Analiza Funkcjonalna - 40 b)*

Krzysztof Zakrzewski

27 stycznia 2021

40 b) Chcemy uzasadnić, że

$$\left(\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^q + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^q\right)^{p-1} \leqslant \frac{1}{2}(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p)$$

Po pierwsze zgodnie ze wskazówką

$$\|h\|_p^q = \left(\int |h|^p\right)^{\frac{q}{p}} = \left(\int |h|^{q(p-1)}\right)^{\frac{1}{p-1}} = \||h|^q\|_{p-1}$$

, ponieważ $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ implikuje $\frac{q}{p} = \frac{1}{p-1}$ oraz $p = q(p-1)$. Przekształcając zgodnie z tym lewą stronę mamy:

$$\left(\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^q + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^q\right)^{p-1} = \left(\left\|\left|\frac{f+g}{2}\right|^q\right\|_{p-1} + \left\|\left|\frac{f-g}{2}\right|^q\right\|_{p-1}\right)^{p-1}$$

Z nierówności minkowskiego, dla $0 \leqslant p-1 \leqslant 1$, mamy

$$\left(\left\|\left|\frac{f+g}{2}\right|^q\right\|_{p-1} + \left\|\left|\frac{f-g}{2}\right|^q\right\|_{p-1}\right)^{p-1} \leqslant \left(\left\|\left|\frac{f+g}{2}\right|^q + \left|\frac{f-g}{2}\right|^q\right\|_{p-1}\right)^{p-1}$$

Wystarczy, zatem wykazać, że

$$\int\left(\left|\frac{f+g}{2}\right|^q + \left|\frac{f-g}{2}\right|^q\right)^{p-1} \leqslant \int \frac{1}{2}(|f|^p + |g|^p)$$

Funkcja pod całką z lewej strony jest w każdym punkcie mniejsza niż ta po prawej stronie, wynika to z zadania 25 b), mówi ono, że dla liczb $x, y \in \mathbb{C}$ prawdziwa jest nierówność

$$(|x|^q + |y|^q)^{p-1} \leqslant \frac{1}{2}(|x+y|^p + |x-y|^p)$$

, podstawiając $x = (f(z)+g(z))/2$ oraz $y = (f(z)-g(z))/2$, dostajemy tezę.