## § 1. Tematy egzaminu w części teoretycznej/egzaminu ustnego.

1. Przestrzenie liniowe unormowane i Banacha; przestrzeń $\mathcal{L}(V,W)$ operatorów ograniczonych z normą operatorową; przestrzeń sprzężona i przestrzenie ilorazowe; charakteryzacja przestrzeni skończenie–wymiarowych (wśród unormowanych).

2. Podstawowe przykłady przestrzeni Banacha: $c_0, c, \ell_p(A), L_p(\mu), C(X)$. Zupełność tych przestrzeni, przestrzenie sprzężone do nich.

3. Twierdzenia Kakutaniego i Hahna–Banacha; twierdzenia o oddzielaniu.

4. Istnienie punktu najbliższego w domkniętym podzbiorze wypukłym jednostajnie wypukłej przestrzeni Banacha. Zastosowanie do dowodu surjektywności przekształcenia kanonicznego $L_q(\mu) \to L_p(\mu)^*$, a dalej do dowodu twierdzenie Radona–Nikodyma.

5. Opis przestrzeni sprzężonej $X^*$ dla $X = c_0, \ell_\infty(\Gamma), C$(przestrzeń zwarta). Wariacja całkowita miary jako norma funcjonału; regularność miary.

6. Konsekwencje zupełności przestrzeni Banacha: twierdzenie Banacha–Steinhausa, twierdzenie o otwartości, twierdzenie o wykresie domkniętym. Zastosowania.

7. Przestrzenie Hilberta. Rola układów ortonormalnych: abstrakcyjne rozwinięcie w szereg Fouriera względem takiego układu, nierówność Bessela i tożsamość Parsevala, izometryczność przestrzeni Hilberta z przestrzenią $\ell_2(\Gamma)$. Przykłady takich układów. Twierdzenie Frécheta–Fischera–Riesza o postaci funkcjonałów, kanoniczna antyliniowa izometria przestrzeni Hilberta $H$ na $H^*$. Twierdzenie Plancherela.

8. Sprzężenie operatora; własności i porównanie ze sprzężeniem hermitowskim.

9. Dwa twierdzenia spektralne dla operatorów samosprzężonych/normalnych. Spektrum operatora; oszacowanie promienia spektralnego i niepustość spektrum w przypadku zespolonym. Zastosowania, np. rozkład biegunowy operatora $T \in \mathcal{L}(H)$.

10. Operatory zwarte i fredholmowskie; własności. Przykłady operatorów zwartych. Diagonalizacja zwartych operatorów samosprzężonych/normalnych na przestrzeni Hilberta. Twierdzenia Riesza i Schaudera.

11. Słabe topologie na przestrzeniach unormowanych i ich sprzężonych, twierdzenia Mazura i Banacha–Alaoglu.

12. Rozrzucone wiadomości z wykładów i ćwiczeń: Wyznaczanie funkcjonału $\mathbb{C}$–liniowego na przestrzeni zespolonej przez $\mathbb{R}$–liniowy. Punkty ekstremalne. Przykłady funkcjonałów nie osiągających normy i nierefleksywność przestrzeni $c_0, c, C(I), \ell_\infty, \ell_1$. Istnienie ciągłej surjekcji liniowej przestrzeni $\ell_1$ na każdą ośrodkową przestrzeń Banacha. Kanoniczne zanurzenie przestrzeni w jej drugą sprzężoną; zanurzanie przestrzeni unormowanej w $\ell_\infty(\Gamma)$ i w $C(S)$, a w przypadku ośrodkowym – w $C(I)$. Słaba i słaba wstecz topologia; twierdzenie Banacha–Alaoglu. Twierdzenia Mazura o słabej versus normowej zbieżności i o zwartości domknięcia uwypuklenia zwartego podzbioru przestrzeni Banacha. Charakteryzacja słabej zbieżności ciągów w $c_0, c, \ell_p, C(S)$ dla zwartych $S$.

13. Materiał uzupełniający $^*$: Twierdzenie Kreina-Milmana. Istnienie ciągłej surjekcji liniowej przestrzeni $\ell_1$ na każdą ośrodkową przestrzeń Banacha. Dowód twierdzenia o reprezentacji funkcjonałów nieujemnych na $C(X)$, dla zwartej przestrzeni $X$. Twierdzenia spektralne w przypadku kilku komutujących operatorów samosprzężonych/normalnych. Alternatywa Fredholma. Metryzowalność słabej topologii na kuli $\overline{B}_V$ (odp. słabej wstecz topologii na kuli $\overline{B}_{V^*}$) przy założeniu ośrodkowości $V^*$ (odp. $V$). Twierdzenie Goldstine'a i charakteryzacja przestrzeni refleksywnych.