 1 (o reprezentacji spektralnej operatorów normalnych)**.** *A) Operator samosprzężony na przestrzeni Hilberta $H \neq \{0\}$ nad $\mathbb{F}$, jest unitarnie podobny do operatora mnożenia M_u na $L_2^{\mathbb{F}}(\mu)$, dla pewnej miary μ i pewnej funkcji $u \in L_\infty^{\mathbb{R}}(\mu)$. Od miary μ można żądać, by każdy zbiór miary ∞ zawierał zbiór skończonej miary dodatniej, zaś gdy przestrzeń H jest ośrodkowa – by miara μ była σ– skończona.*[14]

B) Gdy $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, to tak samo jest dla operatorów normalnych (lecz $u \in L_\infty^{\mathbb{C}}(\mu)$).

Przypomnijmy, że gdy X jest przestrzenią topologiczną, to funkcję $f : X \to \mathbb{F}$ nazywamy **borelowską**, jeśli dla każdego zbioru otwartego $G \subset \mathbb{F}$, zbiór $f^{-1}(G)$ jest borelowski w X – czyli należy do najmniejszego σ–ciała zbiorów, zawierającego wszystkie zbiory otwarte w X. Zbiór wszystkich ograniczonych funkcji borelowskich z X w $\mathbb{F}$ oznaczamy tu przez $B_b(X)$, a wszystkich funkcji ciągłych – przez $C(X)$.

Twierdzenie 2 (o istnieniu borelowskiego rachunku funkcyjnego dla operatorów normalnych)**.** *A) Niech nadal $H \neq \{0\}$ i operator $T \in \mathcal{L}(H)$ będzie samosprzężony. Wówczas istnieje niepusty, zwarty zbiór $\sigma \subset \mathbb{R}$ i przyporządkowanie każdej funkcji $f \in B_b(\sigma)$ operatora $f(T) \in \mathcal{L}(H)$, spełniające poniższe warunki h), n), p):*

h) przekształcenie $f \mapsto f(T)$ jest liniowym homomorfizmem pierścienia $B_b(\sigma)$ w pierścień $\mathcal{L}(H)$, takim, że $(f(T))^h = \overline{f}(T)$ dla wszystkich $f \in B_b(\sigma)$, oraz $1_\sigma(T) = I_H$ i $\mathrm{id}_\sigma(T) = T$. (Tu $\mathrm{id}_\sigma : \sigma \to \mathbb{F}$ to funkcja $\sigma \ni t \mapsto t \in \mathbb{F}$, a 1_σ – stale równa 1; oznaczamy je też przez id i 1);

n) $\|f(T)\| \leq \|f\|_{\sup}$, przy czym jeśli funkcja f jest ciągła, to $\|f(T)\| = \|f\|_{\sup}$.

p) gdy ograniczony (w normie $\| \, \|_{\sup}$) ciąg funkcji $f_n \in B_b(\sigma)$ jest zbieżny punktowo do $f \in B_b(\sigma)$, to ciąg operatorów $f_n(T)$ jest zbieżny punktowo do operatora $f(T)$.

B) Gdy $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, tak samo jest dla operatorów normalnych T, z tym, że $\sigma \subset \mathbb{C}$.

W p), **ciąg funkcji** f_n nazywam **zbieżnym punktowo** do f, gdy $f_n(t) \to f(t)$ dla $t \in \sigma$, a **ciąg operatorów** S_n **zbieżnym punktowo** do operatora S, gdy $\|S_n x - Sx\| \to 0$ dla $x \in H$. (Ta zbieżność operatorów jest nazywana „**silną**”, lecz nie będę tej nazwy stosować.) Skróty h), n), p) wziąłem od homomorphism, norm, pointwise.

Uwaga 1. Wygodnie jest przyjąć $f(T) := (f_{|\sigma})(T)$ gdy tylko dziedzina funkcji skalarnej f zawiera zbiór σ opisany w twierdzeniu 2 i $f_{|\sigma} \in B_b(\sigma)$.

[14]Nieznaczne uzupełnienie dowodu pozwala nawet uzyskać skończoną miarę.

Przykład 2. Niech operator $T \in \mathcal{L}(H)$ będzie samosprzężony (lub normalny i $\mathbb{F} = \mathbb{C}$).

a) Funkcję $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ możemy wyrazić jako sumę szeregu $\sum_n \frac{1}{n!} t^n$, jednostajnie zbieżnego na każdym zbiorze zwartym. Szereg $\sum_n \frac{1}{n!} T^n$ jest zbieżny w normie operatorowej, bo $\|T^n\| \leq \|T\|^n$. Z warunku p) wynika więc, że sumą tego szeregu jest e^T, tzn. $e^T = \sum_n \frac{1}{n!} T^n$. Podobne rozwinięcia otrzymujemy dla $\cos T$ i $\sin T$, zaś ze znanych tożsamości funkcyjnych wynika, że $e^{\mathbf{i}T} = \cos T + \mathbf{i} \sin T = \lim_n (I + \frac{1}{n} T)^n$.

b) Z warunku h) wynika, że gdy $0 \notin \sigma$, to operator T ma odwrotność, równą $\frac{1}{\mathrm{id}}(T)$. Stąd i z n) wynika, że $\|T^{-1}\| = 1/\mathrm{dist}(0, \sigma)$. ⊟

Uwaga 2. * Twierdzenie 2 wyznacza przyporządkowanie borelowskim zbiorom $A \subset \sigma$ operatorów $1_A(T)$. Te ostatnie są rzutami ortogonalnymi przestrzeni H, bo są samosprzężone i równe swemu kwadratowi, wobec równości $1_A^2 = 1_A = \overline{1_A}$. (Korzystamy z h) i zadania 1c) w §8.2). Twierdzenie spektralne najczęściej wypowiadane jest w terminach istnienia tej rodziny rzutów; patrz AF Rudina, str. 343. Wersja ta jest równoważna każdemu z twierdzeń 1 i 2; nie będziemy jej tu rozpatrywać.

Dowody obu twierdzeń zakończymy dopiero w §10.2; części B) i przypadek $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ w A) to materiał uzupełniający. Tu jednak z twierdzenia 2 wyprowadzimy części i) i ii) poniższego „Dodatku" i sformułujemy odgrywające ważną rolę zadania 3 – 8.

Definicja. a) Przez $\mathrm{GL}(V)$ oznaczmy zbiór wszystkich liniowo–topologicznych automorfizmów przestrzeni unormowanej V.

b) Zbiór $\{\lambda \in \mathbb{F} : T - \lambda I \notin \mathrm{GL}(V)\}$ nazywamy **spektrum** lub **widmem** operatora $T \in \mathcal{L}(V)$. Zbiór ten oznaczamy na ogół σ_T.

Uwaga 3. a) Z operacją składania operatorów, zbiór $\mathrm{GL}(V)$ jest grupą.

b) Gdy $\lambda \in \mathbb{F}$ jest **wartością własną** dla T, tzn. gdy $\ker(T - \lambda I) \neq \{0\}$, to $\lambda \in \sigma_T$. Spektrum może jednak zawierać wartości, które nie są własne, patrz zadanie 4.

Dodatek do twierdzeń 1 i 2. *Przyjmijmy założenia i oznaczenia twierdzenia 2.*

i) Operator $f(T)$ jest normalny, a gdy $f(\sigma) \subset \mathbb{R}$, to jest samosprzężony.

ii) Zachodzi $\sigma = \sigma_T$, a przyporządkowanie $f \mapsto f(T)$ z twierdzenia 2 jest jedyne.

iii) Operator $f(T)$ komutuje z każdym operatorem S, przemiennym z T i z T^h.[15] *Gdy zaś $Tv = \lambda v$, gdzie $v \in H$ i $\lambda \in \mathbb{F}$, to $f(T)v = f(\lambda)v$.*

iv) Dalsze uzupełnienie twierdzeń 1 i 2 da zadanie 6.

Dowód części i) – iii) „Dodatku" oparty jest na dwóch lematach.

Lemat 1. *Niech operator T, zbiór zwarty $\sigma \subset \mathbb{F}$ i homomorfizm $C(\sigma) \ni f \mapsto f(T) \in \mathcal{L}(H)$ będą takie, że $\|f(T)\| = \|f\|_{\sup}$ dla wszystkich $f \in C(\sigma)$. Wówczas dla $f \in C(\sigma)$ zachodzi $(f(T) \in \mathrm{GL}(V)) \Leftrightarrow (0 \notin f(\sigma))$.*

[15] Na podstawie twierdzenia Fuglede, wystarcza do tego przemienność S z T; patrz AF Rudina, str. 334 i 426.

Dowód. Istotnie, jeśli $0 \notin \mathrm{im}(f)$, to $(1/f)(T)$ jest odwrotnością operatora T. Jeśli zaś istnieje operator S taki, że $Sf(T) = I$, to przy $g(\lambda) := \min(\|S\|+1, 1/|f(\lambda)|)$ zachodzi $\|fg\|_{\sup} \leq 1$, skąd $\|(fg)(T)\| \leq 1$. To dalej daje $\|g(T)\| = \|Sf(T)g(T)\| \leq \|S\|$ i tym samym $\|g\|_{\sup} \leq \|S\|$ – a przez to $0 \notin f(\sigma)$, zgodnie z definicją g. $\square$

Lemat 2. *Niech podpierścień $\mathcal{F}$ pierścienia $B_b(\sigma)$ zawiera $C(\sigma)$ i będzie zamknięty względem brania granic punktowo zbieżnych ciągów funkcji. Wówczas $\mathcal{F} = B_b(\sigma)$.*

Dowód. (Nadal, $\sigma \subset \mathbb{F}$ jest zbiorem zwartym.) Rozpatrzmy rodzinę $\mathcal{A}$ tych zbiorów borelowskich $A \subset \sigma$, dla których $1_A \in \mathcal{F}$. Zauważamy, że:

a) Gdy zbiór $A \subset \sigma$ jest domknięty, to $A \in \mathcal{A}$, bo funkcja 1_A jest na podstawie twierdzenia Tietzego granicą punktową ciągu funkcji ciągłych.

b) Gdy $A \in \mathcal{A}$, to $\sigma \setminus A \in \mathcal{A}$, na podstawie równości $1_{\sigma \setminus A} = 1 - 1_A$.

c) Gdy $A_n \in \mathcal{A}$ dla $n \in \mathbb{N}$, to $A \in \mathcal{A}$ dla $A := \bigcap_n A_n$, bo 1_A jest granicą punktową ciągu iloczynów $1_{A_1} \cdot \ldots \cdot 1_{A_n}$.

d) $\mathcal{A}$ jest zatem sigma–ciałem zbiorów zawierającym wszystkie zbiory domknięte, a przez to i wszystkie zbiory borelowskie. Tak więc gdy A jest takim zbiorem, to $1_A \in \mathcal{F}$.

Ponadto $\mathcal{F}$ jest pierścieniem i zawiera wszystkie funkcje stałe (bo są ciągłe). Stąd i z d) wynika więc, że $\mathcal{F}$ zawiera wszystkie borelowskie funkcje proste; a że zbiór takich funkcji jest gęsty w $(B_b(\sigma), \| \ \|_{\sup})$, to $\mathcal{F} \supset B_b(\sigma)$. $\square$

Dowód „Dodatku do twierdzeń". Część i) wynika z własności h). (Normalność otrzymujemy z równości $f(T)(f(T))^h = |f|^2(T) = (f(T))^h f(T)$.) Zaś stosując Lemat 1 przy $f = \mathrm{id}_\sigma - \lambda$ stwierdzamy, że $\lambda \in \sigma \Leftrightarrow \lambda \in \sigma_T$. (Gra rolę własność n) i to, że $(\mathrm{id}_\sigma - \lambda)(T) = T - \lambda I$, na podstawie h).)

By dowieść dalszych tez zastanówmy się, czym jest $f(T)$ dla funkcji ciągłych f. Niech wpierw $f(z) = \sum_{k,l=0}^n c_{kl} x^k y^l$ dla $z \in \sigma$, gdzie $x = \mathrm{Re}(z), y = \mathrm{Im}(z)$. Ponieważ $\mathrm{Re} = \frac{1}{2}(\mathrm{id} + \overline{\mathrm{id}}), \mathrm{Im} = \frac{\mathbf{i}}{2}(\overline{\mathrm{id}} - \mathrm{id})$, więc z h) wynika, że $f(T) = \sum_{k,l=0}^n c_{k,l} K^k L^l$, gdzie $K = \frac{1}{2}(T + T^h), L = \frac{\mathbf{i}}{2}(T^h - T)$. Wyznacza to jednoznacznie $f(T)$ gdy f jest funkcją wielomianową. A że funkcje te są gęste w $C(\sigma)$ na podstawie tw. Stone'a – Weierstrassa, to wartość $f(T)$ jest wobec p) jedyna, gdy $\in C(\sigma)$.

Gdy teraz operator S jest przemienny z T i z T^h, to z powyższego i z własności h) i p) wnosimy, że dla $\mathcal{F} := \{f \in B_b(\sigma) : f(T)S = Sf(T)\}$ spełnione są założenia Lematu 2. Zatem $\mathcal{F} = B_b(\sigma)$, skąd wynika część tezy iii), dotycząca komutowania. Dowód pozostałej części tej tezy jest podobny. Gdy zaś za $\mathcal{F}$ przyjmiemy zbiór tych funkcji $f \in B_b(\sigma_T)$, którym przy dwóch obranych przyporządkowaniach opisanych twierdzeniem 2 odpowiada wspólny operator $f(T)$, to w ten sam sposób otrzymamy jedyność takiego przyporządkowania.

Zadania. (Począwszy od zadania 5c), wykorzystywać oba twierdzenia i „Dodatek".)

3. Niech izometria liniowa $U : H_1 \to H_2$ i operatory $T_i \in \mathcal{L}(H_i)$ $(i = 1, 2)$ będą takie, że $U^{-1}T_2U = T_1$. Dowieść, że:

a) $T_1^h = U^{-1}T_2^hU$, a gdy operator T_1 jest samosprzężony (odp. unitarny wzgl. normalny), to T_2 też ma tę własność.

b) Gdy $v \in H_1$ i $\lambda \in \mathbb{F}$ są takie, że $T_1v = \lambda v$, to $T_2w = \lambda w$ dla $w := Uv$.

c) $\sigma_{T_1} = \sigma_{T_2}$ i $\|T_1\| = \|T_2\|$, a gdy $T_1 \geq 0$, to i $T_2 \geq 0$. (Dla operatora T piszemy $T \geq 0$ i mówimy, że jest on **nieujemny**, jeśli $T = T^h$ i $\langle Th, h\rangle \geq 0$ dla $h \in H$.)

4. Niech $T \in \mathcal{L}(\ell_2)$ będzie operatorem mnożenia przez ciąg $\Lambda = (\lambda_n) \in \ell_\infty$, tzn. $T((x_n)_n) = (\lambda_n x_n)_n$.

a) Dowieść, że $\sigma_T = \mathrm{cl}_{\mathbb{F}}\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Wywnioskować, że każdy niepusty zbiór zwarty w $\mathbb{F}$ jest widmem pewnego operatora mnożenia na przestrzeni $\ell_2^{\mathbb{F}}$.

b) Dowieść, że dla $\lambda \in \sigma_T \setminus \{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ operator $T - \lambda I$ jest 1-1 i ma gęsty obraz.

c) Dowieść, że ℓ_2 ma bazę ortonormalną, złożoną z wektorów własnych operatora T.

5. Ogólniej, niech $M_u \in \mathcal{L}(L_2(\mu))$ będzie operatorem mnożenia przez $u \in L_\infty(\mu)$.

a) Przy $\sigma := \{\lambda \in \mathbb{F} : \mu(u^{-1}(G)) > 0$ dla każdego otoczenia G punktu $\lambda\}$ dowieść, że $\mu\left(u^{-1}(\mathbb{F} \setminus \sigma)\right) = 0$, a zbiór σ jest domknięty i zawarty w kole $|\lambda| \leq \|u\|_\infty$.

b) Dowieść, że gdy $\mu \neq 0$, to $\sigma \neq \emptyset$ i przyporządkowanie $B_b(\sigma) \ni f \mapsto M_{f\circ u}$ spełnia warunki h), n), p) twierdzenia 2. (Funkcje $f \circ u$ są określone μ-p.w.)

c) Stąd i „Dodatku" do twierdzenia 2 wywnioskować, że $\sigma = \sigma_{M_u}$ i $f(M_u) = M_{f\circ u}$.

Uwaga 4. Wobec twierdzenia 1, gdy jakaś własność operatorów normalnych przysługuje operatorom mnożenia i jest niezmiennicza względem unitarnego podobieństwa, to przysługuje ona każdemu operatorowi normalnemu. (Tak jest przy $\mathbb{F} = \mathbb{C}$; gdy $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ dotyczy to operatorów samosprzężonych.) Oparte na tym są poniższe zadania; należy w nich wpierw rozpatrzeć operatory mnożenia. (W zadaniu 6 wykorzystać zadanie 5.)

