Analiza Funkcjonalna - Problem 5

Krzysztof Zakrzewski

12 stycznia 2021

Problem 5.
i) Dany jest ciąg dokładny przestrzeni skończenie wymiarowych

$$0 = V_0 \xrightarrow{T_0} V_1 \xrightarrow{T_1} .... \xrightarrow{T_{n-1}} V_n = 0$$

Z twierdzenia o izomorfizmie mamy

$$V_k/ker\, T_k \cong im\, T_k$$

, z czego wynika

$$dim\, V_k = dim\, ker\, T_k + dim\, im\, T_k$$

Ponieważ ciąg jest dokładny, mamy $im\, T_i = ker\, T_{i+1}$, zatem

$$dim\, V_k = dim\, im\, T_{k-1} + dim\, im\, T_k$$

, dla $k \in \{1, ., n\}$.
Mamy, że

$$\sum_{k=0}^{\infty} dim\, V_{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} (dim\, im\, T_{2k} + dim\, im\, T_{2k+1}) = \sum_{k=1}^{\infty} dim\, im\, T_k$$

Z drugiej strony

$$\sum_{k=0}^{\infty} dim\, V_{2k} = \sum_{k=1}^{\infty} dim\, V_{2k} = \sum_{k=1}^{\infty} (dim\, im\, T_{2k-1} + dim\, im\, T_{2k}) = \sum_{k=1}^{\infty} dim\, im\, T_k$$

, co daje tezę.
ii) Mamy ciąg dokładny:

$$\{0\} \xrightarrow{T_0} V_1 \xrightarrow{T_1} V_2 \xrightarrow{T_2} V_3 \xrightarrow{T_3} W_1 \xrightarrow{T_4} W_2 \xrightarrow{T_5} W_3 \xrightarrow{T_6} \{0\}$$

Rozpatrujemy trzy przypadki:

1) $dim\, V_1$, $dim\, V_2$, $dim\, W_1$, $dim\, W_2 < \infty$
Mamy, że $V_3/ker T_3 \cong im T_3$. Po pierwsze $im T_3 \subseteq W_1$, zatem $dim im T_3 < \infty$. Po drugie $ker\ T_3 = im\ T_2$ oraz $dim\ im\ T_2 \leqslant dim\ V_2 < \infty$. Iloraz V_3 i podprzestrzeni skończenie wymiraowej jest przestrzenią skończenie wymiarową, zatem przestrzeń V_3 też ma skończony wymiar.
Z dokładności ciągu mamy, $im\, T_5 = ker\, T_6 = W_3$ oraz $dim\, im(T_5) \leqslant dim W_2$, zatem $dim\, W_3 \leqslant dim\, W_2 < \infty$

2) $dim\, V_1$, $dim\, V_3$, $dim\, W_1$, $dim\, W_3 < \infty$.
Mamy $im\ T_2 \subseteq V_3$, czyli $dim\ im\ T_2 < \infty$. Z twierdzenia o izomorfizmie $V_2/ker\ T_2 \cong im\ T_2$, co więcej $ker\ T_2 = im\ T_1$ i $dim\ im\ T_1 \leqslant dim\ V_1 < \infty$. Znowu mamy sytuację, że iloraz przestrzeni V_2 przez podprzestrzeń skończenie wymiarową ma skończony wymiar. Przestrzeń V_2 ma skończony wymiar. Analogicznie dowodzimy, że W_2 ma skończony wymiar.

3) $dim\, V_2$, $dim\, V_3$, $dim\, W_2$, $dim\, W_3 < \infty$.
Mamy $\{0\} = im\ T_0 = ker\ T_1$, czyli T_1 jest zanurzeniem przestrzeni V_1 w przestrzeń skończenie wymiarową V_2, zatem V_1 jest skończenie wymiarowe. Z tw o izomorfizmie $W_1/ker\ T_4 \cong im\ T_4$. Ponadto $ker\ T_4 = im\ T_3$, czyli jest skończenie wymiarowe, a $im\ T_4 \subseteq W_2$ też jest skończenie wymiarowe. Tak samo jak poprzednio $dim\, W_1 < \infty$.

iii) Mamy ciąg przekształceń:

$$X \xrightarrow{S} Y \xrightarrow{T} Z$$

i rozpatrujemy ciąg

$$\{0\} \xrightarrow{j} ker(S) \xrightarrow{i} ker(TS) \xrightarrow{S\restriction} ker(T) \xrightarrow{\Pi\restriction} Y/im(S) \xrightarrow{\widetilde{T}} Z/im(TS) \xrightarrow{J} Z/im(T) \xrightarrow{k} \{0\}$$

Chcemy uzasadnić, że jest dokładny.

I) $im\, j = ker\, i$
Przekaształcenia i, j są włożeniami. Wystarczy zobaczyć, że $ker(S) \subseteq ker(TS)$, co jest oczywiste, bo jeżeli $x \in ker(S)$ to $Sx = 0$, z czego wynika $TSx = T(0) = 0$, co daje $x \in ker\ (TS)$

II) $im\, i = ker\, S\restriction$

Przekształcenie $S\restriction$ to poprostu $S\restriction_{ker(TS)}$.
Mamy $x \in im\, i \implies Sx = 0 \implies S\restriction_{ker(TS)}(x) = 0 \implies x \in ker\, S\restriction_{ker(TS)}$, oraz $x \in ker\, S\restriction_{ker(TS)}$ poprostu implikuje $x \in ker(S)$, czyli $x \in im\, i$, bo i to włożenie.

III) $im\, S\restriction = ker\, \Pi\restriction$
$\Pi\restriction = \Pi\restriction_{ker(T)}$ oraz $\Pi : Y \to Y/im(S)$ to rzut.
Mamy $x \in im(S\restriction) \implies x \in im(S) \implies \Pi(x) = 0 \implies x \in ker(\Pi\restriction)$, oraz $x \in ker(\Pi\restriction) \implies x \in ker(T) \cap im(S)$, zatem $x = S(y)$, dla $y \in X$, oraz $Tx = 0$. Dostajemy, że $TSy = Tx = 0$, czyli $y \in ker(TS)$, zatem $x \in im\, S\restriction$.

IV) $im\Pi\restriction = ker\, \widetilde{T}$
Przekształcenie $\widetilde{T}$ jest zdefiniowane tak: $\widetilde{T}([y]) = [T(y)]$, dla $y \in Y$, gdzie $[y]$ to klasa y w $Y/im\,(S)$, jest to dobrze zdefiniowane przekształcenie, bo $T(im(S)) = im(TS)$. Dla $x \in im(\Pi\restriction)$ istnieje $x' \in ker(T)$, taki że $x = [x']$. Wtedy $\widetilde{T}(x) = [T(x')] = [0] = 0$, czyli $x \in ker\,(\widetilde{T})$. Załóżmy, zatem, że $[x] \in ker(\widetilde{T})$, wtedy $T(x) = 0$, czyli $[x] \in im(\Pi\restriction)$

V)$im(\widetilde{T}) = ker(J)$,
Obie te rzeczy są poprostu równe podprzestrzeni ilorazowej $im(T)/im(TS)$.

VI) Równość $im\,(J) = ker\,(k)$, jest oczywista, przekształcenie J jest "na", $im\,(J) = Z/im(T) = ker\,(k)$.