Analiza Funkcjonalna - Problem 4

Krzysztof Zakrzewski

9 grudnia 2020

Problem 4.
Najpierw rozpatrujemy przestrzeń liniową V nad $\mathbb{R}$.
Definiujemy iloczyn skalarny w następujący sposób

$$< a, b >= \frac{1}{4}(||a+b||^2 - ||a-b||^2)$$

Symetryczność jest oczywista. Najpierw sprawdzimy, czy jest liniowy ze względu na pierwszą współrzędną. Chcemy uzasadnić, że $< a+b, c >=< a, c > + < b, c >$. Wystarczy sprawdzić, że:

$$||a+b+c||^2 - ||a+b-c||^2 = ||a+c||^2 - ||a-c||^2 + ||b+c||^2 - ||b-c||^2$$

Z równości równoległoboku dla $a+c$ i b wynika:

$$2||a+c||^2 + 2||b||^2 = ||a+c-b||^2 + ||a+b+c||^2$$

,czyli

$$||a+b+c||^2 = 2||b+c||^2 + 2||a||^2 - ||b-a+c||^2$$

, analogicznie mamy

$$||a+b+c||^2 = 2||a+c||^2 + 2||b||^2 - ||a-b+c||^2$$

Dodając obie równości stronami i dzieląc przez 2 otrzymujemy:

$$||a+b+c||^2 = ||a+c||^2 + ||b+c||^2 + ||a||^2 + ||b||^2 - \frac{1}{2}||a-b+c||^2 - \frac{1}{2}||b-a+c||^2$$

Stusując powyższe dla $a, b, -c$ dostajemy:

$$||a+b-c||^2 = ||a-c||^2 + ||b-c||^2 + ||a||^2 + ||b||^2 - \frac{1}{2}||a-b-c||^2 - \frac{1}{2}||b-a-c||^2$$

Wyliczamy $< a+b, c >$:

$$< a+b, c >= \frac{1}{4}(||a+b+c||^2 - ||a+b-c||^2) =$$

$$\frac{1}{4}(||a+c||^2 + ||b+c||^2 + ||a||^2 + ||b||^2 - \frac{1}{2}||a-b+c||^2 - \frac{1}{2}||b-a+c||^2$$

$$-||a-c||^2 - ||b-c||^2 - ||a||^2 - ||b||^2 + \frac{1}{2}||a-b-c||^2 + \frac{1}{2}||b-a-c||^2) =$$

$$\frac{1}{4}(||a+c||^2 + ||b+c||^2 - ||a-c||^2 - ||b-c||^2) =< a, c > + < b, c >$$

Do liniowości brakuje nam tylko równości $< \lambda a, b >= \lambda < a, b >$ dla dowolnej liczby rzeczywistej. Z tego co udowodniliśmy wynika ona dla liczb całkowitych dodatnich. Łatwo sprawdzić, że działa ona także dla -1, zatem działa dla dowolnych liczb całkowitych.
Z drugiej strony jeżeli $q \in \mathbb{Z}$, wtedy

$$q < \frac{1}{q}a, b >=< a, b >$$

, czyli

$$< \frac{1}{q}a, b >= \frac{1}{q} < a, b >$$

, równość działa dla odwrotności liczb całkowitych, zatem działa dla dowolnej liczby wymiernej. Z naszej definicji iloczynu skalarnego wynika, że jest on funkcją ciągłą ze względu na obie zmienne. Wynika z tego, że wzór $< \lambda a, b >= \lambda < a, b >$ działa dla dowolnej liczby rzeczywistej λ. Dodatnia określoność wynika bezpośrednio z definicji.

Rozpatrzmy teraz przypadek przestrzeni liniowej V nad $\mathbb{C}$.
Definiujemy iloczyn skalarny w następujący sposób:

$$< a, b >= \frac{1}{4}(||a+b||^2 - ||a-b||^2 + i||a+ib||^2 - i||a-ib||^2)$$

Najpierw sprawdzimy, że $< a, b >= \overline{< b, a >}$

$$< b, a >= \frac{1}{4}(||a+b||^2 - ||a-b||^2 + i||b+ia||^2 - i||b-ia||^2)$$

$$< a, b >= \overline{< b, a >} \iff$$

$$-||b+ia||^2 + ||b-ia||^2 = ||a+ib||^2 - ||a-ib||^2 \iff$$

Mamy,

$$||a+ib||^2 - ||a-ib||^2 = ||(a+ib)i||^2 - ||(a-ib)i||^2$$

,ponieważ i ma moduł równy 1, zatem

$$||a+ib||^2 - ||a-ib||^2 = ||ia-b||^2 - ||ai+b||^2$$

Czyli to co trzeba. Teraz chcemy uzasadnić, że

$$< a+b, c >=< a, c > + < b, c >$$

Zauważmy, że $Re[< a, b >] = ||a+b||^2 - ||a-b||^2$ wyraża się dokładnie takim samym wzorem jak iloczyn skalarny w przypadku rzeczywistym. Przy dowodzie teraz rozważanej równości w przypadku rzeczywistym nie używaliśmy w żaden sposób tego, że ciało jest równe $\mathbb{R}$. Czyli analogicznie dowodzimy, że

$$Re[< a+b, c >] = Re[< a, c >] + Re[< b, c >]$$

Podobnie jest z $Im[< a, b >]$ jest wyrażone tym samym wzorem co iloczyn skalarny w przypadku rzeczywistym tylko jest przemnożony przez i, oraz zamiast b mamy bi. Analogiczne rachunki jak w przypadku rzeczywistym doprowadzą nas do tego, że

$$Im[< a+b, c >] = Im[< a, c >] + Im[< b, c >]$$

Czyli ok. Wystarczy wykazać wzór

$$\lambda < a, b >=< \lambda a, b >$$

Dla λ rzeczywistych robimy tak samo jak przedtem. Pozostaje wykazać to dla $\lambda = i$. Chcemy

$$< ia, b >= i < a, b >$$

.

$$< ia, b >= \frac{1}{4}(||ia+b||^2 - ||ia-b||^2 + i||ia+ib||^2 - i||ia-ib||^2)$$

Ponieważ moduł $-i$ jest równy 1 to wyrażenia w normach w linijce wyżej przemnożone przez $-i$ będą miały cały czas tą samą normę, zatem

$$< ia, b >= \frac{1}{4}(||a-ib||^2 - ||a+ib||^2 + i||a+b||^2 - i||a-b||^2) = i < a, b >$$