6. Dowieść, że gdy T jest operatorem samosprzężonym i $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, lub normalnym i $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, to:

a) $\sigma_{f(T)} \subset \mathrm{cl}(f(\sigma_T))$ dla $f \in B_b(\sigma_T)$, przy czym $\sigma_{f(T)} = f(\sigma_T)$ gdy $f \in C(\sigma_T)$.

b) Podobnie, $g(f(T)) = (g \circ f)(T)$ dla $f \in B_b(\sigma_T)$ i $g \in B_b(\mathrm{cl} f(\sigma_T))$.

c) Dla $\lambda \in \sigma_T$, operator $1_{\{\lambda\}}(T)$ jest rzutowaniem ortogonalnym na $\ker(T - \lambda I)$.

d) Gdy miara μ, funkcja $u \in L_\infty(\mu)$ i izometria $U : L_2(\mu) \to H$ są takie że $T = UM_uU^{-1}$ (co może mieć miejsce dla różnych U, μ i u), to zawsze $\sigma_T = \sigma_{M_u}$ i $f(T) = UM_{f\circ u}U^{-1}$ dla $f \in B_b(\sigma_T)$.

e) W twierdzeniu 1 można żądać, by $\mathrm{im}(u) \subset \sigma_T$.

7. Przy tych samych założeniach o T dowieść, że:

f) $\ker(T - \lambda I) \perp \ker(T - \mu I)$ jeśli $\lambda \neq \mu$.

g) Operator T jest: i) unitarny $\Leftrightarrow$ $\sigma_T \subset \{\lambda : |\lambda| = 1\}$; ii) samosprzężony $\Leftrightarrow$ $\sigma_T \subset \mathbb{R}$; iii) nieujemny$\Leftrightarrow$ $\sigma_T \subset [0, \infty)$.

h) Gdy operator T jest nieujemny, to określony jest operator $S = \sqrt{T}$ (wynik zastosowania funkcji $\sqrt{\ }$ do T); przy tym $S \geq 0$ i $S^2 = T$.

i)* Dowieść też, że S jest jedynym operatorem mającym ostatnie 2 własności. (Wskazówka: przypuścić, że ma je też operator Q. Skorzystać z zadania 6b) przy T zamienionym na S i odpowiednich funkcjach f, g, by uzyskać równość $Q = \sqrt{T}$.)

8. Niech $T \in \mathcal{L}(H)$. W oparciu o zadanie 7 dowieść, że T ma **rozkład biegunowy**:

a) Istnieje nieujemny operator $S \in \mathcal{L}(H)$ taki, że $S^2 = T^h T$; jest nim $\sqrt{T^h T}$.

b) Istnieje taka izometria liniowa $U : \mathrm{im}(S) \to \mathrm{im}(T)$, że $T = US$. (Wskazówka: dla $x \in H$ zachodzi $\|Sx\| = \|Tx\|$, bo $\|Tx\|^2 = \langle T^h T x, x\rangle = \langle S^2 x, x\rangle = \|Sx\|^2$.)

Zadanie uzupełniające 1. Niech $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ i operator T będzie normalny, z $\|T\| \leq 1$. Dowieść, że:

a) Ciąg $\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} T^i$ zbiega punktowo do rzutowania ortogonalnego na $\{x : Tx = x\}$.

b) Istnieje taki operator normalny S, że $\|S\| \leq 1$ i operatory $T \pm \mathbf{i}S$ są unitarne.

Zadanie uzupełniające 2. Dowieść, że gdy operator T jest samosprzężony, to $T - \mathbf{i}I$ jest odwracalny, a $(T + \mathbf{i}I)(T - \mathbf{i}I)^{-1}$ jest unitarny.

2 Redukcja dowodu twierdzeń spektralnych dla operatora samosprzężonego

Niżej, $H \neq \{0\}$ oznacza przestrzeń Hilberta nad $\mathbb{F}$, a $T \in \mathcal{L}(H)$ operator samosprzężony. Udowodnimy tezy obu twierdzeń spektralnych dla T. (Dowód dla operatorów normalnych relegujemy do materiału uzupełniającego.) Oprzemy się jednak na następującym stwierdzeniu, którego dowód, dla zyskania czasu i motywacji, odłożymy do §10:

Stwierdzenie 1. *Przy tych oznaczeniach, σ_T jest zwartym i niepustym podzbiorem osi $\mathbb{R}$, a dla każdego wielomianu $p = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i \in \mathbb{F}[x]$ ma miejsce równość:*

$$\|p(T)\| = \sup\{|p(\lambda)|\}_{\lambda \in \sigma_T}, \quad \text{gdzie } p(T) := \sum_{i=0}^{n} c_i T^i.$$

(W szczególności, $\|T\| = \sup\{|\lambda|\}_{\lambda\in\sigma_T}$.)

Uwaga 1. Ze stwierdzenia wynika, że gdy $f : \sigma_T \to \mathbb{F}$ jest funkcją wielomianową (tzn. $f(z) = p(z)$ dla pewnego wielomianu $p \in \mathbb{F}[z]$ i wszystkich $z \in \sigma_T$), to operator $f(T) := p(T)$ nie zależy od wyboru takiego wielomianu p i $\|f(T)\| = \|f\|_{\sup}$. ⊟

W rozumowaniu wyróżnimy dwa lematy.

Oznaczenie. Dla wektora $v \in H$ przyjmijmy $\langle v\rangle := \mathrm{lin}\{T^i v\}_{i=0}^{\infty}$

Lemat 1. *Istnieje taka rodzina $\{v_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma} \subset H \setminus \{0\}$, że zbiór $\bigcup_\gamma \langle v_\gamma\rangle$ jest liniowo gęsty w H i $\langle v_{\gamma_1}\rangle \perp \langle v_{\gamma_2}\rangle$ dla $\gamma_1 \neq \gamma_2$.*

Dowód. Istnieją w $H \setminus \{0\}$ rodziny, np. pusta, spełniające drugi warunek. Na podstawie lematu Kuratowskiego–Zorna, istnieje maksymalna wśród nich; niech będzie nią $\{v_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$. Pozostaje dowieść, że zbiór $H_0 := \mathrm{lin}(\bigcup_\gamma \langle v_\gamma\rangle)$ jest gęsty w H.

Jeśliby jednak $\overline{H}_0 \neq H$, to istniałby wektor $v \in H_0^{\perp} \setminus \{0\}$. Dla $x \in H_0$ i $n \in \mathbb{N}$ uzyskujemy wtedy $\langle T^n v, x\rangle = \langle v, T^n x\rangle = 0$, bo $T = T^h$ i $T(H_0) \subset H_0$. Tym samym $\langle v\rangle \perp H_0$ i rodzina $\{v_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma} \cup \{v\}$ zaprzeczałaby maksymalności $\{v_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$. $\square$

Uwaga 2. * Gdy przestrzeń H ma ośrodek $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$, to żądaną rodzinę, i to przeliczalną, uzyskamy biorąc $v_0 := w_0$ i indukcyjnie $v_{n+1} := w_{n+1} - P_n w_{n+1}$, gdzie P_n to rzut ortogonalny na $\mathrm{lin}(\{T^i w_j\}_{i,j=0}^{n})$, a na koniec pomijając w $\{v_n\}_{n=0}^{\infty}$ wektory $v_n = 0$. $\boxminus$

Definicja. **Miarą borelowską** na przestrzeni topologicznej nazywać będziemy każdą przeliczalnie addytywną, nieujemną miarę, określoną na σ–ciele borelowskich podzbiorów tej przestrzeni.

Lemat 2. *Niech $v \in H$. Wówczas istnieje skończona, regularna miara borelowska $\mu \geq 0$ na zbiorze $\sigma_T \subset \mathbb{R}$, oraz takie liniowe zanurzenie izometryczne $U : L_2(\mu) \to H$, że $\mathrm{im}(U) \supset \langle v\rangle$ i dla wszystkich $f \in L_2^{\mathbb{F}}(\mu)$ zachodzi równość $T(Uf) = U(id_{\sigma_T} \cdot f)$. (Uwaga: w $L_\infty(\mu)$ zachodzi $\|id_{\sigma_T}\|_{\sup} \leq \|T\|$, patrz końcowa część stwierdzenia 1.)*

Dowód. Oznaczmy przez $\mathcal{P}$ zbiór wszystkich funkcji wielomianowych z σ_T w $\mathbb{F}$. Dla $f \in \mathcal{P}$ będziemy chcieli przyjąć $Uf = f(T)v$. Odnotujmy, że

$$\|f(T)v\|^2 = \langle f(T)v, f(T)v\rangle = \langle \overline{f}(T)f(T)v, v\rangle = \langle (\overline{f}f)(T)v, v\rangle. \tag{25}$$

Zadbamy więc o to, by $\int |f|^2 d\mu = \langle (\overline{f}f)(T)v, v\rangle$, co zapewni iż $\|Uf\| = \|f\|_{L_2(\mu)}$.

W tym celu zauważmy, że funkcjonał $g \mapsto \langle g(T)v, v\rangle$ jest na podstawie stwierdzenia 1 ciągły na przestrzeni $(\mathcal{P}, \|\ \|_{\sup})$. Możemy więc go przedłużyć do funkcjonału φ, określonego i ciągłego na $(C^{\mathbb{F}}(\sigma_T), \|\ \|_{\sup})$. Funkcjonał φ jest nieujemny: gdy $g \geq 0$, to $\sqrt{g}$ jest granicą ciągu funkcji wielomianowych f_n, więc stosując (25) stwierdzamy, iż $\varphi(g) = \lim_n \varphi(f_n^2) = \lim_n \|f_n(T)\|^2 \geq 0$. Na podstawie twierdzenia 1 z §4.3 o reprezentacji funkcjonałów na $C^{\mathbb{R}}(X)$, istnieje na σ_T taka skończona i regularna miara borelowska $\mu \geq 0$, że $\int g d\mu = \varphi(g)$ dla wszystkich $g \in C^{\mathbb{R}}(\sigma_T)$.

Przyjmijmy (jak zamierzaliśmy) $Uf := f(T)v$ i spójrzmy na U jako na przekształcenie z $(\mathcal{P}, \|\ \|_{L_2(\mu)})$ w H. Wobec (25) i definicji miary μ, staje się ono liniowym zanurzeniem izometrycznym, którego dziedzina $C^{\mathbb{F}}(\sigma_T)$ jest gęsta w $(L_2^{\mathbb{F}}(\mu), \|\ \|_2)$. (Gęstość wynika stąd, że funkcje ciągłe można jednostajnie aproksymować wielomianowymi na podstawie twierdzenia Weierstrassa i tego, że $\sigma_T \subset \mathbb{R}$, zaś funkcje z $L_2(\mu)$ można w normie $\|\ \|_{L_2(\mu)}$ aproksymować ciągłymi; patrz zadanie 2 w §4.3.) Można więc U przedłużyć do zanurzenia izometrycznego $L_2^{\mathbb{F}}(\mu) \to H$; oznaczmy je nadal przez U.

Na koniec zauważmy, że żądana równość $T(Uf) = U(id_{\sigma_T} \cdot f)$ jest spełniona dla wszystkich $f \in \mathcal{P}$, bo $T(p(T)v) = (x \cdot p)(T)v$ dla $p \in \mathbb{F}[x]$. Z gęstości $\mathcal{P}$ w $L_2(\mu)$ wynika więc, że jest ona spełniona wszędzie w $L_2(\mu)$. Uzyskujemy też $T^n v = Ux^n$ dla $n \geq 0$, więc $\langle v\rangle \subset \mathrm{im}(U)$. $\square$

Dowód części A) twierdzenia 1 z p.1. Niech $\{v_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ będzie rodziną wektorów, daną lematem 1, i niech $H_\gamma := \mathrm{cl}_H\langle v_\gamma\rangle$ dla $\gamma\in\Gamma$. Ponieważ $T(\langle v_\gamma\rangle)\subset\langle v_\gamma\rangle$, to $T(H_\gamma)\subset H_\gamma$ i możemy zastosować lemat 2 do operatorów $T_{|H_\gamma}\in\mathcal{L}(H_\gamma)$. Dla każdego $\gamma\in\Gamma$ uzyskamy skończoną, regularną miarę borelowską $\mu_\gamma\geq 0$ na zwartym zbiorze $\sigma_\gamma := \sigma_{T_{|H_\gamma}}$, oraz liniowe zanurzenie izometryczne $U_\gamma : L_2(\mu_\gamma)\to H_\gamma$ i funkcję $u_\gamma : \sigma_\gamma\to[-\|T\|,\|T\|]$, takie, że $TU_\gamma = U_\gamma M_{u_\gamma}$. (Zachodzi $u_\gamma = \mathrm{id}_{\sigma_\gamma}$, lecz to nie gra roli.)

Utwórzmy zbiór σ, będący sumą parami rozłącznych kopii zbiorów σ_γ ($\gamma\in\Gamma$). (Można o nim myśleć jako o $\bigcup_\gamma \sigma_\gamma\times\{\gamma\}$.) Na σ określamy σ–ciało zbiorów $\mathcal{B}$, złożone z tych zbiorów $A\subset\sigma$, których ślad $A\cap\sigma_\gamma$ na każdym ze zbiorów σ_γ jest zbiorem borelowskim w σ_γ. Określmy też miarę $\mu:\mathcal{B}\to[0,\infty]$ i funkcję $u:\sigma\to[-\|T\|,\|T\|]$ formułami $\mu(A) := \sum_\gamma \mu_\gamma(A\cap\sigma_\gamma)$ i $u(x) = u_\gamma(x)$ gdy $x\in\sigma_\gamma$.

Na koniec, dla $f\in L_2(\mu)$ niech $Uf := \sum_\gamma U_\gamma(f_{|\sigma_\gamma})$. Ponieważ $U_\gamma(f_{|\sigma_\gamma})\in H_\gamma$ i $H_\gamma\perp H_{\gamma'}$ gdy $\gamma\neq\gamma'$, to $\|f\|^2 = \sum_\gamma\|f_{|\sigma_\gamma}\|^2 = \sum_\gamma\|U_\gamma(f_{|\sigma_\gamma})\|^2 = \|Uf\|^2$ (na końcu gra rolę „równość Pitagorasa" ze stwierdzenia 1 w §6.2). Stąd $U : L_2(\mu)\to H$ jest poprawnie określonym zanurzeniem izometrycznym. Podprzestrzeń $\mathrm{im}(U)$ jest domknięta w H, bo jest izometryczna z przestrzenią zupełną $L_2(\mu)$; a że $\mathrm{im}(U)$ zawiera zbiór $\bigcup_\gamma\langle v_\gamma\rangle$, liniowo gęsty w H, to $\mathrm{im}(U) = H$. Zachodzi też $TU = UM_u$, bo $TUf = UM_uf$ dla funkcji $f\in L_2(\mu)$ znikających na wszystkich prócz jednego zbiorach σ_γ, a zbiór takich funkcji jest liniowo gęsty w $L_2(\mu)$. □

Wykorzystanie pierwszego twierdzenia spektralnego do dowodu drugiego. Niech izometria $U : L_2(\mu)\to H$ i operator mnożenia M_u na $L_2(\mu)$ będą takie, że $TU = UM_u$. Na podstawie zadania 5 a),b) w p.1, istnieje niepusty zbiór zwarty $\sigma\subset\mathbb{F}$ i przyporządkowanie $B_b(\sigma)\ni f\mapsto f(M_u)\in\mathcal{L}(L_2(\mu))$, spełniające warunki h), n), p) twierdzenia 2 (z T zmienionym na M_u). Stąd warunki te będzie też spełniać przyporządkowanie $B_b(\sigma)\ni f\mapsto Uf(M_u)U^{-1}\in\mathcal{L}(H)$. (Gra rolę to, że U jest izometrią.) ⊟

Udowodniliśmy więc części A) obu twierdzeń z p.1 w oparciu o przypadek szczególny twierdzenie 2 (którym jest stwierdzenie 1); przy tym okazało się że twierdzenie 2 wynika łatwo z twierdzenia 1. Pokazuje to, jak bliskie sobie są te twierdzenia, mimo zupełnie odmiennych sformułowań.

Wniosek 1. *Niech operator samosprzężony T ma przeliczalne spektrum. Wówczas dla pewnego zbioru σ i pewnego ograniczonego układu skalarów $\Lambda = (\lambda_s)_{s\in\sigma}$, jest on unitarnie podobny do operatora $M_\Lambda\in\mathcal{L}(\ell_2(\sigma))$, zadanego wzorem $(x_s)_s\mapsto(\lambda_s x_s)_s$.*

Dowód. Przyjmijmy oznaczenia dowodu twierdzenia 1. Dla każdego $\gamma\in\Gamma$, zbiór $\sigma_\gamma = \sigma_{T_{|H_\gamma}}$ jest przeliczalny, bo jest zawarty w σ_T; miara μ_γ jest więc czysto atomowa (tzn. $\mu_\gamma(A) = \sum_{s\in A}\mu_\gamma(\{s\})$ dla $A\subset\sigma_\gamma$). Stąd i z definicji miary μ na zbiorze $\sigma = \bigcup_\gamma\sigma_\gamma$ wynika, że i ona jest czysto atomowa.

Niech $h(s) = \sqrt{\mu(\{s\})}$ dla $s\in\sigma$. Wzór $f\mapsto h\cdot f$ wyznacza izometrię $U : L_2(\mu)\to$

$\ell_2(\sigma)$, przy której operatorowi M_u mnożenia przez funkcję $u \in L_\infty(\mu)$ odpowiada operator mnożenia przez tę samą funkcję u – a więc operator M_Λ przy $\Lambda := (u(s))_{s\in\sigma}$. (To znaczy, zachodzi $UM_u = M_\Lambda U$.) Wobec przechodniości relacji $\sim$ unitarnego podobieństwa operatorów kończy to dowód, bo $T \sim M_u$ i $M_u \sim M_\Lambda$. $\square$

3 * Redukcja dowodu twierdzeń spektralnych dla (kilku) operatorów normalnych

Nadal, H oznacza pewną przestrzeń Hilberta, różną od $\{0\}$. Dowód części B) twierdzenia 1 z p.1 wiedzie przez następujące wzmocnienie całego twierdzenia:

Twierdzenie 1 (o wspólnej reprezentacji spektralnej przemiennych operatorów normalnych)**.** *a) Dla każdej skończonej, przemiennej rodziny operatorów samosprzężonych $T_1, ..., T_n \in \mathcal{L}(H)$ istnieje przestrzeń $L_2(\mu)$, funkcje $u_1, ..., u_n \in L_\infty(\mu)$ i izometria liniowa $U : L_2(\mu) \to H$, takie, że $U^{-1}T_iU = M_{u_i}$ dla $i = 1, ..., n$. (Ponownie, μ można obrać tak, by każdy zbiór μ–miary ∞ zawierał zbiór skończonej miary dodatniej, a gdy przestrzeń H jest ośrodkowa – by miara μ była σ–skończona.)*

b) Gdy $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, tak samo jest dla każdych operatorów normalnych $T_1, ..., T_n$, takich, że rodzina $\{T_i\}_{i=1}^n \cup \{T_i^h\}_{i=1}^n$ jest przemienna. [16]

W poniższym materiale uzupełniającym podaję dowód twierdzenia 1. Jest on powtórzeniem dowodu z p.2, z tym, że stwierdzenie 1 z p.2 zostaje zastąpione przez

Stwierdzenie 1. * *Gdy $T_1, ..., T_n$ są parami przemiennymi operatorami samosprzężonymi na przestrzeni Hilberta H, to dla $p \in \mathbb{F}[x_1, ..., x_n]$ zachodzi nierówność*

$$\|p(T_1, ..., T_n)\| \leq \sup\{|p(\mathbf{t})| : \mathbf{t} = (t_1, ..., t_n) \in \sigma_{T_1} \times ... \times \sigma_{T_n}\}$$

(Tu i dalej, wartość $p(T_1, ..., T_n)$ określamy w naturalny sposób.)

Dowód tego pomocniczego stwierdzenia też odłożymy do §10.

Dowód twierdzenia 1.* Ad a). Niech $v \in H$ i $\langle v\rangle := \{p(\mathbf{T})v : p \in \mathbb{F}[x_1, ..., x_n]\}$, gdzie $\mathbf{T}$ to ciąg $(T_1, ..., T_n)$. W analogii do lematu 2 w p.2 określimy skończoną miarę borelowską μ na σ i operator unitarny $U : L_2(\mu) \to H$ tak, by $U^{-1}T_iU = M_{\pi_i}$ dla $i = 1, ..., n$, gdzie $\pi_i : \sigma \to \sigma_{T_i} \hookrightarrow \mathbb{F}$ to naturalne rzutowanie.

W tym celu zauważmy, jak w uwadze 1 w p.2, że gdy $f : \sigma \to \mathbb{F}$ jest funkcją wielomianową, tzn. $f(\mathbf{t}) = p(\mathbf{t})$ dla pewnego wielomianu $p \in \mathbb{F}[x_1, ..., x_n]$ i wszystkich $\mathbf{t} = (t_i)_{i=1}^n \in \sigma$, to operator $f(\mathbf{T}) := p(\mathbf{T})$ nie zależy od wyboru p i $f(\mathbf{T}) \leq \|f\|_{\sup}$. Oznaczmy przez $\mathcal{P}$ zbior funkcji wielomianowych z σ w $\mathbb{F}$. Jak w p.2 stwierdzamy, że gdy $f \in \mathcal{P}$, to $|f|^2 \in \mathcal{P}$ i $\|f(\mathbf{T})v\|^2 = \langle |f|^2(\mathbf{T})v, v\rangle$. Jak w p.2 obierzemy miarę μ tak, by $\int f d\mu = \langle f(\mathbf{T})v, v\rangle$ dla $f \in \mathcal{P}$. Jak tam, uzyskujemy ją przedłużając na $C(\sigma)$ funkcjonał określony na podprzestrzeni $\mathcal{P}$ wzorem $f \mapsto \langle f(\mathbf{T})v, v\rangle$. Na koniec, jak w

[16] Na podstawie twierdzenia Fuglede, wystarcza już przemienność rodziny $\{T_i\}_{i=1}^n$; por. odnośnik 14 .

p.2, zanurzenie izometryczne $f \mapsto f(\mathbf{T})v \in H$ można z podprzestrzeni $\mathcal{P}$ przestrzeni $L_2(\mu)$ przedłużyć na $L_2(\mu)$; przedłużenie to oznaczmy przez U. Żądane równości $T_i U = U M_{\pi_i}$ wynikają stąd, że $T_i(p(\mathbf{T})v) = (x_i p)(\mathbf{T})v$ dla $p \in \mathbb{F}[x_1, ..., x_n]$ i $v \in H$.

By zakończyć dowód wykorzystujemy (identycznie jak w p.2) lemat 1 z p.2. Jego sformułowanie pozostaje niezmienione, a w dowodzie zmienić trzeba tylko to, by w miejsce niezmienniczości $H_0^\perp$ względem T uzasadnić obecnie, w ten sam co poprzednio sposób, niezmienniczość $H_0^\perp$ względem $T_1, T_2, ..., T_n$.

Ad b). Gdy $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ i operatory $T_1, ..., T_n$ są jak w b), to dla $j = 1, ..., n$ przyjmijmy $K_j := \frac{1}{2}(T_j + T_j^h)$ i $L_j := \frac{\mathbf{i}}{2}(T_j^h - T_j)$. Do operatorów tych (są one samosprzężone i komutują) zastosujmy udowodnioną część a) twierdzenia, uzyskując przestrzeń $L_2(\mu)$, izometrię $U : L_2(\mu) \to H$ i funkcje $v_1, ..., v_n, w_1, ..., w_n \in L_\infty(\mu)$ takie, że $K_j U = U M_{v_j}$ i $L_j U = U M_{w_j}$ dla $j = 1, ..., n$. Ponieważ $T_j = K_j + \mathbf{i} L_j$, więc przy $u_j := v_j + \mathbf{i} w_j$ stwierdzamy, że $T_j U = U M_{u_j}$ dla $j = 1, ..., n$. ⊟

Uwaga 1. * i) Z obecnego twierdzenia 1b) wynika nieudowodniona dotąd część B) twierdzenia 1 z p.1, a dalej, jak zauważono w p.2, część B) twierdzenia 2 z p.1.

ii) Ogólniej, przy założeniach twierdzenia 1 i $\sigma := \prod_{i=1}^n \sigma_{T_i}$, $\mathbf{T} := (T_1, ..., T_n)$, uzyskujemy przyporządkowanie $B_b(\sigma) \ni f \mapsto f(\mathbf{T}) \in \mathcal{L}(H)$, spełniające warunek p) z p.1 i poniższe warunki h)' i n)' (odpowiadające warunkom h) i n)):

h)' przekształcenie $f \mapsto f(\mathbf{T})$ jest liniowym homomorfizmem pierścienia $B_b(\sigma)$ w pierścień $\mathcal{L}(H)$, takim, że $(f(\mathbf{T}))^h = \overline{f}(\mathbf{T})$ dla $f \in B_b(\sigma)$ oraz $1(\mathbf{T}) = I$ i $\pi_i(\mathbf{T}) = T_i$ dla $i = 1, ..., n$. (Tu, $\mathbf{T}^h := (T_1^h, ..., T_n^h)$, a $\pi_i : \sigma \to \sigma_{T_i} \hookrightarrow \mathbb{F}$ to naturalne rzutowanie.)

n)' $\|f(\mathbf{T})\| \le \|f\|_{\sup}$ dla $f \in B_b(\sigma)$. (Nie orzekamy o równości dla $f \in C(\sigma)$.)

By dla $n > 1$ uzyskać warunek n) w niezmienionej postaci i „Dodatek" do twierdzenia, należy za σ przyjąć zbiór mniejszy niż $\prod_i \sigma_{T_i}$ –ale to już pomijam. ⊟

§ 10. Własności spektralne operatorów normalnych, c.d.

W tym pragrafie podamy brakujący wciąż dowód stwierdzenia 1 z §9.2 (i uzupełniającego stwierdzenia 1* z §9.3). W tym celu musimy wreszcie zająć się własnościami spektrum σ_T danego operatora T.

1 Własności pełnej grupy liniowej; podstawowe twierdzenie o spektrum

Uwaga 1. Niech $V \neq \{0\}$ będzie przestrzenią Banacha. Wówczas:

a) Jeśli $S \in \mathcal{L}(V)$ i szereg $\sum_{n=0}^\infty S^n$ jest zbieżny w $(\mathcal{L}(V), \| \ \|)$ do operatora T, to $I - S \in \mathrm{GL}(V)$ i $(I - S)^{-1} = T$. Istotnie, $(I - S)\sum_{n=0}^k S^n = I - S^{k+1} \to I$, skąd $(I - S)T = I$ i podobnie $T(I - S) = I$.

b) Szereg $\sum_n S^n$ jest zbieżny, gdy $\|S\| < 1$ (bo $\|S^n\| \le \|S\|^n$ i $\sum_n \|S\|^n < \infty$).

c) Gdy $S_0 \in \mathrm{GL}(V)$ i $\|S - S_0\| < 1/\|S_0^{-1}\|$, to $S \in \mathrm{GL}(V)$. Wynika to z a) i b), bo $S = \left(I - (S_0 - S)S_0^{-1}\right) S_0$, gdzie $S_0 \in \mathrm{GL}(V)$ i $\|(S_0 - S)S_0^{-1}\| < 1$. Uzyskujemy też równość $S^{-1} = S_0^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \left((S_0 - S)S_0^{-1}\right)^n$.

d) $\mathrm{GL}(V)$ jest zbiorem otwartym w przestrzeni $(\mathcal{L}(V), \|\ \|)$. (Wynika to z c).) $\square$

Wniosek 1. *i) Dla* $|\lambda| > \|T\|$ *zachodzi* $\lambda \notin \sigma_T$ *i* $(T - \lambda I)^{-1} = -\frac{1}{\lambda}I - \frac{1}{\lambda^2}T - \frac{1}{\lambda^3}T^2 - \ldots.$

ii) Gdy $\lambda_0 \notin \sigma_T$ *, to dla* λ *dostatecznie bliskich* λ_0 *zachodzi* $\lambda \notin \sigma_T$ *i* $(T - \lambda I)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n (T - \lambda_0 I)^{-n-1}$. *(Przypomnijmy, że* $\sigma_T := \{\mu \in \mathbb{F} : T - \mu I \notin \mathrm{GL}(V)\}$.*)*

Dowód. i) wynika z części a) i b) uwagi, bo $T - \lambda I = -\lambda(I - \frac{1}{\lambda}T)$ i $\|\frac{1}{\lambda}T\| < 1$, zaś ii) – z części c) i podanego tam wzoru, przy $S_0 = T - \lambda_0 I$ i $S = T - \lambda I$. $\square$

Definicja. Liczba $r(T) := \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_T\}$ nazywana jest **promieniem spektralnym** operatora T.

Twierdzenie 1 (podstawowe o spektrum). *Gdy* $V \neq \{0\}$ *jest zespoloną przestrzenią Banacha i* $T \in \mathcal{L}(V)$*, to:*

a) Spektrum σ_T *jest niepustym, zwartym podzbiorem płaszczyzny* $\mathbb{C}$.

b) Zachodzi $\overline{\lim}_k \|T^k\|^{1/k} \leq r(T) \leq \|T\|$. *(Tu* $\overline{\lim}_k$ *oznacza granicę górną* $\lim_k \sup$.*)*

Dowód. Z wniosku 1 wynika, że σ_T jest domkniętym podzbiorem dysku $\{\lambda : |\lambda| \leq \|T\|\}$. Stąd $r(T) \leq \|T\|$ i pozostaje dowieść, że 1) $\sigma_T \neq \emptyset$ i 2) $\overline{\lim}_k \|T^k\|^{1/k} \leq r(T)$.

W tym celu niech $R_\lambda := (T - \lambda I)^{-1}$ dla $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma_T$. Przy $\varphi \in \mathcal{L}(V)^*$, funkcja $\mathbb{C} \setminus \sigma_T \ni \lambda \mapsto \varphi(R_\lambda)$ jest analityczna, bo w otoczeniu każdego $\lambda_0 \notin \sigma_T$ rozwija się w szereg potęgowy. (Patrz wniosek 1ii); współczynnikami są liczby $\varphi((T - \lambda_0 I)^{-n-1})$.)

Ad 1). Zauważmy, że $\lim_{\lambda \to \infty} \varphi(R_\lambda) = 0$: gdy bowiem $|\lambda| > 2\|T\|$, to $\lambda \notin \sigma_T$ i $\|R_\lambda\| \leq 2/|\lambda|$. (Wynika to z wniosku 1i), bo $\sum_{n=0}^{\infty} \|T^n\|/|\lambda|^n \leq 2$ gdy $|\lambda| > 2\|T\|$.) Jeśliby więc $\sigma_T = \emptyset$, to na podstawie twierdzenia Liouville'a funkcja ta byłaby stale równa 0. Wobec twierdzenia Hahna–Banacha i dowolności $\varphi \in \mathcal{L}(V)^*$, funkcja $\lambda \mapsto R_\lambda$ też byłaby zerowa. Jest to niemożliwe, bo każdy operator R_λ jest odwracalny.

Ad 2). W pierścieniu $\{\lambda : |\lambda| > r(T)\} \subset \mathbb{C} \setminus \sigma_T$ możemy holomorficzną funkcję $h(\lambda) := \varphi(R_\lambda)$ rozwinąć w szereg Laurenta $\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \lambda^k$. Gdy $r > r(T)$, to funkcja $h_{|\{z : |z| = r\}}$ wyznacza wszystkie współczynniki c_k i $|c_k| \leq r^{-k} \sup\{|h(\lambda)| : |\lambda| = r\}$.[17] Ze względu na wniosek 1i) wynika stąd, że:

$$c_{-k} = -\varphi(T^{k-1}) \quad \text{i} \quad |\varphi(T^{k-1})| \leq r^k \|\varphi\| M_r \ \text{ dla } k \geq 1,$$

gdzie stała $M_r := \sup\{\|R_\lambda\| : |\lambda| = r\}$ zależy od r, lecz nie od k czy φ.

Korzystając z twierdzenia Hahna–Banacha, dla każdego k obierzmy teraz $\varphi = \varphi_k$ tak, by $\varphi(T^k) = \|T^k\|$ i $\|\varphi\| = 1$. Uzyskamy $\|T^k\| \leq r^{k+1} M_r$, skąd $\overline{\lim}_k \|T^k\|^{1/k} \leq \overline{\lim}_k (r^{k+1} M_r)^{1/k} = r$. To kończy dowód, wobec dowolności liczby $r > r(T)$. $\square$

[17] Przypomnę dowód: skoro $h(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n z^n$, to $h(z)/z^{k+1} = c_k z^{-1} + \sum_{n \neq -1} c_{n+k+1} z^n$; a że $\int_{|z|=r} z^n dz = 0$ dla $n \neq -1$, to wynika stąd, że $\int_{|z|=r} (h(z)/z^{k+1}) dz = 2\pi \mathbf{i} c_k$, i dalej łatwo $|c_k| \leq r^{-k} \sup_{|z|=r} |h(z)|$. (Tu, $k \in \mathbb{Z}$.)

Uwaga 2. * W tezie b) można pierwszą nierówność zastąpić równością, zaś granicę górną $\overline{\lim}$ – granicą. (Nie skorzystamy z tego. Patrz zadanie uzupełniające niżej.)

Twierdzenie 2. *Przy V i T jak w twierdzeniu 1, funkcja wyznaczona przez wielomian $p \in \mathbb{C}[x]$, przeprowadza spektrum σ_T operatora T na spektrum $\sigma_{p(T)}$ operatora $p(T)$.*

Dowód. Niech $\lambda \in \mathbb{C}$. Rozłóżmy $p - \lambda$ na czynniki liniowe $x - \mu_i$ $(i = 1, ..., n)$; otrzymamy $p(T) - \lambda I = cT_1T_2...T_n$ dla $T_i := T - \mu_i I$. Operatory T_i są parami przemienne, więc ich iloczyn jest odwracalny wtedy i tylko wtedy, gdy odwracalny jest każdy z nich. (Jest tak w każdym monoidzie - dlaczego?) Stąd $\lambda \in \sigma_{p(T)} \Leftrightarrow (\mu_i \in \sigma_T$ dla pewnego $i)$. A że $p^{-1}(\{\lambda\}) = \{\mu_i\}_{i=1}^n$, to $\lambda \in \sigma_{p(T)} \Leftrightarrow \lambda \in p(\sigma_T)$. □

Zadanie 1. Niech V i W będą przestrzeniami Banacha. Dowieść, że:
a) Gdy $S, T \in \mathcal{L}(V, W)$, T jest izomorfizmem i $\|S - T\| < 1/\|T^{-1}\|$, to i S nim jest.
b) Operacja $\mathrm{GL}(V) \ni T \mapsto T^{-1} \in \mathrm{GL}(V)$ jest ciągła.

Zadanie uzupełniające 1. Zauważyć, że gdy $|\lambda^n| > \|T^n\|$, to $\lambda^n \notin \sigma_{T^n}$ i przez to $\lambda \notin \sigma_T$; patrz stwierdzenie 1. Wywnioskować, że $r(T) \leq \inf_n \|T^n\|^{1/n}$ i potwierdzić uwagę 2.

2 Dowód brakujących stwierdzeń z §9.2 i §9.3

Ponownie ograniczymy się teraz do operatorów na przestrzeni Hilberta $H \neq \{0\}$.

Stwierdzenie 1. *Niech operator $T \in \mathcal{L}(H)$ będzie normalny. Wówczas:*
a) $\|T^h x\| = \|Tx\|$ dla $x \in H$ i $\ker(T - \lambda I) = \ker(T^h - \overline{\lambda} I)$ dla $\lambda \in \mathbb{F}$.
b) $\|T\|^2 = \|T^2\|$.
c) Jeśli $\inf\{\|Tx\| : \|x\| = 1\} > 0$, to $T \in \mathrm{GL}(H)$.

Dowód. Ad a). Dla $x \in H$ zachodzi $\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx\rangle = \langle T^hTx, x\rangle$ i podobnie $\|T^hx\|^2 = \langle TT^hx, x\rangle$. Skoro więc $T^hT = TT^h$, to $\|T^hx\| = \|Tx\|$, co stosuje się i do operatora $T - \lambda I$. (Patrz zad. 1 w §9.1.) To dowodzi a), bo $(T - \lambda I)^h = T^h - \overline{\lambda} I$.

Ad b). Dla $x \in B_H$ zachodzi $\|Tx\|^2 = \langle T^hTx, x\rangle \leq \|T^h(Tx)\| = \|T(Tx)\|$. (Na końcu korzystamy z a).) Stąd wynika, że $\|T\|^2 \leq \|T^2\|$ – co kończy dowód b), bo zawsze $\|T^2\| \leq \|T\|^2$.

Ad c). Gdy założenie w c) jest spełnione, to T jest zanurzeniem izomorficznym, patrz §2.1. Podprzestrzeń $\mathrm{im}(T)$ jest więc domknięta (bo jest zupełna), $\ker(T) = \{0\}$ i $\mathrm{im}(T) = \ker(T^h)^\perp = \ker(T)^\perp = \{0\}^\perp = H$. (Korzystamy z zadania 2a) w §7.2 i a).) □

Stwierdzenie 2. *Gdy operator $T \in \mathcal{L}(H)$ jest samosprzężony, to $\sigma_T \subset \mathbb{R}$.*

Dowód. Niech $\lambda \in \sigma_T$. Wobec stwierdzenia 1c) i normalności operatora $T - \lambda I$, istnieje taki ciąg wektorów $v_n \in H$, że $Tv_n - \lambda v_n \to 0$ i $\|v_n\| = 1$. Zachodzi więc $|\langle Tv_n - \lambda v_n, v_n\rangle| \leq \|Tv_n - \lambda v_n\| \cdot \|v_n\| \to 0$, skąd $\langle Tv_n, v_n\rangle - \lambda \to 0$. Zatem $\lambda \in \mathbb{R}$, bo liczby $\langle Tv_n, v_n\rangle$ są rzeczywiste (równe swemu sprzężeniu), wobec samosprzężoności T. □

Wniosek 1. *a) Gdy* $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ *i operator* $T \in \mathcal{L}(H)$ *jest normalny, to* $r(T) = \|T\|$*, jak też* $\|p(T)\| = \sup\{|p(\lambda)| : \lambda \in \sigma_T\}$ *dla wielomianów* $p \in \mathbb{C}[x]$*.*

b). Tak samo jest, gdy* $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ *i* $T = T^h$ *(z* $\mathbb{C}[x]$ *zastąpionym przez* $\mathbb{R}[x]$*).*

Dowód. Ad a) Ze stwierdzenia 1b) wynika, że $\|T^k\|^{1/k} = \|T\|$ dla k będących potęgą dwójki, wobec czego $\|T\| = r(T) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_T\}$ na podstawie twierdzenia 1 w p.1. Pozostałą równość uzyskujemy zastępując tu T przez $p(T)$ i uwzględniając to, że $\sigma_{p(T)} = p(\sigma_T)$; patrz twierdzenie 2 w p.1.

Ad b)* Rozpatrzmy operatory $\widetilde{T} = T \oplus T$ i $\widetilde{p(T)} = p(T) \oplus p(T)$, działające na kompleksyfikacji $\widetilde{H}$ przestrzeni H; patrz zadanie 5 w §8.2. Z zadania tego wynika, że:

i) $\|p(T)\| = \|\widetilde{p(T)}\| = \|p(\widetilde{T})\|$ (bo $\widetilde{p(T)} = p(\widetilde{T})$ gdy $p \in \mathbb{R}[x]$).

ii) Dla $\lambda \in \mathbb{R}$ operator $\widetilde{T} - \lambda I_{\widetilde{H}}$ jest samosprzężony i $\lambda \in \sigma_{\widetilde{T}} \Leftrightarrow \lambda \in \sigma_T$. (Korzystamy tu też z części c) stwierdzenia 1.)

Wobec a), $\|p(\widetilde{T})\| = \|p\|_{\sup}$. (Supremum jest brane na zbiorze $\sigma_{\widetilde{T}} = \sigma_T$). Łącznie z i), daje to tezę b).

Kończy to dowód części A) obu twierdzeń spektralnych, bo brakujące stwierdzenie 1 z §9.2 wynika z wniosku 1 i stwierdzenia 2.

W poniższym materiale uzupełniającym udowodnimy stwierdzenie 1* z §9.3, co zakończy dowód części B) obu twierdzeń, a też twierdzenia z §9.3. Wykorzystamy własności rzutów ortogonalnych i dowiedzioną już część A) twierdzenia o istnieniu rachunku funkcyjnego. Poniżej, o wszystkich rzutach zakładamy, że są ortogonalne.

Zadanie 1. a) Niech rzuty $P_1, ..., P_l \neq 0$ będą takie, że $P_iP_j = 0$ gdy $i \neq j$. Wówczas dla kombinacji $T = d_1P_1 + ... + d_lP_l$ zachodzi

$$\|T\| = \max_j |d_j|, \quad \{d_1, ..., d_l\} \setminus \{0\} \subset \sigma_T \ \text{ oraz } T^k = \sum_j d_j^k P_j \text{ dla } k \in \mathbb{N}.$$

b) Dla każdej skończonej, przemiennej rodziny $\mathbf{P}$ rzutów istnieją takie rzuty $P_1, ..., P_l$, że $P_iP_j = 0$ dla $i \neq j$ i $\mathbf{P} \subset \text{lin}\{P_1, ..., P_l\}$.

Lemat 1. * *Niech* $T_1, ..., T_n \in \text{lin}(\mathbf{P})$*, gdzie* $\mathbf{P}$ *jest skończoną, przemienną rodziną rzutów. Wówczas teza stwierdzenia 1* z §9.3 jest prawdziwa, tzn.*

$\|p(T_1, ..., T_n)\| \leq \sup\{|p(\mathbf{t})| : \mathbf{t} \in \prod_i \sigma_{T_i}\}$ *dla* $p \in \mathbb{F}[x_1, ..., x_n]$*.*

Dowód. O rodzinie $\mathbf{P} = \{P_j\}_{j=1}^l$ założymy, że $P_iP_j = 0$ i $P_i \neq 0$ dla $i \neq j$ –co można, na podstawie zadania 1b). Gdy więc (d_{ij}) jest taką macierzą, że $T_i = \sum_j d_{ij}P_j$ dla $1 \leq i \leq n$, to $p(T_1, ..., T_n) = \sum_{(k_1,...,k_n)} c_{k_1...k_n} \sum_j (\prod_i d_{ij}^{k_i}) P_j = \sum_j (\sum_{(k_1,...,k_n)} c_{k_1...k_n} \prod_i d_{ij}^{k_i}) P_j$ $= \sum_j p(d_{1j}, d_{2j}, ..., d_{nj}) P_j$. Stąd i z zadania 1a) wynika teza. ⊟

* Dowód stwierdzenia 1* z §9.3. Dla $i = 1, ..., n$ i $\varepsilon > 0$ obierzmy taką borelowską funkcję prostą $f_i^\varepsilon = \sum_{A \in \mathcal{A}_i^\varepsilon} c_A 1_A$, że $\|f_i^\varepsilon - id_{\sigma_{T_i}}\|_{\sup} < \varepsilon$ i $\text{im}(f_i^\varepsilon) \subset \sigma_{T_i}$. Przy $S_i^\varepsilon :=$

$f_i^\varepsilon(T_i)$ zachodzi wówczas $\|S_i^\varepsilon - T_i\| \le \varepsilon$. (Korzystamy z warunku n) w §9.1.) Ponadto, rodzina rzutów $\mathbf{P} = \{1_A(T_i) : i = 1, ..., n, A \in \mathcal{A}_i^\varepsilon\}$ jest przemienna na podstawie „dodatku" z §9.1. Wobec lematu 1, dla $p \in \mathbb{F}[x_1, ..., x_k]$ zachodzi $\|p(S_1^\varepsilon, ..., S_n^\varepsilon)\| \le \sup\{|p(\mathbf{t})| : \mathbf{t} \in \prod_i \sigma_{S_i^\varepsilon}\}$. A że $p(T_1, ..., T_n) = \lim_{\varepsilon\to 0} p(S_1^\varepsilon, ..., S_n^\varepsilon)$ i $\sigma_{S_i^\varepsilon} \subset \mathrm{im}(f_i^\varepsilon) \subset \sigma_{T_i}$ (gra rolę zadanie 6a) w §9.2), to wynika stąd teza. $\square$

§ 11. Operatory zwarte i Fredholma

1 Operatory zwarte (podstawowe własności i przykłady)

Operator liniowy $K : V \to W$, gdzie V i W są przestrzeniami Banacha, nazywamy:

a) **zwartym**, jeśli przeprowadza każdy ciąg ograniczony na ciąg, mający punkt skupienia;

b) **skończenie–wymiarowym**, jeśli jest ograniczony i $\dim K(V) < \infty$.

Uwaga 1. a) Operator K jest więc zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy przeprowadza kulę jednostkową przestrzeni V w zbiór **prezwarty** (tzn. mający zwarte domknięcie).

b) Stąd operator zwarty jest ograniczony (bo zbiory zwarte są takie), a operator skończenie–wymiarowy jest zwarty (patrz twierdzenie 1c) w §3.1).

Uwaga 2. a) Niech $K = K_1K_2$, gdzie operatory K_i są ciągłe. Jeśli któryś z operatorów K_1, K_2 jest zwarty (odp. skończenie – wymiarowy), to K też.

b) Kombinacja liniowa dwóch operatorów zwartych jest operatorem zwartym.

c) Obcięcie operatora zwartego jest operatorem zwartym.

d) Gdy $\dim V = \infty$, to żadne zanurzenie V w V nie jest operatorem zwartym.

Zadanie 1. Uzasadnić powyższe tezy. (Wskazówka do b): gdy zbiory $A, B \subset W$ są zwarte, to $A + B$ też jest; wskazówka do d): twierdzenie 2 w §3.2.)

Operatory zwarte tworzą więc w $\mathcal{L}(V, W)$ podprzestrzeń liniową, a gdy $V = W$, to tworzą też dwustronny ideał. Z uwagi 1 wynika też:

Wniosek 1. *Niech operator $K \in \mathcal{L}(V)$ będzie zwarty. Wówczas:*

a) Jeśli $\dim V = \infty$, to $0 \in \sigma_T$.

b) Dla $\lambda \neq 0$, podprzestrzeń $V_\lambda := \ker(K - \lambda I)$ jest skończonego wymiaru.

Dowód. Ad a). Na podstawie uwagi 2d), operator K nie jest izomorfizmem.

Ad b) Operator K jest na V_λ jednokładnością o skali $\lambda \neq 0$. A że jest on zwarty, to $\dim(V_\lambda) < \infty$, patrz uwaga 2c),d).

Przypomnijmy, że podzbiór X zupełnej przestrzeni metrycznej (Y, d) wtedy i tylko wtedy jest prezwarty, gdy jest **całkowicie ograniczony**, tzn. dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje zbiór skończony $F_\varepsilon \subset Y$ taki, że $\mathrm{dist}_d(x, F_\varepsilon) < \varepsilon$ dla każdego punktu $x \in X$.

Stwierdzenie 1. *Gdy V i W są przestrzeniami Banacha V, to zbiór operatorów zwartych jest domknięty w przestrzeni $\mathcal{L}(V,W)$, rozpatrywanej z normą operatorową.*

<u>Dowód.</u> Istotnie, gdy $\|K_n - T\| \to 0$ i operatory K_n są zwarte, to dla zadanej liczby $\varepsilon > 0$ można obrać $n \in \mathbb{N}$ i zbiór skończony $F \subset V$ tak, by $\|K_n - T\| < \varepsilon$ i $\operatorname{dist}(K_n x, F) < \varepsilon$ dla $x \in B_V$. Wtedy $\operatorname{dist}(Tx, F) < 2\varepsilon$ dla $x \in B_V$, co wobec dowolności $\varepsilon > 0$ dowodzi prezwartości zbioru $T(B_V)$. □

Uwaga 3. Identyczność na przestrzeni Hilberta ℓ_2 jest granicą punktową ciągu rzutowań $x \mapsto (x_1, ..., x_n, 0, 0, ...)$. Wraz z uwagami 1b) i 2d) pokazuje to, że <u>nie</u> można wyżej zbieżności w normie zastąpić punktową.

<u>Przykład 1.</u> Na $\ell_2(\Gamma)$ rozpatrzmy operator M_Λ mnożenia przez układ $\Lambda = (\lambda_\gamma)_\gamma \in \ell_\infty(\Gamma)$, dany wzorem $M_\Lambda x = (\lambda_\gamma x_\gamma)$ dla $x = (x_\gamma) \in \ell_2(\Gamma)$.

a) Jeśli $\lambda_\gamma = 0$ dla p.w. γ, to operator M_Λ jest skończenie wymiarowy (i odwrotnie).

b) Jeśli $\Lambda \in c_0(\Gamma)$, to operator M_Λ jest zwarty na podstawie wniosku 2. Istotnie, przy $\lambda^\varepsilon_\gamma = \lambda_\gamma$ gdy $|\lambda_\gamma| > \varepsilon$ i $\lambda^\varepsilon_\gamma = 0$ dla pozostałych γ, operator S^ε mnożenia przez $(\lambda^\varepsilon_\gamma)_\gamma$ jest skończenie–wymiarowy i spełnia warunek $M_\Lambda - S^\varepsilon\| \leq \varepsilon$.

c) Gdy zaś $(\lambda_\gamma) \notin c_0(\Gamma)$, to operator M_Λ nie jest zwarty. Istotnie, istnieje wtedy nieskończony zbiór $\{\gamma_n\}_{n=1}^\infty \subset \Gamma$ taki, że $c := \inf_n |\lambda_{\gamma_n}| > 0$. Z ciągu $(M_\Lambda e_{\gamma_n})$ nie można wybrać podciągu zbieżnego, bo $\|M_\Lambda e_{\gamma_k} - M_\Lambda e_{\gamma_l}\| \geq c\sqrt{2}$ dla $k \neq l$.

d) $\{e_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ jest bazą ortonormalną przestrzeni $\ell_2(\Gamma)$, złożoną z wektorów własnych operatora M_Λ ; przy tym $\{e_\gamma : \lambda_\gamma = \lambda\}$ jest bazą ortonormalną przestrzeni $V_\lambda := \ker(M_\Lambda - \lambda I)$, dla $\lambda \in \{\lambda_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$. W szczególności, $V_\lambda \perp V_\mu$ gdy $\lambda \neq \mu$. ⊟

<u>Przykład 2.</u> Przypomnijmy, patrz zad. 3 w §8.2, że liczba $\|T\|_{HS} := \sqrt{\sum_\gamma \|Tu_\gamma\|^2} \in [0,\infty]$ zależy tylko od operatora $T \in \mathcal{L}(H)$, a nie od bazy ortonormalnej (u_γ) przestrzeni H; przy tym, $\|T\|_{HS} \geq \|T\|$. Gdy T jest **operatorem Hilberta–Schmidta**, tzn. gdy $\|T\|_{HS} < \infty$, to przy $T_\varepsilon x := \sum_{\gamma\in\Gamma_\varepsilon} \langle x, u_\gamma\rangle T u_\gamma$ i Γ_ε oznaczającym odpowiedni zbiór skończony, zachodzi $\|T - T_\varepsilon\| \leq \|T - T_\varepsilon\|_{HS} = (\sum_{\gamma\notin\Gamma_\varepsilon} \|Tu_\gamma\|^2)^{1/2} < \varepsilon$. Na podstawie wniosku 2, operator T jest więc zwarty. (Operatorami Hilberta-Schmidta są m.in. operatory całkowe na $L_2(\mu)$, dane wzorem $(Tf)(s) := \int k(s,t) f(t) d\mu(t)$, gdzie $k \in L_2(\mu)$; patrz zad. 4 w §8.2.)

Zadanie 2. Niech X będzie jedną z przestrzeni c lub c_0 lub ℓ_p, gdzie $p \in [1,\infty)$.

a) Dowieść, że dla każdego skończonego zbioru $F \subset X$ i liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taki rzut liniowy $P : X \to X$, że przestrzeń $P(X)$ jest skończonego wymiaru, $\|Px - x\| \leq \varepsilon$ dla $x \in F$, i $\|P\| \leq 1$.

b) Wywnioskować, że gdy operator $K : X \to X$ jest zwarty, to $\|K - K_n\| \to 0$ dla pewnego ciągu (K_n) operatorów skończenie–wymiarowych.

Uwaga 4. Przez 35 lat otwarte było ważne pytanie, stawiane w różnych wersjach przez

S. Mazura i A. Grothendiecka, czy wyżej teza b) jest prawdziwa dla każdej przestrzeni Banacha X. Okazało się, co udowodnił Per Enflo w 1970r., że nie jest. Tomasz Szankowski uprościł przykład Enflo dowodząc, że jest ona fałszywa dla $X = \mathcal{L}(\ell_2)$.

2 Teoria F. Riesza - Schaudera operatorów zwartych, 1

Twierdzenie 1 (J. Schaudera). *Operator $K \in \mathcal{L}(V, W)$ między przestrzeniami Banacha jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy zwarty jest operator $K^* \in \mathcal{L}(W^*, V^*)$.*

Dowód (S. Kakutaniego). Ad $\Rightarrow$. Niech operator K będzie zwarty i niech $\psi_n \in B_{W^*}$ dla $n \in \mathbb{N}$; mamy dowieść, że z ciągu $K^*\psi_n$ można wybrać podciąg zbieżny. W tym celu zauważmy, że zbiór $X := \mathrm{cl}_W(K(B_V))$ jest zwarty, zaś funkcje ψ_n spełniają warunek Lipschitza ze stałą 1. Na podstawie twierdzenia Arzeli i Ascoliego, dla pewnych $n_1 < n_2 < \ldots$ ciąg $(\psi_{n_i|X})_{i=1}^{\infty}$ jest zbieżny jednostajnie, więc spełnia warunek Cauchy'ego w metryce "sup". A że $K(B_V) \subset X$ to wynika stąd, że warunek ten spełnia też (w normie przestrzeni V^*) ciąg funkcjonałów $(\psi_{n_i} \circ K)_{i=1}^{\infty}$. To kończy dowód rozważanej implikacji, bo przestrzeń V^* jest zupełna i $\psi_{n_i} \circ K = K^*\psi_{n_i}$.

Ad $\Leftarrow$. Niech teraz operator K^* będzie zwarty. Na podstawie tego, co wyżej, zwarty jest też operator $K^{**} : V^{**} \to W^{**}$. Ale V i W możemy traktować jako podprzestrzenie przestrzeni V^{**} i W^{**}, odpowiednio, przy czym $K = K^{**}_{|V}$. Tym samym operator K też jest zwarty. (Skorzystano ze stwierdzenia 3 w §8.1 i uwagi 2c) w p.1.) □

Twierdzenie 2. *Gdy V jest przestrzenią Banacha, a $K \in \mathcal{L}(V)$ operatorem zwartym, to $T := K - I$ przeprowadza domknięte podprzestrzenie liniowe na domknięte.*

Dowód. Niech wpierw podprzestrzeń domknięta W będzie taka, że $W \cap \ker(T) = \{0\}$. Pokażemy, że wówczas $T_{|W}$ jest zanurzeniem izomorficznym. Tym samym, przestrzeń $T(W)$ okaże się zupełna (por. stwierdzenie 2 w §3.1), a przez to domknięta w V.

Dążąc do sprzeczności przypuśćmy, że $T_{|W}$ nie jest zanurzeniem; wtedy istnieje taki ciąg wektorów $w_n \in W$, o normie 1, że $Tw_n \to 0$. (Patrz uwaga 2 w §2.1.) Wobec zwartości K możemy przejść do odpowiedniego podciągu, uzyskując bez straty ogólności, że $Kw_n \to w$ dla pewnego $w \in W$. Z $Kw_n - w_n \to 0$ i $Kw_n \to w$ wynika, że $w_n \to w$, i dalej $\|w\| = 1$ i $Kw - w = 0$ –wbrew temu, że $W \cap \ker(K - I) = \{0\}$.

Gdy zaś przestrzeń $X := W \cap \ker(T)$ nie jest równa $\{0\}$, to jednak na podstawie wniosku 1b) w p.1 jest ona skończonego wymiaru, więc $X \oplus W' = W$ dla pewnej domkniętej podprzestrzeni $W' \leq W$. (Patrz zadanie 2 w §3.2.) A że $T(W) = T(W')$ (bo $W = W' + X$ i $X \subset \ker(T)$) i $W' \cap \ker(T) = \{0\}$, to pozostaje zastąpić W przez W' i skorzystać z poprzednio rozpatrzonego przypadku. □

Twierdzenie 3 (F. Riesza). *Zbiór wartości własnych operatora zwartego $K \in \mathcal{L}(V)$ jest skończony lub jest ciągiem zbieżnym do zera. (C.d. jest w p.4.)*

Dowód. Jeśli nie, to istniałyby parami różne skalary λ_i i wektory $v_i \neq 0$ takie, że $Kv_i = \lambda_i v_i$ dla $i \in \mathbb{N}$ i $c := \inf_i |\lambda_i| > 0$. Dowiedziemy, że jest to sprzeczne ze zwartością K.

Z GALu wiemy, że dla $n \in \mathbb{N}$ układ $(v_i)_{i=1}^n$ jest liniowo niezależny, więc przy $V_n := \mathrm{lin}\{v_1, ..., v_n\}$ zachodzi $V_{n-1} \subsetneq V_n$. Skalując v_n odpowiednio uzyskamy w V_n/V_{n-1} równość $\|[v_n]_n\|_n = 1$. (Reprezentujemy V_n/V_{n-1} jako zbiór warstw $[v]_n := v + V_{n-1}$ $(v \in V_n)$, z normą $\|[v]_n\|_n := \inf\{\|w\| : w \in [v]_n\}$.)

Dla $n \in \mathbb{N}$ wybierzmy $w_n \in [v_n]_n$ tak, by $\|w_n\| < 2\|[v_n]_n\|_n = 2$; wtedy $[Kw_n]_n = [Kv_n]_n$, bo $K(V_{n-1}) \subset V_{n-1}$. Gdy $i < n$, to $Kw_i \in V_i \subset V_{n-1}$ i dalej:

$\|Kw_n - Kw_i\| \geq \mathrm{dist}(Kw_n, V_{n-1}) = \|[Kw_n]_n\|_n = \|[Kv_n]_n\|_n = |\lambda_n| \cdot \|[v_n]_n\|_n \geq c \cdot 1$

Z ciągu $(Kw_n)_n$ nie można więc wybrać podciągu zbieżnego, choć $\sup_n \|w_n\| \leq 2$. □

3 Operatory Fredholma

Uwaga 1 (i definicja). Za **wymiar** $\dim(V)$ przestrzeni liniowej V przyjmiemy tu liczebność $n = 0, 1, ..., \infty$ bazy algebraicznej tej przestrzeni. Gdy V jest przestrzenią unormowaną, to $\dim(V) = \dim(V^*)$ (co nie ma miejsca przy subtelniejszym pojmowaniu wymiaru.)

Definicja. a) Przez **kowymiar** podprzestrzeni liniowej X przestrzeni V rozumiemy wymiar (dowolnego) dopełnienia algebraicznego podprzestrzeni X do V, tzn.

$$\mathrm{codim}(X) := \dim(V'), \text{ gdzie } V' \oplus X = V.$$

Z GALu wiadomo, że definicja ta jest poprawna i $\mathrm{codim}(X) = \dim(V/X)$.

b) Dla przekształcenia liniowego $T : V \to W$ piszemy:

$$\alpha(T) := \dim(\ker(T)), \quad \beta(T) := \mathrm{codim}(\mathrm{im}(T)).$$

c) $T : V \to W$ nazwiemy **operatorem Fredholma**, jeśli V i W są przestrzeniami Banacha, $T \in \mathcal{L}(V, W)$ i $\alpha(T) \neq \infty \neq \beta(T)$. Przyjmujemy

$$\mathrm{ind}(T) := \alpha(T) - \beta(T), \ \textbf{indeks} \text{ operatora Fredholma } T.$$

Przykład 1. Niech $L(x) := (x_2, x_3, ...)$ i $R(x) := (0, x_1, x_2, ...)$ dla $x = (x_n)_n \in \ell_2$. Wówczas $\mathrm{ind}(L^k) = k$ i $\mathrm{ind}(R^k) = -k$ dla $k \geq 0$.

Uwaga 2. Gdy przestrzenie V i W są skończonego wymiaru, to każdy operator $T \in \mathcal{L}(V, W)$ jest Fredholma i $\mathrm{ind}(T) = \dim(V) - \dim(W)$. (Dlaczego?).

Uwaga 3. Obraz operatora Fredholma $T : V \to W$ jest domknięty w W. Nie jest to oczywiste, lecz wynika z zadania 1 w §5.3.I. (Gra rolę tylko skończoność $\beta(T)$.)

Twierdzenie 1. *a) Gdy V i W są przestrzeniami Banacha, operator $T \in \mathcal{L}(V, W)$ ma domknięty obraz i $\alpha(T) < \infty$, to $\alpha(T^*) = \beta(T)$ i $\beta(T^*) = \alpha(T)$.*

b) Zbiór operatorów Fredholma o zadanym indeksie jest otwarty w $\mathcal{L}(V, W)$.

c) Gdy dwa z operatorów $S : U \to V$, $T : V \to W$ i $TS : U \to W$ są operatorami Fredholma, to trzeci też jest operatorem Fredholma i $\mathrm{ind}(TS) = \mathrm{ind}(S) + \mathrm{ind}(T)$.

Poniższe kroki prowadzą do dowodu twierdzenia.

1. Równość $\alpha(T^*) = \beta(T)$ wynika bezpośrednio z zadania 1d) w §8.1 i uwagi 1.

2. Dla dowodu dalszych tez z a) i b) przypomnijmy, że skoro $\dim(\ker(T)) = \alpha(T) < \infty$, to istnieje domknięta podprzestrzeń $X \subset V$ dla której $V = X \oplus \ker(T)$, oraz ciągły rzut liniowy P przestrzeni V na X wzdłuż $\ker(T)$. (Patrz uwaga 2 w §5.3E.)

Operator T wyznacza bijekcję X na $Y := \operatorname{im}(T)$ (GAL!), będącą izomorfizmem liniowo-topologicznym na podstawie twierdzenia Banacha o izomorfiźmie. Stąd $T_{|X} : X \to W$ jest zanurzeniem liniowo-topologicznym, wobec czego $(T_{|X})^* : W^* \to X^*$ jest „na". (Patrz zadanie 1b) w §8.1.) A że $T^* = P^* \circ (T_{|X})^*$ (bo $T = T_{|X} \circ P$), to $\beta(T^*) = \beta(P^*)$. Jednak z zadania 4 w §8.1 wiemy, że przestrzeń $V^*/\operatorname{im}(P^*)$ jest izomorficzna z $(\ker(T))^*$. Zatem $\beta(T^*) = \dim((\ker(T))^*) = \alpha(T)$, co kończy dowód a).

3. Przy oznaczeniach z **2**, niech teraz ponadto $\operatorname{codim}(Y) < \infty$ (tzn. T jest operatorem Fredholma). Wtedy istnieje rzut liniowy $Q : V \to Y$, patrz zadanie 1 w §3.2. A że $Q \circ T_{|X}$ jest izomorfizmem X na Y (patrz wyżej), to istnieje taka liczba $\varepsilon(T) > 0$, że gdy $T' \in \mathcal{L}(V, W)$ i $\|T' - T\| < \varepsilon(T)$, to złożenie $Q \circ T'_{|X} : X \to Y$ też jest izomorfizmem. (Gra rolę zadanie 1a) w §10.1 i to, że $\|Q \circ T'_{|X} - Q \circ T_{|X}\| \le \|Q\| \|T' - T\|$.)

Zauważmy, że rzut $Q : V \to Y$ i włożenie $J : X \hookrightarrow V$ są operatorami Fredholma, jak też, że $QT'J = QT'_{|X}$ dla każdego $T' \in \mathcal{L}(V, W)$. Stąd i z nieudowodnionej jeszcze części c) twierdzenia wnosimy, że gdy $QT'_{|X} : X \to Y$ jest izomorfizmem (ogólniej: ma indeks 0) to T' jest operatorem Fredholma o indeksie $-\operatorname{ind}(Q) - \operatorname{ind}(J)$. Stąd zaś wynika, że kula $\{T' : \|T' - T\| < \varepsilon(T)\}$ składa się z operatorów Fredholma o wspólnym indeksie. Wraz z dowolnością operatora Fredholma T, prowadzi to łatwo do tezy b).

4. Pozostaje dowieść tezy c), co relegowane jest do poniższego problemu:

<u>Problem 5.</u> i) Niech ciąg $(T_i : V_i \to V_{i+1})_{i=0}^{n-1}$ przekształceń liniowych między przestrzeniami wektorowymi będzie **dokładny**, tzn. niech $\operatorname{im}(T_i) = \ker(T_{i+1})$ dla $i = 0, ..., n-1$. Dowieść, że jeśli $V_0 = V_n = \{0\}$ oraz $\dim V_i < \infty$ dla $i = 1, ..., n-1$, to $\sum_i (-1)^i \dim(V_i) = 0$.

ii) Niech ciąg $\{0\} \to V_1 \hookrightarrow V_2 \to V_3 \to W_1 \to W_2 \to W_3 \to \{0\}$ będzie dokładny. Dowieść, że jeśli $\dim V_i + \dim W_i < \infty$ dla dwóch indeksów $i \in \{1, 2, 3\}$, to jest tak dla pozostałego indeksu.

iii) Przekształcenia liniowe $X \xrightarrow{S} Y \xrightarrow{T} Z$ wyznaczają ciąg dokładny:

$$\{0\} \to \ker(S) \hookrightarrow \ker(TS) \xrightarrow{S_|} \ker(T) \xrightarrow{\Pi_|} Y/\operatorname{im}(S) \xrightarrow{\widetilde{T}} Z/\operatorname{im}(TS) \xrightarrow{J} Z/\operatorname{im}(T) \to \{0\}$$

Należy dowieść dokładności (i odgadnąć znaczenia użytych symboli) lub tylko istnienia ciągu dokładnego w oparciu o *lemat o wężu.*[18]

iv) W oparciu o powyższe, udowodnić twierdzenie 1c).

[18] Po zakończeniu wykładów odsłaniam link z takim rozwiązaniem:
https://math.stackexchange.com/questions/817996/can-one-prove-this-fact-about-fredholm-operators-like-this?

4 Teoria F. Riesza - Schaudera operatorów zwartych, 2

Twierdzenie 1. *Gdy operator $K \in \mathcal{L}(V)$ jest zwarty, to $T := I - K$ jest Fredholma, o indeksie 0. (Równoważnie: wtedy* $\dim(\ker(T)) = \dim(V/\mathrm{im}(T)) < \infty$*).*

Dowód. Jak wiemy, $\alpha(T) < \infty$ i obraz operatora T jest domknięty, patrz wniosek 1 w p.1 i twierdzenie 2 w p.2. Z twierdzenia 1a) w p.3 wynika więc, że $\beta(T) = \alpha(T^*)$. A że $T^* = I_{V^*} - K^*$ i operator K^* jest zwarty na podstawie twierdzenia Schaudera, to $\alpha(T^*) < \infty$. Tym samym $\beta(T) < \infty$.

By zakończyć dowód zauważmy, że funkcja $[0,1] \ni s \mapsto I - sK \in \mathcal{L}(V)$ przyjmuje wartości w zbiorze $\mathcal{F}$ operatorów Fredholma (na podstawie powyższego, bo każdy operator sK jest zwarty) i jest ciągła, gdy $\mathcal{L}(V)$ rozpatrywać z normą operatorową. Ze spójności odcinka wynika więc, że wartości te leża tylko w jednym z parami rozłącznych zbiorów otwartych $\{L \in \mathcal{F} : \mathrm{ind}(L) = n\}$, $n \in \mathbb{Z}$. (Otwartość wynika z twierdzenia 1b) w p.3.) Zatem $\mathrm{ind}(I - 1 \cdot K) = \mathrm{ind}(I - 0 \cdot K) = 0$. $\square$

Wniosek 1 (c.d. twierdzenia F. Riesza z p.2)**.** *Jedynymi niezerowymi wartościami spektralnymi operatora zwartego $K \in \mathcal{L}(V)$ są jego wartości własne.*

Dowód. Niech $\lambda \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ i $T := I - (1/\lambda)K$. Jeśli $\alpha(T) = 0$, to $\beta(T) = 0$ na podstawie twierdzenia 1, więc $T : V \to V$ jest bijekcją. Zatem w tym przypadku $T \in \mathrm{GL}(V)$ (z twierdzenia Banacha o izomorfiźmie), tzn. $\lambda \notin \sigma_K$. Gdy więc $\lambda \in \sigma_T$, to $\alpha(T) \neq 0$ – czyli λ jest wartością własną dla K. $\square$

Uwaga 1. * Rozumowanie to, wraz z wnioskiem 1b) w p.1 prowadzi do **alternatywy Fredholma**: gdy $K \in \mathcal{L}(V)$ jest operatorem zwartym i $\lambda \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$, to:

albo a): dla pewnego $n \geq 1$ każde z równań $Kv = \lambda v$ i $K^*\varphi = \lambda\varphi$ ma n liniowo niezależnych rozwiązań v i φ, odpowiednio, a dla $w \in W$ równanie $Kv - \lambda v = w$ ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $\varphi(w) = 0$ dla każdego $\varphi \in V^*$ takiego, że $K^*\varphi = \lambda\varphi$,

albo b): dla każdego wektora $w \in V$ równanie $Kv - \lambda v = w$ ma jedyne rozwiązanie v, w sposób ciągły zależące od w.

Ponadto, zbiór tych $\lambda \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$, dla których zachodzi a), można ustawić w ciąg zbieżny do 0 lub skończony.

5 Zwarte operatory samosprzężone/normalne na przestrzeni Hilberta

Ponownie, rozpatrujemy operatory na przestrzeni Hilberta $H \neq \{0\}$.

Twierdzenie 1 (o diagonalizacji zwartych operatorów samosprzężonych/normalnych)**.**

A) Niech operator $K \in \mathcal{L}(H)$ będzie zwarty i samosprzężony. Wówczas istnieje baza ortonormalna przestrzeni H, złożona z jego wektorów własnych.

B) Tak samo jest, gdy samosprzężoność zastąpić normalnością i $\mathbb{F} = \mathbb{C}$.

<u>Dowód.</u> Na podstawie twierdzenia Riesza z p.2 i jego c.d. z p.4, spektrum każdego operatora zwartego jest zbiorem przeliczalnym. Gdy więc operator ten jest też samosprzężony, to z wniosku 1 w §9.2 wnosimy, że jest on unitarnie podobny do pewnego operatora mnożenia na (pewnej) przestrzeni $\ell_2(\Gamma)$. Stąd i z przykładu 1 w p.1 oraz zadania 4b) w §9.2 wynika teza A). By uzyskać B), należy dla operatorów normalnych dowieść odpowiednika wniosku 1 w §9.2. Nie zrobimy tu tego; patrz jednak Dodatek do §11, zawierający samodzielny dowód twierdzenia silniejszego od twierdzenia 1. ⊟

Uwaga 1. Założenia w A) są istotne: operatory $K \in \mathcal{L}(\ell_2)$ i $T \in \mathcal{L}(L_2([0,1]))$, zdefiniowane wzorami $K(x) = (0, x_1, x_2/2, x_3/3, \dots)$ i $(Tf)(t) = tf(t)$, nie mają wektorów własnych; przy tym K jest zwarty, a T samosprzężony. Podobnie, w B) istotne jest założenie, że $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. (Rozważyć obrót płaszczyzny $\mathbb{R}^2$.)

Uwaga 2 (ważne podsumowanie). Niech dla operatora $T \in \mathcal{L}(H)$ istnieje baza ortonormalna $(v_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$, złożona z jego wektorów własnych: $Tv_\gamma = \lambda_\gamma v_\gamma$. Podsumujmy wcześniejsze ustalenia (patrz w p.1 przykład 1, zaś w §9.1 przykład 1 i zadania 4c) i 7g)):

a) Baza $(v_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ wyznacza wzorem $Ux = (\langle x, v_\gamma\rangle)_{\gamma\in\Gamma}$ izometrię $U : H \to \ell_2(\Gamma)$. Przy M_Λ oznaczającym operator mnożenia przez układ $\Lambda = (\lambda_\gamma)$, spełniony jest warunek $M_\Lambda U = UT$. Ponadto:

$*$ $\quad Tx = \sum_\gamma \lambda_\gamma \langle x, v_\gamma\rangle v_\gamma$, jak też $f(T)x = \sum_\gamma f(\lambda_\gamma)\langle x, v_\gamma\rangle v_\gamma$ dla $f \in B_b(\sigma_T)$.

$*$ $\quad \|T\| = \|M_\Lambda\| = \sup_\gamma |\lambda_\gamma|$ i $\sigma_T = \sigma_{M_\Lambda} = \mathrm{cl}\{\lambda_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$.

b) Operator M_Λ jest normalny, więc T też; zaś samosprzężoność/unitarność/zwartość T jest równoważna temu, by operator M_Λ miał tę własność. Operator T jest więc samosprzężony wtedy i tylko wtedy, gdy $\lambda_\gamma \in \mathbb{R}\ \forall\gamma$, unitarny wtedy i tylko wtedy, gdy $|\lambda_\gamma| = 1\ \forall\gamma$, a zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy $(\lambda_\gamma) \in c_0(\Gamma)$.

c) Ponadto, dla każdego skalara λ, zbiór $\{v_\gamma : \gamma \in \Gamma \text{ i } \lambda_\gamma = \lambda\}$ jest bazą ortonormalną podprzestrzeni $H_\lambda := \ker(T - \lambda I)$ i (stąd) $H_\lambda \perp H_\mu$ gdy $\lambda \neq \mu$.

d) Gdy operator $T \neq 0$ jest zwarty, to wybierając z $\{v_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ tylko wektory odpowiadające wartościom $\lambda_\gamma \neq 0$ wnosimy z a) i b), że $Tx = \sum_n \lambda_n\langle x, v_n\rangle v_n$, gdzie układ (v_n) jest ortonormalny, a ciąg (λ_n) zbieżny do 0 lub skończony; zarazem $\{\lambda_n\}_n = \sigma_T \setminus \{0\}$.

Konsekwencją twierdzenia 1 i istnienia rozkładu biegunowego z zadania 8 w §9.1 jest:

Twierdzenie 2 (Rozkład Schmidta zwartego operatora na przestrzeni Hilberta)**.** *Gdy K jest zwartym operatorem na przestrzeni Hilberta $H \neq \{0\}$, to istnieją takie przeliczalne układy ortonormalne $(v_n)_{n\in\Gamma}$ i $(w_n)_{n\in\Gamma}$, oraz liczby dodatnie c_n $(n \in \Gamma)$, że $Kx = \sum_n c_n\langle x, v_n\rangle w_n$ dla $x \in H$. Przy tym, $\|K\| = \max_n c_n$ i $c_n \to 0$ gdy $\#\Gamma = \infty$.*

<u>Dowód.</u> Ponieważ operator K^hK jest nieujemny i zwarty, to $K^hKx = \sum_n \lambda_n\langle x, v_n\rangle v_n$ dla $x \in H$, gdzie układy $\{v_n\}_n$ i $\{\lambda_n\}_n \subset (0,\infty)$ są jak opisano w uwadze 2d). Z zadania 8 w §9.1 i uwagi 2a) wynika, że wzór $Sx = \sum_n \sqrt{\lambda_n}\langle x, v_n\rangle v_n$ poprawnie określa taki samosprzężony operator S, że dla pewnej izometrii liniowej $U : S(H) \to$

$K(H)$ ma miejsce równość $K = US$. Przyjmijmy $w_n := Uv_n$ (co wolno, bo $v_n = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} Sv_n \in S(H)$). Ponieważ $Sx = \sum_n \sqrt{\lambda_n}\langle x, v_n\rangle v_n$, to dla $K = US$ zachodzi $Kx = \sum_n \sqrt{\lambda_n}\langle x, v_n\rangle w_n$. Ponadto, $\|K\| = \|S\| = \max_n \sqrt{\lambda_n}$ i układ $(w_n)_n$ jest ortonormalny, bo U zachowuje długość i ortogonalność wektorów z $S(H)$. □

Uwaga 2. Gdy $\dim(H) < \infty$, to wyniki tego punktu mają ważne interpretacje dotyczące zespolonych macierzy kwadratowych. (Jakie? - jest to zadanie.)

6* Operatory Fredholma jako „odwracalne modulo zwarte" (zadania uz.)

Zadanie uzupełniające 1. Dla operatora $T \in \mathcal{L}(V, W)$ równoważne są warunki:

a) T jest operatorem Fredholma;

b) dla pewnego $S \in \mathcal{L}(W, V)$, operatory $ST - I$ i $TS - I$ są skończenie-wymiarowe;

c) dla pewnego $S \in \mathcal{L}(W, V)$, operatory $ST - I$ i $TS - I$ są zwarte.

Wskazówka: Ad a)⇒b). Przy P, Q, X, Y jak w dowodzie twierdzenia 1 z p.3, przyjąć za S operator $(T_{|X})^{-1} \circ Q$, traktowany jako operator w V (a nie w X). Zauważyć, że $ST - I$ i $TS - I$ są rzutami na $\ker(P)$ i $\ker(Q)$, odpowiednio.

Ad c)⇒a). Gdy $S \in \mathcal{L}(W, V)$ jest jak w c), to $TS = I + K$ dla pewnego zwartego operatora K, więc obraz operatora TS jest skończonego kowymiaru w W. A że $\operatorname{im}(T) \supset \operatorname{im}(TS)$, to i $\operatorname{im}(T)$ ma skończony kowymiar. Podobnie, $\dim(\ker(T)) < \infty$.

Zadanie uzupełniające 2. Jeśli $T : V \to W$ jest operatorem Fredholma, a $K : V \to W$ operatorem zwartym, to $T + K$ jest operatorem Fredholma i $\operatorname{ind}(T + K) = \operatorname{ind}(T)$. (Wskazówka: poprzednie zadanie i dowód twierdzenia 1 w p.4.)

7.* Dodatek do §11: bezpośredni dowód wzmocnienia twierdzenia 1 z p.5

Definicja. Wektor $v \in V$ jest wektorem własnym dla rodziny operatorów $\mathbf{K} \subset \mathcal{L}(V)$, jeśli jest wektorem własnym każdego operatora $K \in \mathbf{K}$.

Twierdzenie 1 (o wspólnej diagonalizacji zwartych operatorów samosprzężonych/normalnyc

A) Niech $\mathbf{K}$ będzie przemienną rodziną zwartych operatorów samosprzężonych na przestrzeni Hilberta $H \neq \{0\}$. Wówczas istnieje baza ortonormalna przestrzeni H, złożona z wektorów własnych dla $\mathbf{K}$.

B) Tak samo jest, gdy $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ i założenie samosprzężoności zastąpić normalnością.

Dowód twierdzenia oparty jest na trzech lematach i staje się przejrzystszy, gdy operatory są samosprzężone. (Przy pierwszym czytaniu warto to założyć.)

Lemat 1. *Niech operatory $S, T \in \mathcal{L}(H)$ będą normalne i przemienne. Wówczas:*

a) Obcięcie $T_{|H_0} \in \mathcal{L}(H_0)$ operatora T do podprzestrzeni H_0 takiej, że $T(H_0) \subset H_0$ i $T^h(H_0) \subset H_0$, jest operatorem normalnym;

b) Dla $H_0 := \ker(S - \lambda I)$, gdzie $\lambda \in \mathbb{F}$, zachodzi $T(H_0) \subset H_0$ i $T^h(H_0) \subset H_0$.

Dowód. Ad b). $(S-\lambda I)(T(H_0)) = T((S-\lambda I)(H_0)) = \{0\}$, skąd $T(H_0) \subset H_0$. (Gdy $T = T^h$ można tu skończyć, bo a) i dalsza część b) są wtedy oczywiste.) A że zachodzi też $H_0 = \ker(S^h - \overline{\lambda} I)$, patrz stwierdzenie 1a) w §10.2, to możemy zamienić S z S^h i T z T^h, uzyskując $T^h(H_0) \subset H_0$.

Ad a). Wystarczy zauważyć, że dla $T_0 := T_{|H_0} \in \mathcal{L}(H_0)$ zachodzi $T_0^h = T^h_{|H_0}$. (Jest tak, bo gdy $x, y \in H_0$ i $z := T^h y \in H_0$, to $\langle Tx, y\rangle = \langle x, z\rangle$.) $\square$

Lemat 2 (Szczególny przypadek tw. Riesza z p.4)**.** *Gdy $H \neq \{0\}$ i operator $K \in \mathcal{L}(H)$ jest zwarty i normalny, to $\sigma_K \setminus \{0\}$ składa się tylko z wartości własnych.*

Dowód. Niech $\lambda \in \sigma_K \setminus \{0\}$. Jak wiemy ze stwierdzenia 1c) w §10.2, istnieje taki ciąg jednostkowych wektorów $x_n \in H$, że $(K-\lambda I)x_n \to 0$. Wobec zwartości K, możemy przejść do podciągu i założyć istnienie $y = \lim_n Kx_n$. Uzyskamy $\lambda x_n \to y$, skąd $(K-\lambda I)y = \lim_n (K-\lambda I)\lambda x_n = 0$ i $\|y\| = \lim_n |\lambda| \|x_n\| = |\lambda| \neq 0$ – więc λ jest wartością własną. $\square$

Lemat 3. *Przy oznaczeniach i założeniach twierdzenia, istnieje wektor własny dla* $\mathbf{K}$.

Dowód. Niech $K_0 \in \mathbf{K} \setminus \{0\}$. Wobec wniosku 1 w §10.2, istnieje $\lambda \in \sigma_{K_0} \setminus \{0\}$; jest to wartość własna dla K_0 na podstawie lematu 2. Podprzestrzeń $H_0 = \ker(K_0 - \lambda I)$ jest niezmiennicza względem wszystkich operatorów $K \in \mathbf{K}$, patrz lemat 1, a rodzina $\{K_{|H_0} : K \in \mathbf{K}\} \subset \mathcal{L}(H_0)$ nadal spełnia założenia twierdzenia. Jeśli znajdziemy wektor własny dla tej rodziny, to będzie on nim i dla $\mathbf{K}$.

Dowód sprowadza się więc do przypadku, gdy $0 < \dim H < \infty$ –bo $\dim H_0 < \infty$, patrz wniosek 1 w p.1. Wtedy jednak można zastosować indukcję względem $\dim H$, jak następuje. Teza jest oczywista, gdy każdy operator $K \in \mathbf{K}$ jest jednokładnością (w tym gdy $\dim H = 1$). Gdy tak nie jest, obierzmy operator $K_0 \in \mathbf{K}$ nie będący jednokładnością. Wcześniejsze rozumowanie pozwala zastąpić H przez podprzestrzeń H_0 niższego wymiaru, a do niej stosuje się założenie indukcyjne. $\square$

Dowód twierdzenia. Obierzmy maksymalny układ ortonormalny B, złożony z wektorów własnych dla $\mathbf{K}$; niech też $H_0 := B^\perp$. Gdy $K \in \mathbf{K}$, to $K^h(B) \subset \mathbb{F}B$, na postawie stwierdzenia 1a) w §10.2, więc przestrzeń $\mathrm{lin}B$ jest niezmiennicza dla K i dla K^h. Stąd $K(H_0) \subset H_0$ i $K^h(H_0) \subset H_0$ (jest to zadanie), a operator $K_{|H_0} \in \mathcal{L}(H_0)$ jest normalny; patrz lemat 1a). Rodzina $\{K_{|H_0} : K \in \mathbf{K}\} \subset \mathcal{L}(H_0)$ nie ma jednak wektora własnego – bo inaczej moglibyśmy go, po unormowaniu, dołączyć do B, wbrew maksymalności. Zatem $H_0 = \{0\}$ na podstawie lematu 3, więc B jest szukaną bazą. $\square$

§ 12. Słabe topologie

1 Preliminaria: własności topologii wyznaczonej przez rodzinę funkcjonałów liniowych

Niech Φ będzie rodziną funkcji, określonych na zbiorze X i przyjmujących wartości w przestrzeni topologicznej Y. W rodzinie tych topologii na X, w których każda funkcja $\varphi \in \Phi$ jest ciągła, istnieje topologia najsłabsza, którą oznaczymy $\mathcal{T}(X, \Phi)$.

Dalej zakładamy, że $Y = \mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, z naturalną topologią. Bazą otwartych otoczeń punktu $x_0 \in X$ w $\mathcal{T}(X, \Phi)$ jest wtedy rodzina zbiorów postaci

$$N(x_0, \Phi_0, \varepsilon) = \bigcap_{\varphi \in \Phi_0} \{x \in X : |\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \varepsilon\} \tag{26}$$

gdzie Φ_0 przebiega skończone podzbiory zbioru Φ, zaś ε – liczby dodatnie.

Zakładać będziemy niżej, że spełnione są następujące warunki:

i) X jest przestrzenią wektorową, a każda funkcja $\varphi \in \Phi$, z X w $\mathbb{F}$, jest liniowa.

ii) Rodzina Φ oddziela punkty: gdy $x \in X \setminus \{0\}$, to $\varphi(x) \neq 0$ dla pewnego $\varphi \in \Phi$.

Uwaga 1. Warunki te zapewniają, że topologia $\mathcal{T}(X, \Phi)$ spełnia warunek T_2 Hausdorffa i jest niezmiennicza względem przesunięć przestrzeni X. (Należy to uzasadnić.)

Twierdzenie 1. *Przy tych oznaczeniach i założeniach,*

a) $(X, \mathcal{T}(X, \Phi))$ *jest* **przestrzenią liniowo–topologiczną**, *tzn. działania*

$$X \times X \ni (x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2 \in X \quad i \quad \mathbb{F} \times X \ni (\lambda, x) \mapsto \lambda x \in X$$

są ciągłe, gdy na X *rozpatrywać topologię* $\mathcal{T}(X, \Phi)$, *a na* $X \times X$ *i na* $\mathbb{F} \times X$ *odpowiadające jej topologie produktowe.*

b) Przestrzeń $(X, \mathcal{T}(X, \Phi))$ *jest* **lokalnie wypukła**, *tzn. jej topologia ma bazę, złożoną ze zbiorów wypukłych.*

c) Jeśli ponadto $\mathrm{lin}\Phi \subset \Phi$, *to* $(X, \mathcal{T}(X, \Phi))^* = \Phi$ *(tzn. zbiór funkcjonałów liniowych na* X, *ciągłych w topologii* $\mathcal{T}(X, \Phi)$, *jest wtedy równy* Φ*).*

Dowód. a) Ciągłość dodawania (wektorów) w $(0_X, 0_X)$ wynika stąd, że $N(0, \Phi_0, \varepsilon) \supset N(0, \Phi_0, \varepsilon/2) + N(0, \Phi_0, \varepsilon/2)$, i podobnie jest z ciągłością w $(0_{\mathbb{F}}, 0_X)$ pozostałej operacji. Ciągłość w innych punktach wynika teraz z przesuwalności topologii.

b) Każdy zbiór $N(x_0, \Phi_0, \varepsilon)$ jest wypukły, bo jest częścią wspólną takich zbiorów.

c) Wobec definicji topologii $\mathcal{T}(X, \Phi)$ trzeba tylko udowodnić, że jeśli funkcjonał liniowy ψ jest $\mathcal{T}(X, \Phi)$–ciągły, to należy do Φ. W tym celu zauważmy, że z ciągłości ψ wynika istnienie skończonego zbioru $\Phi_0 \subset \Phi$, takiego, że $|\psi(x)| < 1$ dla $x \in N(0, \Phi_0, \varepsilon)$. Gdy $x \in \bigcap_{\varphi \in \Phi_0} \ker(\varphi)$, to $|\psi(nx)| < 1 \forall n \in \mathbb{N}$ –a więc $\psi(x) = 0$. Wraz z iii) i GALowym zadaniem 7 z pierwszej serii zadań daje to $\psi \in \mathrm{lin}\Phi_0 \subset \Phi$. $\square$

Uwaga 2. Dla przestrzeni liniowej X, wyposażonej w lokalnie wypukłą topologię Hausdorffa $\mathcal{T}$, prawdziwe pozostają (wraz z dowodami):

a) twierdzenie o oddzielaniu z §1.5: gdy zbiory $A, B \subset X$ są wypukłe i któryś z nich jest domknięty, a drugi zwarty, to $\sup((\mathrm{Re}\varphi)(A)) < \inf((\mathrm{Re}\varphi)(B))$ dla pewnego funkcjonału $\varphi \in (X, \mathcal{T})^*$,

b) twierdzenie Kreina–Milmana z §1.6.

2 Przypadek $\Phi = X^*$: słaba topologia na przestrzeni unormowanej

Zakładać odtąd będziemy, że X jest przestrzenią unormowaną.

Topologię $\mathcal{T}(X, X^*)$ na X nazywamy **słabą topologią** lub **w-topologią** lub X^*–topologią na X. Jest to najsłabsza topologia, w której ciągłe są wszystkie funkcjonały $\varphi \in X^*$. A że są one ciągłe w topologii normowej, to ta jest silniejsza od w–topologii (i różna od niej gdy $\dim X = \infty$, co nietrudno udowodnić).

Uwaga 1. 0 nie ma na ogół przeliczalnej bazy otoczeń w słabej topologii, w związku z czym topologia ta może nie być metryzowalna, a słabe domknięcie niekoniecznie da się opisać przez (przeliczalne) ciągi słabo zbieżne. Tym niemniej, ciągi te pozostają użyteczne. Przypomnijmy, że ciąg $x_1, x_2, \dots$ nazywamy **zbieżnym do x_0 w topologii $\mathcal{T}$**, jeśli dla każdego $\mathcal{T}$–otoczenia U punktu x_0 zachodzi $x_n \in U$ dla p.w. n.

Uwaga 2. Równoważne są warunki:

a) ciąg (x_n) jest w–zbieżny do x_0 (tzn. jest zbieżny do x_0 w topologii $\mathcal{T}(X, X^*)$);

b) $\varphi(x_n) \to \varphi(x_0)$ dla każdego funkcjonału $\varphi \in X^*$. $\boxminus$

Stwierdzenie 1. *Niech $x_n \in X$ dla $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.*

a) Jeśli ciąg (x_n) jest w-zbieżny, to jest ograniczony (tzn. $\sup_n \|x_n\| < \infty$).

b) Jeśli $\sup_n \|x_n\| < \infty$ i $\varphi(x_n) \to \varphi(x_0)$ dla wszystkich φ z pewnego zbioru $E \subset X^*$, liniowo gęstego w $(X^*, \|\ \|)$, to ciąg (x_n) jest słabo zbieżny do x_0.

Dowód. a) wynika z twierdzenia Banacha–Steinhausa, zastosowanego do ciągu funkcjonałów $X^* \ni \varphi \mapsto \varphi(x_n) \in \mathbb{F}$, określonych na przestrzeni Banacha X^*. Gdy zaś do tego ciągu zastosować wniosek 1 w §5.1, to uzyskamy b). $\Box$

Przykład 1. a) W $X = c_0$ lub $X = \ell_p$, gdzie $p \in (1, \infty)$, ciąg (x_n) wtedy i tylko wtedy jest w–zbieżny do $x_0 \in X$, gdy jest ograniczony i zbieżny do x_0 po współrzędnych (tzn. $\lim_n x_n(k) = x_0(k)$ dla każdego $k \in \mathbb{N}$, gdzie $x(k)$ to k–ta współrzędna wektora $x \in X$). Istotnie, X^* można utożsamić z ℓ_q dla odpowiedniej liczby $q \in (1, \infty)$. Przy $E = \{e_i\}_{i=1}^{\infty}$, gdzie $e_i = (\delta_i^j)_j$, tezę otrzymujemy z równoważności c)$\Leftrightarrow$a) w stwierdzeniu 1.

b) W c, ciąg (x_n) wtedy i tylko wtedy jest słabo zbieżny do $x_0 \in c$, gdy jest ograniczony, zbieżny do x_0 po współrzędnych i spełnia warunek $\lim x_n \to \lim x_0$. Dowód jest jak w a), przy uwzględnieniu zadania 4 w §4.3.

c) W $C(S)$, gdzie S jest przestrzenią zwartą, ciąg (f_n) wtedy i tylko wtedy jest słabo zbieżny do funkcji $f_0 \in C(S)$, gdy jest ograniczony i zbiega do f_0 punktowo.

Istotnie, każdy funkcjonał $\varphi \in C(S)$ jest, na podstawie twierdzenia Riesza (–Radona–Banacha–Markova–Kakutaniego), całkowaniem względem pewnej σ–addytywnej $\mathbb{F}$–miary, będącej kombinacją σ–addytywnych, nieujemnych miar skończonych. Implikacja $\Leftarrow$ wynika więc z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności majoryzowanej, a odwrotna z ciągłości ewaluacji $C(S) \ni f \mapsto f(s) \in \mathbb{F}$ i stwierdzenia 1a).

Uwaga 3. Do słabej zbieżności ciągu (x_n) nie wystarcza, by $\sup_n \|x_n\| < \infty$ i dla każdego funkcjonału $\varphi \in X^*$ ciąg $(\varphi(x_n))$ był zbieżny. Za przykład może służyć ciąg $(e_1 + \cdots + e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ w przestrzeni c_0. (Gra rolę izomorfizm c_0^* z ℓ_1, patrz zad. 3b) w §4.1.)

Ponieważ topologia słaba jest słabsza od normowej, to każdy zbiór w–domknięty jest domknięty normowo. Dla zbiorów wypukłych zachodzi jednak też:

Twierdzenie 1 (Mazura)**.** *Każdy wypukły, domknięty podzbiór przestrzeni unormowanej jest słabo domknięty.*

Dowód. Na podstawie wniosku 1 w §1.5, rozważany zbiór wypukły jest przecięciem rodziny półprzestrzeni postaci $\{x \in X : \mathrm{Re}\, \varphi(x) \leq c\}$, gdzie $\varphi \in X^*$ i $c \in \mathbb{R}$. Wobec w–ciągłości funkcjonałów φ, każda z tych półprzestrzeni jest zbiorem w–domkniętym. $\boxminus$

Wniosek 1 (twierdzenia Mazura, c.d.)**.** *a) Wypukły podzbiór przestrzeni unormowanej ma to samo domknięcie w topologii słabej, co w normowej.*

b) Punkt, należący do słabego domknięcia zbioru, jest normową granicą ciągu (skończonych) wypukłych kombinacji jego elementów.

Dowód. Teza a) wynika z twierdzenia, bo to domknięcie jest najmniejszym zbiorem wypukłym i domkniętym w rozważanej topologii, zawierającym domykany zbiór.

b) Badany punkt należy do słabego domknięcia uwypuklenia rozważanego zbioru. Z a) wynika więc, że należy on i do normowego domknięcia tego uwypuklenia. $\square$

Zadanie 1. Udowodnić, że gdy X i Y są przestrzeniami Banacha, to operator liniowy $T : X \to Y$ jest ograniczony wtedy i tylko wtedy, gdy jest ciągły w słabych topologiach na X i na Y. (Wskazówka: jeśli $\|T\| = \infty$, to dla pewnego ciągu (x_n) zachodzi $\|x_n\| \to 0$ i $\|Tx_n\| \to \infty$, wobec czego ciąg (Tx_n) nie jest w–zbieżny do 0.)

3 Słaba wstecz topologia na przestrzeni sprzężonej

Przestrzeń sprzężona X^* do przestrzeni unormowanej X jest przestrzenią unormowaną; można więc na niej rozpatrywać topologię słabą $\mathcal{T}(X^*, X^{**})$. Można jednak na niej rozpatrywać i topologię $\mathcal{T}(X^*, J_X(X))$, najsłabszą, w której ciągłe są wszystkie ewaluacje $X^* \ni \varphi \mapsto \varphi(x) \in \mathbb{F}$, gdzie $x \in X$. (Stosujemy oznaczenia z §8.1, tzn. $J_X : X \to X^{**}$ jest kanonicznym włożeniem, przyporządkowującym każdemu $x \in X$ ewaluację w x.) Przy naturalnym utożsamieniu każdego $x \in X$ z ewaluacją w x, możemy też oznaczać tę topologię przez $\mathcal{T}(X^*, X)$. Topologia ta nazywana jest **słabą**

wstecz topologią na X^*, lub też **słabą z gwiazdka topologią** czy **w^*–topologią** na X^*. Gwiazdka przypomina to, że w^*–topologia jest określona na przestrzeni Y tylko gdy jest ona sprzężona; co więcej, istotne jest, dla jakiej przestrzeni X zachodzi $Y = X^*$. (Patrz niżej przykład 1.) Prawdziwe pozostają odpowiedniki uwagi 2 i stwierdzenia 1 z p.2:

Uwaga 1. Ciąg $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ jest w^*–zbieżny do φ_0 wtedy i tylko wtedy, gdy jest zbieżny punktowo, tzn. gdy $\varphi_n(x) \to \varphi_0(x)$ dla każdego $x \in X$.

Stwierdzenie 1. *Niech $\varphi_n \in X^*$ dla $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.*

a) Jeśli X jest przestrzenią Banacha i ciąg (φ_n) jest w^*-zbieżny, to jest ograniczony (tzn. $\sup_n \|\varphi_n\| < \infty$).

b) Jeśli $\sup_n \|\varphi_n\| < \infty$ i $\varphi_n(x) \to \varphi_0(x)$ dla wszystkich x z pewnego zbioru $E \subset X$, liniowo gęstego w $(X, \| \ \|)$, to ciąg (φ_n) jest w^*–zbieżny do φ_0. ⊟

Przykład 1. Nietrudno teraz dowieść, że ciąg (y_n) wtedy i tylko wtedy jest w przestrzeni $c_0^* = \ell_1(\mathbb{N})$ zbieżny do 0 słabo wstecz (czyli punktowo), gdy jest zbieżny do 0 po współrzędnych i $\sup_n \|y_n\| < \infty$. Natomiast jeśli $\ell_1(\mathbb{N} \cup \{0\})$ traktować jako c^*, to w^*–zbieżność (y_n) do 0 ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy prócz warunku $\sup_n \|y_n\| < \infty$ spełnione są następujące dwa: $\sum_{k=0}^{\infty} y_n(k) \to 0$ oraz $y_n(k) \to 0$ $\forall k \geq 1$. (Utożsamienia $\ell_1(\mathbb{N} \cup \{0\})$ z c^* i $\ell_1(\mathbb{N})$ z c_0^* opisano w zadaniach 3b) w §4.1 i 4 w §4.3.)

Na przestrzeni X^* mamy więc trzy topologie: w^*–topologię (słabą wstecz), w–topologię (słabą) i topologię normową. Z nich pierwsza jest najsłabsza, zaś ostatnia –najsilniejsza; na ogół pierwsze dwie nie są metryzowalne.

Uwaga 2. a) Gdy przestrzeń X jest refleksywna, to słaba wstecz topologia na X^* jest równa słabej (bo $J_X(X) = X^{**}$).

b) Odwrotna implikacja też ma miejsce, na podstawie twierdzenia 1c) w p.1.

c) Warunek Hausdorffa jest przez w^*–topologię nadal spełniony.

Twierdzenie 1 (Banacha–Alaoglu). *Domknięta kula jednostkowa $\overline{B}_{X^*}$ przestrzeni X^* jest zwarta w słabej wstecz topologii tej przestrzeni.*

Dowód. Na zbiorze $\mathbb{F}^X$ wszystkich funkcji $\varphi : X \to \mathbb{F}$ (włączając w to nieliniowe i nieciągłe) wprowadźmy najsłabszą topologię, w której ciągłe są wszystkie ewaluacje $\varphi \mapsto \varphi(x), x \in X$. Na $X^* \subset \mathbb{F}^X$ topologia ta indukuje w^*–topologię. Ponadto:

$\overline{B}_{X^*} = D \cap \bigcap\{S_{\lambda,x_1,x_2} : \lambda \in \mathbb{F}, x_1, x_2 \in X\}$, gdzie

$S_{\lambda,x_1,x_2} = \{\varphi \in \mathbb{F}^X : \varphi(x_1 + \lambda x_2) - \varphi(x_1) - \lambda \cdot \varphi(x_2) = 0\}$,

$D = \{\varphi \in \mathbb{F}^X : |\varphi(x)| \leq \|x\|$ dla każdego $x \in X\}$.

Każdy ze zbiorów S_{λ,x_1,x_2} jest domknięty w $\mathbb{F}^X$, bo funkcja $\mathbb{F}^X \ni \varphi \mapsto \varphi(x_1 + \lambda x_2) - \varphi(x_1) - \lambda \cdot \varphi(x_2)$ jest ciągła, jako kombinacja ewaluacji w punktach x_1, x_2 i

$x_1 + \lambda x_2$. Wykażemy, że zbiór D jest zwarty. To zakończy dowód, bo część wspólna rodziny zbiorów domkniętych, z których pewien jest zwarty, jest zbiorem zwartym.

W tym celu utożsamijmy $\mathbb{F}^X$ z iloczynem kartezjańskim $\prod_{x\in X}\mathbb{F}_x$ tylu kopii ciała skalarów $\mathbb{F}$, ile punktów liczy zbiór X. (Prowadzi do tego utożsamienie każdej funkcji $\varphi \in \mathbb{F}^X$ z punktem $(\varphi(x))_{x\in X} \in \prod_{x\in X}\mathbb{F}_x$.) Przy tej interpretacji, ewaluacji w punkcie x_0 odpowiada rzutowanie $\prod_x \mathbb{F}_x \to \mathbb{F}_{x_0}$, a rozważanej przez nas topologii na $\mathbb{F}^X$ – topologia produktowa na $\prod_{x\in X}\mathbb{F}_x$, najsłabsza, w której wszystkie te rzutowania są ciągłe. Zbiór D okazuje się zaś być iloczynem kartezjańskim zwartych zbiorów $\{\lambda \in \mathbb{F} : |\lambda| \le \|x\|\}$, $x \in X$, zwartym na podstawie twierdzenia Tichonowa. $\square$

Wniosek 1. *Każdą przestrzeń unormowaną X można liniowo-izometrycznie zanurzyć w przestrzeń $C(S)$ funkcji ciągłych na pewnej zwartej przestrzeni S (zależnej od X).*

Dowód. Za S bierzemy (domkniętą) kulę jednostkową $\overline{B}_{X^*}$ przestrzeni X^*, rozpatrywaną z w^*–topologią, a szukane zanurzenie to $X \ni x \mapsto J_X(x)_{|\overline{B}_{X^*}} \in C(S)$. (Wyjaśnienie: $J_X(x)$ jest funkcją na X^* (ewaluacją w x), ciągłą w w^*–topologii; jej obcięcie do $\overline{B}_{X^*}$ ma sup–normę równą $\|x\|$, na podstawie stwierdzenia 2 w §8.1.) $\square$

Wniosek 2. *Gdy A jest liniowo gęstym podzbiorem przestrzeni X, to identyczność jest homeomorfizmem powyższej przestrzeni S na przestrzeń $S' := (\overline{B}_{X^*}, \mathcal{T}(\overline{B}_{X^*}, A))$.*

Dowód. Wyjaśnijmy, że domknięta kula jednostkowa w $\overline{B}_{X^*}$ jest tu raz brana z topologią słabą wstecz, a raz z najsłabszą, w której ciągłe są wszystkie funkcje $\overline{B}_{X^*} \ni \varphi \mapsto \varphi(a) \in \mathbb{F}$, dla $a \in A$. Przekształcenie Id jest ciągłe, bo $A \subset X$; ponadto S' jest przestrzenią Hausdorffa, bo rodzina tych funkcji rozdziela punkty z $\overline{B}_{X^*}$, ze względu na liniową gęstość A. Teza wynika więc stąd, że różnowartościowe, ciągłe przekształcenie przestrzeni zwartej w przestrzeń Hausdorffa jest homeomorfizmem na swój obraz. $\square$

Wniosek 3. *Jeśli przestrzeń X jest ośrodkowa, to kula $S = (\overline{B}_{X^*}, w^*$–topologia) jest metryzowalna (i zwarta).*

Dowód. Niech $A = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ będzie zbiorem gęstym w X. Topologię przestrzeni S' z wniosku 2 wyznacza metryka $d(\varphi,\psi) := \sum_n 2^{-n}|\varphi(a_n) - \psi(a_n)|$. $\boxminus$

Uwaga 3. Przy założeniu ośrodkowości X, przestrzeń zwarta S z wniosku 1 jest więc metryzowalna. Z Topologii I wiadomo, że istnieje wtedy ciągłe przekształcenie u zbioru Cantora K na S. Przyporządkowanie każdej funkcji $f \in C(S)$ złożenia $f \circ u \in C(K)$ jest liniowo–izometrycznym zanurzeniem przestrzeni $C(S)$ w $C(K)$. To prowadzi do **twierdzenia Banacha – Mazura**: ośrodkową przestrzeń Banacha można liniowo-izometrycznie włożyć w przestrzeń $C(K)$ – a przez to i w $C([0,1])$, bo każdą funkcję z K w $\mathbb{R}$ można kanonicznie przedłużyć na $[0,1]$, co zadaje izometryczne włożenie $C(K)$ w $C([0,1])$. (Przedłużenie jest liniowe na składowych zbioru $[0,1] \setminus K$.)

Uwaga 4. Wobec twierdzenia Banacha-Alaoglu i wniosku 3, ograniczony ciąg funkcjonałów na przestrzeni ośrodkowej zawsze ma podciąg zbieżny punktowo.

Uwaga 5. a) Wprost z definicji, $J_X : (X, \mathcal{T}(X, X^*)) \to (X^{**}, \mathcal{T}(X^{**}, X^*))$ jest homeomorfizmem na swój obraz.

b) Stąd i wniosku 3 wynika, że gdy przestrzeń X^* jest ośrodkowa, to kula $\overline{B}_X$ jest metryzowalna w słabej topologii (bo metrzowlna jest kula $\overline{B}_{X^{**}}$ w w^*–topologii).

4 Zastosowanie słabej topologii do badania refleksywności.

Poza a)⇒b) w twierdzeniu 1 i wnioskiem 1, dalsze wyniki to materiał uzupełniający.

Twierdzenie 1 (charakteryzacja przestrzeni refleksywnych)**.** *Następujące warunki są równoważne dla przestrzeni unormowanej X:*

a) przestrzeń X jest refleksywna;

b) domknięta kula $\overline{B}_X = \{x \in X : \|x\| \le 1\}$ jest zwarta w słabej topologii na X;

c) każda scentrowana rodzina[19] *podzbiorów kuli $\overline{B}_X$, które są domknięte i wypukłe, ma niepuste przecięcie.*

Dowód. a)⇒b). Na podstawie twierdzenia Banacha–Alaoglu, kula $\overline{B}_{X^{**}}$ jest zwarta w w^*–topologii przestrzeni X^{**}. Jeśli przestrzeń X jest refleksywna, to $J_X(\overline{B}_X) = \overline{B}_{X^{**}}$ i zwartość kuli $\overline{B}_X$ w w–topologii wynika z uwagi 5a) w p.3.

b)⇒c). Każdy ze zbiorów rozważanej rodziny jest zarazem w–domknięty na podstawie twierdzenia Mazura. Pozostaje więc skorzystać z tego, że scentrowana rodzina domkniętych, niepustych podzbiorów przestrzeni zwartej ma niepuste przecięcie.

c)⇒a). Wystarczy dowieść, że $\overline{B}_{X^{**}} \subset J_X(\overline{B}_X)$. Niech więc $y \in \overline{B}_{X^{**}}$ i rozważmy rodzinę $\mathcal{C}$ wszystkich jego w^*–domkniętych, wypukłych otoczeń w X^{**}. Rodzina $\mathcal{C}$ jest zamknięta ze względu na skończone przecięcia, a każdy zbiór $C \in \mathcal{C}$ pozostaje domknięty w bogatszej topologii normowej i ma niepuste przecięcie z $J_X(\overline{B}_X)$ na podstawie poniższego twierdzenia Goldstine'a. Do rodziny $\{J_X^{-1}(C) \cap \overline{B}_X : C \in \mathcal{C}\}$ stosuje się więc c), wobec czego istnieje punkt $x \in \overline{B}_X \cap \bigcap\{J_X^{-1}(C) : C \in \mathcal{C}\}$. Tak więc $J_X(x) \in \bigcap \mathcal{C}$ i $\bigcap \mathcal{C} = \{y\}$ (z własności Hausdorffa) –czyli $y = J_X(x) \in J_X(\overline{B}_X)$. □

Twierdzenie 2 (Goldstine'a)**.** * *Obraz kuli $B_X = \{x \in X : \|x\| < 1\}$ przy zanurzeniu $J_X : X \to X^{**}$ jest gęsty w kuli $\overline{B}_{X^{**}}$ w w^*–topologii $\mathcal{T} = \mathcal{T}(X^{**}, X^*)$ przestrzeni X^{**}.*

Dowód. Przypuśćmy, że element z kuli $\overline{B}_{X^{**}}$ nie należy do domknięcia C zbioru $J_X(B_X)$ w topologii $\mathcal{T}$. Na podstawie wyników z p.1 (twierdzenia 1c) i uwagi 1), istnieje funkcjonał $\varphi \in (X^{**}, \mathcal{T})^* = X^*$, oddzielający z od C. Uwzględniając to, jak φ działa na $J_X(X)$, stwierdzamy że $\mathrm{Re}\, z(\varphi) > \sup\{\mathrm{Re}\, \varphi(x) : \|x\| < 1\} = \|\varphi\|$ –co niemożliwe, bo $\mathrm{Re}\, z(\varphi) \le \|z\|\|\varphi\|$ i $\|z\| \le 1$. □

[19]tzn. taka, że każda jej skończona podrodzina ma niepuste przecięcie.

Wniosek 1. *Każdy funkcjonał na przestrzeni refleksywnej X osiąga swą normę.*

Dowód. Ponieważ funkcjonał jest ciągły w słabej topologii, to na kuli $\overline{B}_X$, zwartej w tej topologii, jego moduł osiąga swój kres górny. □

Uwaga 1. * R. C. James udowodnił, że odwrócenie wniosku 1 też jest prawdziwe.

Wniosek 2 (twierdzenie D. Milmana)**.** * *Jednostajnie wypukła przestrzeń Banacha jest refleksywna.*

Dowód. Wykażemy, że spełniony jest warunek c) twierdzenia 1. Niech $\mathcal{C}$ będzie rozważaną w tym warunku rodziną zbiorów i niech $r := \sup_{C\in\mathcal{C}} \operatorname{dist}(0, C)$; wtedy $r \leq 1$ i można ograniczyć się do przypadku, gdy $r \neq 0$. Rodzina $\{C \cap (1+\varepsilon)r\overline{B}_X : \varepsilon > 0, C \in \mathcal{C}\}$ nadal ma przypisane $\mathcal{C}$ własności, lecz zawiera zbiory o dowolnie małej średnicy. (Patrz uwaga 1 w §2.4.) Ponieważ X jest przestrzenią zupełną, przecięcie tej rodziny jest niepuste. Tym samym $\bigcap \mathcal{C} \neq \emptyset$. ⊟

Uwaga 2. * Z wniosku 2 i wyników §2.4 wynika refleksywność przestrzeni $L_p(\mu)$ dla $p \in (1, \infty)$. Odnotujmy, że jednostajna wypukłość $L_p(\mu)$, a więc i nierówności Clarksona, grają tu rolę tylko dla $p \in [2, \infty)$. Istotnie, gdy $q \in (1, 2]$, to przestrzeń $L_q(\mu)$ liniowo–izometrycznie wkłada się w $(L_p(\mu))^*$ dla $p := q/(q-1) \in [2, \infty)$ – a tym samym refleksywność $L_q(\mu)$ wynika z refleksywności $L_p(\mu)$ i twierdzenia 1b)* w §8.1. (Wykorzystano też łatwy punkt b) twierdzenia 2 w §4.1.)

To prowadzi do kolejnego dowodu twierdzenia o postaci funkcjonałów na $L_p(\mu)$:

Zadanie 1. * Dowieść, że z refleksywności przestrzeni $L_p = L_p(\mu)$ wynika surjektywność kanonicznego włożenia $S : L_q \to L_p^*$. (Wskazówka: jeśliby $\operatorname{im}(S) \neq L_p^*$, to istniałby niezerowy funkcjonał $\varphi \in L_p^{**} = L_p$, zerujący się na $\operatorname{im}(S)$.)

Zadanie 2. * Dowieść twierdzenia 1b)* w §8.1 w oparciu o twierdzenie 1 i zad.1 z p.2.

§ 13. Tematy egzaminu w części teoretycznej/egzaminu ustnego

1. Przestrzenie liniowe unormowane i Banacha; przestrzeń $\mathcal{L}(V, W)$ operatorów ograniczonych z normą operatorową; przestrzeń sprzężona i przestrzenie ilorazowe; charakteryzacja przestrzeni skończenie–wymiarowych (wśród unormowanych).

2. Podstawowe przykłady przestrzeni Banacha: $c_0, c, \ell_p(A), L_p(\mu), C(X)$. Zupełność tych przestrzeni, przestrzenie sprzężone do nich.

3. Twierdzenia Kakutaniego i Hahna–Banacha; twierdzenia o oddzielaniu.

4. Istnienie punktu najbliższego w domkniętym podzbiorze wypukłym jednostajnie wypukłej przestrzeni Banacha. Zastosowanie do dowodu surjektywności przekształcenia kanonicznego $L_q(\mu) \to L_p(\mu)^*$, a dalej do dowodu twierdzenie Radona–Nikodyma.

5. Opis przestrzeni sprzężonej X^* dla $X = c_0, \ell_\infty(\Gamma), C$(przestrzeń zwarta). Wariacja całkowita miary jako norma funcjonału; regularność miary.

6. Konsekwencje zupełności przestrzeni Banacha: twierdzenie Banacha–Steinhausa, twierdzenie o otwartości, twierdzenie o wykresie domkniętym. Zastosowania.

7. Przestrzenie Hilberta. Rola układów ortonormalnych: abstrakcyjne rozwinięcie w szereg Fouriera względem takiego układu, nierówność Bessela i tożsamość Parsevala, izometryczność przestrzeni Hilberta z przestrzenią $\ell_2(\Gamma)$. Przykłady takich układów. Twierdzenie Frécheta–Fischera–Riesza o postaci funkcjonałów, kanoniczna antyliniowa izometria przestrzeni Hilberta H na H^*. Twierdzenie Plancherela.

8. Sprzężenie operatora; własności i porównanie ze sprzężeniem hermitowskim.

9. Dwa twierdzenia spektralne dla operatorów samosprzężonych/normalnych. Spektrum operatora; oszacowanie promienia spektralnego i niepustość spektrum w przypadku zespolonym. Zastosowania, np. rozkład biegunowy operatora $T \in \mathcal{L}(H)$.

10. Operatory zwarte i fredholmowskie; własności. Przykłady operatorów zwartych. Diagonalizacja zwartych operatorów samosprzężonych/normalnych na przestrzeni Hilberta. Twierdzenia Riesza i Schaudera.

11. Słabe topologie na przestrzeniach unormowanych i ich sprzężonych, twierdzenia Mazura i Banacha–Alaoglu.

12. Rozrzucone wiadomości z wykładów i ćwiczeń: Wyznaczanie funkcjonału $\mathbb{C}$–liniowego na przestrzeni zespolonej przez $\mathbb{R}$–liniowy. Punkty ekstremalne. Przykłady funkcjonałów nie osiągających normy i nierefleksywność przestrzeni $c_0, c, C(I), \ell_\infty, \ell_1$. Istnienie ciągłej surjekcji liniowej przestrzeni ℓ_1 na każdą ośrodkową przestrzeń Banacha. Kanoniczne zanurzenie przestrzeni w jej drugą sprzężoną; zanurzanie przestrzeni unormowanej w $\ell_\infty(\Gamma)$ i w $C(S)$, a w przypadku ośrodkowym – w $C(I)$. Słaba i słaba wstecz topologia; twierdzenie Banacha–Alaoglu. Twierdzenia Mazura o słabej versus normowej zbieżności i o zwartości domknięcia uwypuklenia zwartego podzbioru przestrzeni Banacha. Charakteryzacja słabej zbieżności ciągów w $c_0, c, \ell_p, C(S)$ dla zwartych S.